SINTEZE LYCEUM

CĂTĂLIN-PETRU NICOLESCU

ANALIZĂ MATEMATICĂ

(Ediția a II-a revăzută și adăugită)

APLICAȚII

★

Cuvînt înainte de
prof. dr. doc. CONSTANTIN DRÂMBĂ,
Membru corespondent al Academiei R.S. România

EDITURA ALBATROS • BUCUREȘTI, 1987

Referenți:
prof. univ. dr. doc. CONSTANTIN DRÂMBĂ
prof. univ. dr. CONSTANTIN P. POPOVICI
prof. ANDREI VERNESCU

Desene: pictor NADEJDA LUMINIȚA NICOLESCU

Lucrare avizată de Comisia de Matematică a Ministerului Educației și Învățământului.

CUVÎNT ÎNAINTE LA EDIȚIA A II-A

Ediția a II-a a lucrării „Teste de analiză matematică", prezentînd volumul întîi al ciclului de lucrări „Probleme de matematică" pentru liceu, alcătuită de prof. Cătălin-Petru Nicolescu, se datorează solicitărilor unui număr mare de profesori și elevi, după epuizarea rapidă a primei ediții.

Cu această ocazie au fost introduse probleme și exerciții noi, astfel ca elevii ultimei clase de liceu să efectueze recapitularea sistematică a cunoștințelor teoretice și practice din anii precedenți, folosind analiza matematică, algebra, trigonometria, geometria, mecanica.

Noua ediție este foarte utilă prin varietatea problemelor și exercițiilor propuse, în majoritate originale, destinate pregătirii elevilor care participă la olimpiadele de matematică și la examenele de admitere în institute de învățămînt superior.

Prof. univ. dr. doc. CONSTANTIN DRÂMBĂ
Membru corespondent al Academiei
Republicii Socialiste România

București, 7 ianuarie 1987

CAPITOLUL I

ȘIRURI. LIMITE DE ȘIRURI

PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

1. Să se demonstreze că următoarele șiruri sînt monotone și mărginite, iar aplicînd Teorema de convergență cu ε a limitei unui șir să se arate că l este limita șirului considerat:

i) $a_n = \dfrac{2n}{3n+1}$, $l = \dfrac{2}{3}$;

ii) $a_n = -\dfrac{3n+1}{7n}$, $l = -\dfrac{3}{7}$;

iii) $a_n = \dfrac{\alpha n}{\beta n + 1}$, $l \in \left\{0,\ 1,\ \dfrac{\alpha}{\beta}\right\}$, $\beta \neq 0$;

iv) $a_n = \dfrac{n^2}{2n^2+2}$, $l = \dfrac{1}{2}$;

v) $a_n = \dfrac{2^n + (-2)^n}{3^n}$, $l = 0$.

2. Se consideră șirul cu termenul general

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+2)};$$

să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \cdot \left(S_n - \dfrac{1}{4}\right)^n$.

3. Se consideră șirul cu termenul general:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)};\quad n \in \mathbf{N}.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

4. Să se determine limita următorului șir:

i) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$;

ii) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$;

iii) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{4k^2-1}$;

iv) $a_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} c^k}{\sum_{k=1}^{n} \pi^k}$;

v) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3+6k^2+11k+6}$;

vi) $a_n = \frac{1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6 + \ldots + n(n+3)}{C_{n+3}^{n}}$;

vii) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n + \ldots + n^n}$;

viii) $a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{2}{2n}\right)\ldots\left(1+\frac{2n}{2n}\right)$;

ix) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3k^2+3k+1}{k^3(k+1)^3}$; x) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3+k}{n^4+k}$.

5. i) $a_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} k^4}{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}$;

ii) $a_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} k^5}{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}$;

iii) $a_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} k^6}{n(n+1)(6n^5+15n^4+6n^3-6n^2-n+1)}$;

iv) $a_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} k^7}{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}$;

v) $a_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^4}{(-1)^{n-1} n(n+1)(n^2+n-1)}$.

6. Să se scrie sub formă de fracție ordinară numerele:
i) $0,(6)$, ii) $0,9(31)$.

7. Să se arate că șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ cu $x_1 = 0,9$, $x_2 = 0,99$, ..., $x_n = \underbrace{0,99\ldots9}_{\text{de } n \text{ ori}}$ converge către 1.

8. Se consideră șirul cu termenul general

$$S_n = \frac{1}{\sqrt[p]{n^p+a}} + \frac{1}{\sqrt[p]{n^p+2a}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[p]{n^p+na}},$$

unde $a > 0$, $p \geq 2$, $n \in \mathbf{N}$. Se cere:
i) să se arate că șirul este mărginit;
ii) să se arate că este convergent și să se calculeze $\lim_{n\to\infty} S_n$.

9. Să se determine:
i) cel mai mic termen al șirului: $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$,

$$u_n = \frac{n^2}{2} - 7n;$$

ii) cel mai mare termen al șirului $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$,

$$u_n = \frac{7n}{3} - \frac{n^2}{2}.$$

10. Fie $u_n = \sum_{i=1}^{n} i$ și $v_m = \sum_{n=1}^{m} u_n$. Să se calculeze $\lim_{m\to\infty} \frac{v_m}{m^k}$ pentru k, m, $n \in \mathbf{N}$.

(Fac. de matematică)

11. Fie șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu termenul general

$a_n = a + n + 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{k^4+k^2+1}{k^4+k}$; a parametru real.

Se cere:

i) să se arate că șirul este convergent;

ii) să se găsească termenul de la care avem $|a_n - a| \leqslant 0{,}01$.

12. Fie șirul cu termenul general:

$$a_n = \frac{1! + 2! + \ldots + n!}{(2n)!}, \; n \in \mathbf{N}.$$

Se cere:

i) să se formeze termenii a_1, a_2, a_3;

ii) să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

13. Să se calculeze limita șirului:

$$a_n = \frac{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n!}{(n+1)!}, \; n \in \mathbf{N}.$$

14. Se consideră șirul cu termenul general

$$a_n = \frac{n^3 + 7n^2 + 12n + 2}{(n+3)!}, \; n \in \mathbf{N}.$$

Se cere:

i) să se determine constantele reale a, b, c, d, astfel încît

$$a_n = \frac{a}{n!} + \frac{b}{(n+1)!} + \frac{c}{(n+2)!} + \frac{d}{(n+3)!}, \; n \in \mathbf{N};$$

ii) să se calculeze $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, scriind rezultatul sub forma cea mai simplă (efectuînd toate calculele algebrice);

iii) să se arate că șirul cu termenul general $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent și să i se calculeze limita.

15. Să se calculeze limita următorului șir:

i) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n+k}{(n+k+1)!}$;

ii) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)! + k!}$;

iii) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k! + (k+1)! + (k+2)!}$;

iv) $a_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k!(k^2+k+1)}{(n+1)\,(n+1)!}$;

v) $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k!}{(k+p)!}$, $p \geqslant 2$. vi) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$;

vii) $a_n = \prod\limits_{k=1}^{n} a^{\frac{k}{(k+1)!}}$ cu $a > 1$;

viii) $a_n = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^3}{k!}$ știind că $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) = e$;

ix) $a_n = \frac{n+2}{n!} + \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{k^2-2}{k!}$;

x) $a_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2(k+1)!}{(n+3)!}$; xi) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2+k-1}{(k+2)!}$;

xii) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^3+k^2-2k-1}{[(k+1)!]^2}$.

16. Să se calculeze limita următorului șir:

i) $a_n = \sqrt[n]{\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k}$; ii) $a_n = \sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} C_n^k}$;

iii) $a_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n-k+1} C_{n-i}^{k-1}}{C_n^k}$; iv) $a_n = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} (C_n^k)^2}{C_{2n}^n}$;

v) $a_n = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k\,(C_n^k)^2}{\sum\limits_{k=0}^{n} (C_n^k)^2}$; vi) $a_n = \frac{\sum\limits_{k=2}^{n} (C_k^2)^4}{n(n^2-1)\,(3n^2-2)}$;

vii) $a_n = \frac{1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots}{C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots} \cdot \operatorname{tg} \frac{n\pi}{4}$;

viii) $a_n = \dfrac{2^n + C_n^3 \cdot 2^{n-2} + C_n^5 2^{n-4} + \dots}{C_n^1 2^{n-1} + C_n^3 2^{n-3} + C_n^5 2^{n-5} + \dots}$;

ix) $a_n = \dfrac{C_{3n}^1 - 2C_{3n}^3 + 4C_{3n}^5 - \dots}{C_{3n}^1 - 8C_{3n}^3 + 64C_{3n}^5 - \dots}$;

x) $a_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} k \cdot C_n^k}{1 + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+1} \cdot C_n^k}$;

xi) $a_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} C_n^k \sin kx}{1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k \cos kx} \cdot \operatorname{ctg} \dfrac{nx}{2}$;

xii) $a_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} k \cdot (C_n^k)^2}{n \cdot C_{2n-1}^n}$;

xiii) $a_n = \dfrac{\sum_{k=3}^{n} C_k^3 \cdot C_k^3}{10C_{n+1}^6 + 12C_{n+1}^5 + 3C_{n+1}^4}$.

17. i) Fiind dat șirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$

$$a_n = \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 3 \cdot \frac{1}{3^3} + \dots + n \cdot \frac{1}{3^n}, \quad n \in \mathbf{N},$$

să se calculeze $\lim_{n \to \infty} a_n$.

ii) Să se determine numerele $A, B, C, D \in \mathbf{R}$, știind că pentru orice $n \in \mathbf{N}$ au loc identitățile:

$$S_n' = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{An + B}{2^n} + C;$$

$$S_n'' = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k} = \frac{An^2 + Bn + C}{2^n} + D$$

și să se calculeze $\lim_{n \to \infty} S_n'$ și $\lim_{n \to \infty} S_n''$.

iii) Fiind dat șirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$

$$a_n = ac + (a + ab)c^2 + (a + ab + ab^2)c^3 + \dots + (a + ab + \dots + ab^n)c^{n+1},$$ unde $a, b, c \in \mathbf{R}$ cu

$$|c| < 1, \quad b \neq 1, \quad |bc| < 1,$$

să se calculeze $\lim_{n \to \infty} a_n$.

18. Să se calculeze:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=m}^{n} \frac{(2k+1)^2 - an^p}{n^q},$$

unde $m < n$, p, q, m, n sînt numere naturale, iar a un parametru real.

(Fac. de matematică)

19. Se consideră șirul cu termenul general $u_n = a^{b^n}$, unde $a, b \in (0, \infty)$. Se cere:

i) să se calculeze suma:

$$E_n = \sum_{i=1}^{n} \log_{u_i} N, \quad N \in (0, \infty) \setminus \{1\}, \quad n \in \mathbf{N};$$

ii) pentru ce valori ale lui b șirul cu termenul general E_n este convergent? În acest caz să se calculeze $\lim_{n \to \infty} E_n$.

(Institutul Politehnic)

20. Fie șirul cu termenul general

$$a_k = \log_{\frac{1}{2}} \frac{k^2 + 2k}{(k+1)^2}, \quad k \in \mathbf{N}$$

și șirul cu termenul general

$$b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

i) Să se arate că $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este strict crescător și mărginit.

ii) Să se determine limita sa.

21. Fie șirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ cu termenul general

$$a_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right), \quad n \in \mathbf{N}.$$

i) Să se aducă a_n la forma cea mai simplă și să se studieze natura șirului cu termenul general a_n.

ii) Să se arate că $a_n < \frac{1}{n} - \ln 2$.

iii) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} a_n$.

22. Să se calculeze limita șirului cu termenul general

$$a_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + kn).$$

23. Se consideră șirul de termen general $a_n = \ln(1 + n) + a \ln(2 + n) + b \ln(3 + n)$, unde $a, b \in \mathbf{R}$. Se cere:

i) să se determine relația dintre numerele a și b astfel încît șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ să aibă limita zero;

ii) presupunînd $a + b + 1 = 0$, să se determine a și b astfel încît șirul cu termenul general $b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ să fie convergent și să i se determine limita.

(Institutul Politehnic)

24. Se dă ecuația $2(2a + 1)\cos^2 x + 3\cos x + 1 - a = 0$, unde a este un parametru real. Se cere:

i) să se rezolve ecuația;

ii) să se determine a astfel încît ecuația să admită soluții în intervalul $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$;

iii) fie $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu $a_n \geq 1$ un șir de numere reale, crescător, divergent. Înlocuind în ecuația inițială pe a cu a_n, să se arate că există un șir descrescător de numere $(C_n)_{n\in\mathbf{N}}$ unde C_n este o rădăcină a ecuației inițiale și $C_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Să se determine $\lim_{n\to\infty} C_n$.

(Institutul Politehnic)

25. Fie $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un șir de numere pozitive în progresie geometrică crescătoare și p un număr natural. Se cere:

i) să se arate că raportul sumelor

$$S_n = \frac{1}{a_2^p + a_1^p} + \frac{1}{a_3^p + a_2^p} + \ldots + \frac{1}{a_{n+1}^p + a_n^p}$$

$$S_n' = \frac{1}{a_2^p - a_1^p} + \frac{1}{a_3^p - a_2^p} + \ldots + \frac{1}{a_{n+1}^p - a_n^p}$$

nu depinde de n;

ii) să se determine rația progresiei date astfel ca

$$\frac{a_n}{a_{n-2} + a_{n+2}} = \frac{4}{17};$$

iii) să se calculeze $\lim_{n\to\infty} S_n$ și $\lim_{n\to\infty} S_n'$;

iv) fie $R = \frac{S_n}{S_n'}$; să se calculeze $\lim_{p\to\infty} R^p$.

(Institutul Politehnic)

26. Se consideră șirul cu termenul general

$$a_n = \frac{(n+3)^2 + 3}{n(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$$

și se cere:

i) să se arate că termenul general al șirului se poate scrie: $a_n = f(n) - f(n+1)$, unde $f(n)$ are forma: $f(n) = \frac{nA + B}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{2^n}$, unde A și B sînt constante reale, ale căror valori se vor determina, iar $n \in \mathbf{N}$.

ii) să se arate că șirul cu termenul general

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

este convergent și să i se determine limita;

iii) să se calculeze limita șirului cu termenul general

$$C_n = b_n^{n^2 n}.$$

(Institutul Politehnic)

27. Să se calculeze limita următorului șir, dat prin relația de recurență:

i) $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{4} a_{n-1}$ cu $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$.

ii) $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$ cu $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

iii) $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$ cu $a_0 = 1$, $a_1 = 0$.

iv) $a_{n+1} = \frac{\alpha}{2} + \frac{a_n^2}{2}$ cu $a_1 = \frac{\alpha}{2}$, $\alpha \in (0, 1)$.

28. Să se afle termenul general al șirului dat de relația de recurență: $a_n = a_{n-1} + 4a_{n-2} - 4a_{n-3}$, avînd condițiile inițiale: $a_0 = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 9$.

29. Se dă șirul prin relația de recurență

$$a_1 = \sqrt{a}, \quad a_n = \sqrt{a + a_{n-1}}, \quad a \in (0, \infty).$$

i) Să se studieze natura șirului $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$;

ii) dacă șirul este convergent, să se determine limita sa. Pentru ce valori ale lui a limita este un număr rațional?

(Fac. de matematică)

30. i) Să se arate că șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ în care $a_1 = \sqrt[3]{6}$ și $a_n = \sqrt[3]{6 + a_{n-1}}$ pentru $n \geqslant 2$ este convergent.

ii) Fie $a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$, $a_n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + a_{n-1}}$. Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent.

31. Se consideră șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit prin $a_1 = 3$, $a_2 = 10$, iar pentru $n \geqslant 1$ avem relația de recurență: $a_{n+2} - 7a_{n+1} + 12a_n = 6n + 1$. Se cere:

i) să se calculeze termenul general al șirului $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

ii) să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

32. Fie șirul $x_{n+1} = \alpha x_n + \frac{n^2}{2^n}$ cu $x_0 = 0$, $n \geqslant 0$. Să se determine $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel ca șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ să fie convergent.

33. Fie șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, definit prin relația de recurență $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$ și condiția inițială $x_1 = a$. Să se arate că dacă $a \in [1, 2]$, atunci șirul este convergent și să i se calculeze limita.

34. Să se studieze convergența șirului $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, îndeplinind condiția inițială $a_0 = 1$ și definit prin relația de recurență:

i) $a_{n+1} = 1 + a_n^3$; ii) $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$.

35. Fiind dat șirul cu termenii pozitivi $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit prin relația de recurență $a_{n+1}^4 = 2a_n^3 + 8$, îndeplinind condiția inițială $a_0 \in (0, 2)$. Să se demonstreze că este un șir convergent și să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

36. Fie șirurile $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ și $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definite prin relațiile de recurență:

$$a_n = a_{n-1} \cdot \cos x + \cos(n-1)x, \quad \forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$$

și $a_1 = 1$.

$$b_n = 2b_{n-1} \cos x - b_{n-2}, \quad \forall n \geqslant 3$$

și $b_1 = 1$, $b_2 = 2 \cdot \cos x$, $\sin x \neq 0$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

37. Fie numerele a_0, $b_0 (a_0 < b_0)$ date. Termenii șirurilor $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ și $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sînt dați prin formulele de recurență:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \frac{a_{n-1} + 2b_{n-1}}{3}.$$

Să se demonstreze că șirurile $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ și $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sînt convergente și tind către aceeași limită.

38. i) În $M_{3,2}(\mathbf{R})$ considerăm șirul $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit prin relația de recurență: $2 \cdot A_{n+2} = A_{n+1} + A_n$, avînd condițiile inițiale: $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 5 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 8 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

ii) În $M_{2,2}(\mathbf{R})$ considerăm șirul $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit prin relația de recurență: $6A_{n+3} = 11A_{n+2} - 6A_{n+1} + A_n$ avînd condițiile inițiale: $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

39. i) Presupunem $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Notînd $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, să se arate că dacă $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru $n > N$, unde $N \in \mathbf{N}$, atunci are loc inegalitatea $\frac{S_N}{n} - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{S_n}{n} < \frac{S_N}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$ pentru $n > N$.

ii) Să se obțină de mai sus: $-\varepsilon < \frac{S_n}{n} < \varepsilon$ pentru $n > N_1$, $N_1 \in \mathbf{N}$. Ce concluzie rezultă de aici?

iii) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ (finită) să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = L,$$

folosind observația că $a_n = L + b_n$ unde $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

iv) Să se afle $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right)$.

(Institutul Politehnic)

40. Să se determine limita următorului șir ($n \in \mathbf{N}$):

i) $a_n = \sqrt[n]{\frac{(n+1)\ldots 2n}{n}}$; ii) $a_n = \sqrt[n]{\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}}$;

iii) $a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$; iv) $a_n = \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!8^n}}$;

v) $a_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$; vi) $a_n = \sqrt[n]{\ln(n!)}$;

vii) $a_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(a+k)}$, $a > 1$.

41. Să se calculeze limita următorului șir ($p \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$):

i) $a_n = \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1}$;

ii) $a_n = \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$;

iii) $a_n = \frac{1^p + 3^p + \ldots + (2n-1)^p}{n^{p+1}}$;

iv) $a_n = \frac{\ln n}{n^p}$;

v) $a_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

vi) $a_n = \frac{1}{n}\left[\frac{a+b}{c+d} + \frac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d} + \ldots + \frac{a\sqrt{n}+b}{c\sqrt{n}+d}\right]$;

vii) $a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln n}\right)$.

REZOLVĂRI ȘI RĂSPUNSURI

1. i) Pentru a arăta că șirul este monoton vom aplica definiția monotoniei șirurilor:

$$\forall n \in \mathbf{N},\quad a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)}{3(n+1)+1} - \frac{2n}{3n+1} =$$

$$= \frac{2n+2}{3n+4} - \frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{(3n+4)(3n+1)} > 0.$$

Cum $a_{n+1} - a_n > 0 \Rightarrow a_n < a_{n+1}$ pentru $\forall n \in \mathbf{N}$, deci șirul este strict crescător.

Pentru a arăta că șirul este mărginit vom aplica definiția șirurilor mărginite:

$$a_n = \frac{2n}{3n+1} < \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}$$ (deoarece valoarea unei fracții se mărește dacă mărim numărătorul sau dacă micșorăm numitorul).

$$a_n = \frac{2n}{3n+1} > \frac{2n}{3n+n} = \frac{2n}{4n} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < a_n < \frac{2}{3} \Rightarrow a_n \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \text{ pentru } \forall n \in \mathbf{N}.$$

Conform teoremei lui K. Weierstrass, cum șirul este monoton și mărginit este convergent, deci admite o limită unică.

Aplicăm teorema de convergență cu ε: pentru $\forall \varepsilon > 0$ (oricît de mic) se poate găsi un rang dependent de ε, n_ε, astfel încît pentru toți termenii $a_n = \frac{2n}{3n+1}$ de rang $n \geq n_\varepsilon$ să avem:

$$\left|\frac{2n}{3n+1} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{-2}{3(3n+1)}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{2}{3(3n+1)} < \varepsilon.$$

Cum prima inegalitate este evidentă, deoarece un număr pozitiv este strict mai mare decît un număr negativ, atunci vom verifica a doua inegalitate, deci:

$$n > \frac{2-3\varepsilon}{9\varepsilon}.$$

Fie $\varepsilon = \frac{1}{9}$, $V_{\frac{1}{9}} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{9}; \frac{2}{3} + \frac{1}{9}\right) = \left(\frac{5}{9}; \frac{7}{9}\right)$ este o vecinătate a limitei $l = \frac{2}{3}$ și cum $n > \frac{5}{3}$, înseamnă că în vecinătatea $V_{\frac{1}{9}}$ a limitei $\frac{2}{3}$ se află toți termenii șirului, exceptînd termenii a_0 și a_1. *Verificare:*

$$a_0 = 0 \notin \left(\frac{5}{9}, \frac{7}{9}\right),\ a_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \notin \left(\frac{5}{9}; \frac{7}{9}\right);$$

$$a_2 = \frac{4}{7} \in \left(\frac{5}{9}, \frac{7}{9}\right),\ \ldots$$

Fie $\varepsilon = \frac{1}{81}$, $V_{\frac{1}{81}} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{81}; \frac{2}{3} + \frac{1}{81}\right) = \left(\frac{53}{81}; \frac{55}{81}\right)$ este o vecinătate a limitei $l = \frac{2}{3}$ și cum $n > \frac{53}{3}$, înseamnă că în vecinătatea $V_{\frac{1}{81}}$ se află termenii șirului începînd cu termenul de rangul 18; primii 18 termenii nu aparțin vecinătății. *Verificare:*

$$a_0 = 0 \notin V_{\frac{1}{81}},\ a_1 = \frac{1}{2} \notin V_{\frac{1}{81}},\ \ldots,$$

$$a_7 = \frac{7}{11} \notin V_{\frac{1}{81}},\ a_8 = \frac{16}{25} \notin V_{\frac{1}{81}};\ a_9 = \frac{9}{14} \notin V_{\frac{1}{81}},\ \ldots$$

$$a_{17} \notin V_{\frac{1}{81}},\ a_{18} = \frac{36}{55} \in V_{\frac{1}{81}}.$$

Deci, putem spune că dacă ε este suficient de mic, în afara vecinătății V_ε se află un număr mare de termeni, în număr finit, iar în cadrul vecinătății termenii devin tot mai intimi față de limita $\frac{2}{3}$, sau, altfel spus, acești termeni se „înghesuie", se „îngrămădesc" către limita $\frac{2}{3}$. Raționamentul poate continua, atribuind lui ε valorile $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{1}{300}$; $\frac{1}{3\,000}$, ...

ii) șirul este crescător și mărginit, $a_n \in (-1, 0)$.

iii) $a_n \in \left[0, \frac{\alpha}{\beta}\right]$ dacă $\alpha \geqslant 0$ și $a_n \in \left[\frac{\alpha}{\beta}; 0\right)$ dacă $\alpha \leqslant 0$; șirul este crescător dacă $\alpha \geqslant 0$ și descrescător dacă $\alpha \leqslant 0$.

iv) $a_n - a_{n+1} = \frac{n^2}{2n^2+2} - \frac{(n+1)^2}{2(n+1)^2+2} =$

$$= -\frac{2n+1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} < 0$$ deci șirul este crescător.

$$a_n = \frac{n^2}{2n^2+2} < \frac{2n^2}{2n^2+2} < \frac{2n^2+2}{2n^2+2} = 1;$$

$$a_n = \frac{n^2}{2n^2+2} > \frac{n^2}{2n^2+n^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow a_n \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$$ pentru $\forall n \in \mathbf{N}$, deci șirul este și mărginit. Conform teoremei lui K. Weierstrass, cum șirul este monoton și mărginit este un șir convergent, deci admite o limită unică

Aplicăm teorema de convergență cu ε

$$\left|\frac{n^2}{2n^2+2} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2(n^2+1)};$$ dacă $\varepsilon \geqslant \frac{1}{2} \Rightarrow \left|a_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ pentru $\forall n \in \mathbf{N}$; dacă $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ atunci $n > \sqrt{\frac{1-2\varepsilon}{2\varepsilon}}$ și de exemplu, pentru $\varepsilon = \frac{1}{1\,000}$ putem considera $n_\varepsilon = 23$.

v) $\left|\frac{2^n + (-2)^n}{3^n} - 0\right| < \frac{2^n + 2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot 2.$

Condiția ca $|a_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{\varepsilon}{2}$, deci

$$n > \frac{\lg \varepsilon - \lg 2}{\lg 2 - \lg 3}.$$

2. Pentru calcularea sumei, vom descompune termenul general într-o sumă de fracții elementare:

$$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+2}\Rightarrow\frac{1}{n(n+2)}=\frac{(A+B)n+2A}{n(n+2)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=(A+B)n+2A$$

și aplicînd metoda coeficienților nedeterminați vom obține:

$$\begin{cases}A+B=0\\2A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{2}\\B=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

deci

$$\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{1}{2\cdot 4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{1}{3\cdot 5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$$

$$\frac{1}{4\cdot 6}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right).$$

Efectuînd suma și reducînd termenii asemenea, obținem:

$$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\right]\Rightarrow\lim_{n\to\infty}2^n\left(S_n-\frac{1}{4}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}2^n\cdot\frac{1}{2^n}\left[1-\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\right]^n=e^{-2}=\frac{1}{e^2}.$$

3. Termenul general al expresiei va fi descompus într-o sumă de fracții elementare:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}.$$

Aducînd fracțiile la același numitor și aplicînd metoda coeficienților nedeterminați, obținem:

$$A=\frac{1}{2},\quad B=-1,\quad C=\frac{1}{2}.$$

Deci: $S_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}.$$

4. i) $\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\frac{A}{k^2}+\frac{B}{(k+1)^2}+\frac{C}{k}+\frac{D}{k+1}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=D=0\end{cases}\Rightarrow a_n=1-\frac{1}{(n+1)^2}\text{ deci }\lim_{n\to\infty}a_n=1.$$

ii) $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \dfrac{A}{n} + \dfrac{B}{n+1} + \dfrac{C}{n+2} + \dfrac{D}{n+3}$

$$A = -D = \frac{1}{6}, \quad B = -C = -\frac{1}{2}.$$

Însumînd cele n cvartete și reducînd termenii asemenea rezultă:

$$a_n = \frac{1}{18} - \frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}; \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{18}.$$

iii) $\dfrac{1}{(2k+1)(2k-1)} = \dfrac{A}{2k-1} + \dfrac{B}{2k+1}$, unde $\dfrac{k^2}{4k^2-1} =$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{4k^2-1+1}{4k^2-1}\right) = \ldots = \frac{1}{4}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)\right].$$

$A = -B = \dfrac{1}{2}$ și însumînd cele n cupluri vom obține:

$$a_n = \frac{n}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8(2n+1)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

iv) $a_n = \left(\dfrac{e}{\pi}\right)^n \dfrac{1 + \dfrac{1}{e} + \dfrac{1}{e^2} + \ldots + \dfrac{1}{e^{n-1}}}{1 + \dfrac{1}{\pi} + \dfrac{1}{\pi^2} + \ldots + \dfrac{1}{\pi^{n-1}}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi - 1}{e - 1} \cdot \left(\frac{e}{\pi}\right)^{n+1} \cdot \frac{-\dfrac{1}{e^n}}{1 - \dfrac{1}{\pi^n}} = 0$$ și se ține cont de $\dfrac{e}{\pi} < 1$.

v) Fracția compusă va fi descompusă într-o sumă de fracții elementare:

$$\frac{1}{k^3 + 6k^2 + 11k + 6} = \frac{A}{k+1} + \frac{B}{k+2} + \frac{C}{k+3}.$$

Aducînd la același numitor, reducînd termenii asemenea, ordonînd polinomul după puterile descrescătoare ale lui k, aplicînd metoda coeficienților nedeterminați, vom obține

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -1, \quad C = \frac{1}{2} \text{ deci:}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{n(n+5)}{12(n+2)(n+3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{12}.$$

vi) $1\cdot 4 + 2\cdot 5 + \ldots + n(n+3) = \sum_{k=1}^{n} k(k+3) =$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3\frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+5)}{3}; \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(n+1)(n+5)}{3} \cdot \frac{6}{(n+3)(n+2)(n+1)}\right] = 2.$$

vii) $\sqrt[n]{2^n + 3^n + \ldots + n^n} > \sqrt[n]{n^n} = n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$

viii) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, deoarece: $a_n > \dfrac{1}{2n} + \dfrac{2}{2n} + \ldots + \dfrac{2n}{2n} =$

$$= \frac{2n(2n+1)}{4n} = \frac{2n+1}{2} > n.$$

ix) $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{3k^2 + 3k + 1}{k^3(k+1)^3} = \sum_{k=1}^{n}\left[\dfrac{1}{k^3} - \dfrac{1}{(k+1)^3}\right] =$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)^3}; \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

x) Cum $1 \leqslant k \leqslant n \Rightarrow n^4 + 1 \leqslant n^4 + k \leqslant n^4 + n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{k^3 + k}{n^4 + n} \leqslant \frac{k^3 + k}{n^4 + k} \leqslant \frac{k^3 + k}{n^4 + 1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3 + k}{n^4 + n} \leqslant a_n \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3 + k}{n^4 + 1} \Rightarrow \frac{\sum_{k=1}^{n} k^3 + \sum_{k=1}^{n} k}{n^4 + n} \leqslant a_n \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} k^3 + \sum_{k=1}^{n} k}{n^4 + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{4(n^4+n)} \leqslant a_n \leqslant \frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{4(n^4+1)}.$$

Trecînd la limită în dubla inegalitate obținem: $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}$.

5. $S_0 = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$S_4 = \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

$$S_5 = \sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

$$S_6 = \sum_{k=1}^{n} k^6 = \frac{n(n+1)(6n^5+15n^4+6n^3-6n^2-n+1)}{42}$$

$$S_7 = \sum_{k=1}^{n} k^7 = \frac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24}.$$

Iar pentru a demonstra egalitățile de mai sus, vom dezvolta binomul sumă $(a+1)^{k+1}$ pentru S_k, apoi prin însumare

se vor reduce termenii asemenea obținînd suma S_k în funcție de sumele $S_0, S_1, \ldots, S_{k-1}$ adică:

$$(n+1)^{k+1} = C_{k+1}^1 S_k + C_{k+1}^2 S_{k-1} + \ldots + C_{k+1}^{k+1} S_0 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_k = \frac{(n+1)^{k+1} - C_{k+1}^2 S_{k-1} - \ldots - C_{k+1}^{k+1} S_0 - 1}{k+1}$$

și pentru înțelegerea mai bună a metodei de lucru, vom calcula suma S_2:

$$(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$$
$$a = 1 \Rightarrow 2^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$$
$$a = 2 \Rightarrow 3^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$$
$$a = 3 \Rightarrow 4^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1$$
$$\ldots$$
$$a = n \Rightarrow (n+1)^3 = n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1$$

și însumînd cele n dezvoltări obținem:

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3 \cdot S_2 + 3 \cdot S_1 + S_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_2 = \frac{(n+1)^3 - 1 - S_0 - 3S_1}{3} =$$

$$= \frac{(n+1)^3 - (n+1) - \frac{3}{2} n(n+1)}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Deci:

i) $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{30}$; ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{12}$;

iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{42}$; iv) $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{24}$;

v) $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

Observație: Se poate aplica teorema lui l'Hospital și pentru calcularea limitei șirurilor (în cadrul cazurilor de nedeterminare: „$\frac{0}{0}$", „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$", „$\infty - \infty$", „$0 \cdot \infty$", „$1^\infty$", „$0^0$", „$\infty^0$").

Fie $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ un șir și să presupunem că există o prelungire f a funcției φ la o semidreaptă (a, ∞) cu $a > 0$ astfel încît să existe limita $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l \in \overline{\mathbf{R}}$. Rezultă atunci că oricare ar fi șirul $x_n \to +\infty$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$. În particular, pentru șirul $x_n = n$, obținem:

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = l, \text{ dar } f(n) = \varphi(n), \forall n \in \mathbf{N}, \text{ deci}$$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = l.$$

6. i) $0,(6) = \frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \ldots + \frac{6}{10^n} + \ldots$;

$$S_n = \frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \ldots + \frac{6}{10^n} = \frac{\frac{6}{10^{n+1}} - \frac{6}{10}}{\frac{1}{10} - 1};$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{0,6}{0,9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

ii) $0,9(31) = \frac{9}{10} + \frac{31}{10^3} + \frac{31}{10^5} + \ldots + \frac{31}{10^{2n+1}} + \ldots$;

$$S_n = \frac{9}{10} + \frac{31}{10^3} + \ldots + \frac{31}{10^{2n+1}} = \frac{9}{10} + \frac{\frac{31}{10^{2n+3}} - \frac{31}{10^3}}{\frac{1}{10^2} - 1};$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{9}{10} + \frac{31}{990} = \frac{922}{990}.$$

7. $|1 - 0,99\ldots9| = \frac{1}{10^n}$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

8. i) $S_n < \frac{n}{\sqrt[p]{n^p + a}} < \frac{n}{\sqrt[p]{n^p}} = \frac{n}{n} = 1$. Cum $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este un șir de numere pozitive înseamnă că pentru $\forall n \in \mathbf{N}$, $S_n \in (0, 1)$, deci este un șir mărginit.

ii) Se poate observa că: $\frac{n}{\sqrt[p]{n^p + na}} \leqslant S_n \leqslant \frac{n}{\sqrt[p]{n^p + a}}$

sau $\frac{1}{\sqrt[p]{1 + \frac{a}{n^{p-1}}}} \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{\sqrt[p]{1 + \frac{a}{n^p}}}$, $p > 1$ și trecînd la limită în dubla inegalitate obținem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{1 + \frac{a}{n^{p-1}}}} \leqslant \lim_{n\to\infty} S_n \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{1 + \frac{a}{n^p}}};$$

$1 \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} S_n \leqslant 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$ deci $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent și are limita 1.

9. i) $u_{n+1} - u_n = n + \frac{1}{2} - 7$

deci
$$u_{n+1} - u_n > 0 \text{ pentru } n \geqslant 7$$
$$u_{n+1} - u_n < 0 \text{ pentru } n < 7$$
$$u_7 < u_8 < \ldots < u_n < u_{n+1} < \ldots$$
$$u_7 < u_6 < \ldots < u_2 < u_1$$

deci cel mai mic element al șirului este: $u_7 = -\frac{49}{2}$.

ii) $u_{n+1} - u_n = \frac{11}{6} - n$; $u_{n+1} - u_n > 0$ pentru $n < \frac{11}{6}$;

deci pentru $n = 1$; $u_{n+1} - u_n < 0$ pentru $n > \frac{11}{6}$ deci pentru $n \geqslant 2$; $u_2 > u_1$ și $u_2 > u_3 > u_4 > \ldots > u_n > \ldots$ deci $u_2 = 2,(6)$ este cel mai mare termen al șirului.

10. $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $V_m = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{V_m}{m^k} = \begin{cases} +\infty \text{ pentru } k \in \{1,2\} \\ \frac{1}{6} \text{ pentru } k = 3 \\ 0 \text{ pentru } k \geqslant 4. \end{cases}$$

11. i) $\frac{k^4+k^2+1}{k^4+k} = 1 + \frac{k^2-k+1}{k^4+k} = 1 + \frac{1}{k(k+1)} =$

$= 1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{k^4+k^2+1}{k^4+k} = \sum_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$

$= n + 1 - \frac{1}{n+1}$. Rezultă că termenul general al șirului este

$a_n = a + \frac{1}{n+1}$, șirul este strict descrescător, $a_n - a_{n-1} < 0$, și mărginit superior de $a_0 = a + 1$, deci $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

ii) Cum $|a_n - a| \leqslant 0{,}01$ rezultă că $\frac{1}{n+1} \leqslant 0{,}01 \Rightarrow$

$\Rightarrow n \geqslant 99$, deci începînd de la termenul de rangul 99, adică de la a_{99} avem $|a_n - a| \leqslant 0{,}01$.

12. i) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{8}$, $a_3 = \frac{9}{6!}$.

ii) cum $1! < n!$, $2! < n!$, ..., $(n-1)! < n! \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 < a_n < \frac{n! + n! + \ldots + n!}{(2n)!} = \frac{n \cdot n!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n(n+1)\ldots 2n} =$$

$$= \frac{n}{(n+1)\ldots 2n} < \frac{1}{n} \Rightarrow 0 < a_n < \frac{1}{n}$$

și trecînd la limită în dubla inegalitate, obținem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

13. $1 \cdot 1! = (2-1) \cdot 1! = 2! - 1!$

$2 \cdot 2! = (3-1) \cdot 2! = 3! - 2!$

$3 \cdot 3! = (4-1) \cdot 3! = 4! - 3!$

$\vdots$

$n \cdot n! = (n+1-1)n! = (n+1)! - n!$.

Însumînd cele n produse și reducînd termenii asemenea obținem:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

14. i) $a_n = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)+(n+2)(n+3)-4(n+3)+2}{(n+3)!} =$

$= \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{4}{(n+2)!} + \frac{2}{(n+3)!}$, deci $a = 1$, $b = 1$, $c = -4$, $d = 2$.

ii) $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!} - 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+2)!} +$

$+ 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+3)!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - \frac{1}{(n+1)!} - \frac{2}{(n+2)!} +$

$+ \frac{2}{(n+3)!} = \frac{5}{3} - \frac{(n-1)(n-2)}{(n+3)!}$. iii) $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{5}{3}$.

15. i) $\frac{n+k}{(n+k+1)!} = \frac{n+k+1}{(n+k+1)!} - \frac{1}{(n+k+1)!} =$

$= \frac{1}{(n+k)!} - \frac{1}{(n+k+1)!} \Rightarrow a_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(n+k)!} -\right.$

$\left. - \frac{1}{(n+k+1)!}\right] = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+2)!} -$

$- \frac{1}{(n+3)!} + \ldots + \frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{(2n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} -$

$$- \frac{1}{(2n+1)!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

ii) $\frac{1}{(k+1)!+k!} = \frac{1}{k!(k+2)} = \frac{k+1}{(k+2)!} = \frac{k+2}{(k+2)!} -$

$- \frac{1}{(k+2)!} = \frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!} \Rightarrow a_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(k+1)!} -\right.$

$\left. - \frac{k}{(k+2)!}\right] = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{(n+1)!} -$

$- \frac{1}{(n+2)!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{(n+2)!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

iii) $\dfrac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}=\dfrac{k+2}{k!(k+2)^2}=\dfrac{1}{k!(k+2)}=$

$=\dfrac{k+1}{(k+2)!}=\dfrac{k+2}{(k+2)!}-\dfrac{1}{(k+2)!}=\dfrac{1}{(k+1)!}-\dfrac{1}{(k+2)!}$

$a_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\dfrac{1}{(k+1)!}-\dfrac{1}{(k+2)!}\right]=\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{(n+2)!}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{2}$.

iv) $\sum_{k=1}^{n}k!(k^2+k+1)=\sum_{k=1}^{n}k![(k+1)^2-k]=$

$=\sum_{k=1}^{n}[k!(k+1)^2-k!\cdot k]=\sum_{k=1}^{n}[(k+1)!(k+1)-k!k]=$

$=(n+2)!-(n+1)!=(n+1)!(n+1)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=1.$

v) $\dfrac{k!}{(k+p)!}=\dfrac{1}{(p-1)}\left[\dfrac{k!}{(k+p-1)!}-\dfrac{(k+1)!}{(k+p)!}\right]$

$a_n=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{k!}{(k+p)!}=\dfrac{1}{p-1}\left[\dfrac{1}{(p-1)!}-\dfrac{1}{p!}+\dfrac{1}{p!}-\right.$

$\left.-\dfrac{2!}{(1+p)!}+\ldots+\dfrac{n!}{(n+p-1)!}-\dfrac{(n+1)!}{(n+p)!}\right]=$

$=\dfrac{1}{p-1}\left[\dfrac{1}{(p-1)!}-\dfrac{(n+1)!}{(n+p)!}\right]\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{(p-1)\cdot(p-1)!}$.

vi) $\dfrac{k}{(k+1)!}=\dfrac{k+1}{(k+1)!}-\dfrac{1}{(k+1)!}=\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+1)!}$

$\Rightarrow a_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+1)!}\right]=1-\dfrac{1}{(n+1)!}$

și deci $\lim_{n\to\infty}a_n=1$.

vii) $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a^{\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}}=a^{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}}=a.$

viii) Fie $\dfrac{k^3}{k!}=\dfrac{k(k-1)(k-2)}{k!}+\dfrac{Ak(k-1)}{k!}+\dfrac{Bk}{k!}+\dfrac{C}{k!}$ aducînd la același numitor și aplicînd metoda coeficienților nedeterminați, obținem: $A=3,\ B=1,\ C=0\Rightarrow$

$1+\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k^3}{k!}=1+\dfrac{1^3}{1!}+\dfrac{2^3}{2!}+\sum_{k=3}^{n}\dfrac{1}{(k-3)!}+3\sum_{k=3}^{n}\dfrac{1}{(k-2)!}+$

$+\sum_{k=3}^{n}\dfrac{1}{(k-1)!}=1+\dfrac{1^3}{1!}+\dfrac{2^3}{2!}+\sum_{i=0}^{n-3}\dfrac{1}{i!}+3\sum_{i=1}^{n-2}\dfrac{1}{i!}+$

$+\sum_{i=2}^{n-1}\dfrac{1}{i!}=5\left(1+\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k!}\right)+1+1+4+1-\dfrac{1}{(n-2)!}-$

$-\dfrac{1}{(n-1)!}-\dfrac{1}{n!}-\dfrac{3}{(n-1)!}-\dfrac{3}{n!}=5-1-\dfrac{1}{n!}$. Deci

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k^3}{k!}\right)=5\lim_{n\to\infty}\left(1+\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k!}\right)+1-\lim_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{(n-2)!}+\right.$

$\left.+\dfrac{4}{(n-1)!}+\dfrac{1}{n!}\right]=5e+1.$

ix) $a_n=\dfrac{n+2}{n!}+\sum_{k=3}^{n}\dfrac{k^2-k+k-2}{k!}=\dfrac{n+2}{n!}+$

$+\sum_{k=2}^{n}\left[\dfrac{1}{(k-2)!}+\dfrac{1}{(k-1)!}-\dfrac{2}{k!}\right]=\dfrac{n+2}{n!}+3-\dfrac{1}{(n-1)!}-$

$-\dfrac{2}{n!}=\dfrac{n}{n!}+\dfrac{2}{n!}+3-\dfrac{1}{(n-1)!}-\dfrac{2}{n!}=3.$

x) $\sum_{k=1}^{n}k^2(k+1)!=\sum_{k=1}^{n}[(k^2+4k+4)(k+1)!-(4k+4)\cdot$

$(k+1)!]=\sum_{k=1}^{n}[(k+2)(k+2)(k+1)!-4(k+1)(k+1)!]=$

$=\sum_{k=1}^{n}[(k+2)(k+2)!-4(k+1)(k+1)!]=\sum_{k=1}^{n}(k+2)(k+2)!-$

$-4\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+1)!=(n+3)!-6-4[(n+2)!-2]=$

$=(n-1)(n+2)!+2$, iar în calcule s-a ținut cont de

suma: $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = \sum_{k=1}^{n} (k+1-1)k! = \sum_{k=1}^{n} [(k+1)! - k!] =$

$= 2! - 1! + 3! - 2! + \ldots + (n+1)! - n! = (n+1)! - 1.$

Deci $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(n+2)! + 2}{(n+3)!} = 1.$

xi) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+2) - (k+1)}{(k+2)!} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k}{(k+1)!} - \frac{k+1}{(k+2)!} \right] =$

$= \frac{1}{2} - \frac{n+1}{(n+2)!}.$

xii) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)(k+1)^2 - k}{[(k+1)!]^2} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k-1}{(k!)^2} - \frac{k}{[(k+1)!]^2} \right] =$

$= - \frac{n}{[(n+1)!]^2}.$

16. i) $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$ — conform dezvoltării binomului lui Newton.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=0}^{n} C_n^k} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n} = 2.$$

ii) Fie șirul $\alpha_n = \prod_{k=1}^{n} C_n^k$ de termeni pozitivi, atunci

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{C_{n+1}^1 C_{n+1}^2 \ldots C_{n+1}^{n+1}}{C_n^1 \cdot C_n^2 \cdot \ldots \cdot C_n^n} =$

$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{1} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} =$

$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{n^n}{n!} \right] = e \cdot \infty = \infty,$ unde în calcule s-a aplicat formula de recurență: $C_n^k = \frac{n-k+1}{n+1} C_{n+1}^k.$

iii) Dezvoltînd relația de recurență

$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ obținem:

$C_{n-1}^k = C_{n-2}^k + C_{n-2}^{k-1}$

$C_{n-2}^k = C_{n-3}^k + C_{n-3}^{k-1}$

. . . . . .

$C_{k+1}^k = C_k^k + C_k^{k-1}$

$C_k^k = C_{k-1}^{k-1} = 1.$ Adunînd cele $n-k+1$ egalități, după reducerea termenilor asemenea, obținem:

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{k-1}^{k-1} \text{ deci } \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

iv) Considerăm egalitatea: $(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}$. Dezvoltînd după binomul lui Newton, înmulțind termenii din membrul stîng și identificînd coeficientul lui x^k din cei doi membrii, obținem:

$$C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k C_m^0 = C_{n+m}^k.$$

Dacă considerăm $k = n = m$ și ținem cont de formula combinărilor complementare

$C_n^k = C_n^{n-k}$, vom obține: $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$, deci $\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$

v) Ca și în exercițiul precedent, calculînd coeficientul lui x^k din egalitatea $(1-x)^n(1+x)^n = (1-x^2)^n$ obținem:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot (C_n^k)^2 = \begin{cases} 0 \text{ pentru } n \text{ impar} \\ (-1)^k \cdot C_{2k}^k \text{ pentru } n \text{ par} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{pentru } n - \text{impar} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{pentru } n - \text{par.} \end{cases}$$

vi) $\sum_{k=2}^{n} (C_n^2)^2 = \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{k(k-1)}{2} \right]^2 = \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{n} (k^4 - 2k^3 + k^2) =$

$= \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{n} k^4 - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} k^3 + \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{n} k^2 = \frac{n(n^2-1)(3n^2-2)}{60},$

iar $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{60}.$

vii) Se consideră binomul $(1+i)^n$ care se dezvoltă după formula binomului lui Newton și după formula lui Moivre:

$$(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k i^k = C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots + i(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \ldots).$$

$$(1+i)^n = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

Identificînd părțile reale și cele imaginare ale celor două relații obținem:

$$C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 \ldots = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \cos\frac{n\pi}{4}$$

$$C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \ldots = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \sin\frac{n\pi}{4}, \text{ deci } \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

viii) $3^n = (2+1)^n = 2^n + C_n^1 2^{n-1} + C_n^2 \cdot 2^{n-2} + \ldots$

$$1 = (2-1)^n = 2^n - C_n^1 2^{n-1} + C_n^2 2^{n-2} - \ldots$$

$$\frac{3^n+1}{3^n-1} = \frac{2(2^n + C_n^2 \cdot 2^{n-2} + C_n^4 \cdot 2^{n-4} + \ldots)}{2(C_n^1 2^{n-1} + C_n^3 2^{n-3} + C_n^5 2^{n-5} + \ldots)} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n+1}{3^n-1} = 1.$$

ix) Pornind de la identitatea

$$(1+i\sqrt{2})^{6n} = [(1+i\sqrt{2})^2]^{3n} = (-1+2\sqrt{2}\,i)^{3n}$$

și dezvoltînd după binomul lui Newton obținem:

$$(1+i\sqrt{2})^{6n} = 1 - 2C_{6n}^2 + 4\cdot C_{6n}^4 - \ldots + i\sqrt{2}\,(C_{6n}^1 - 2C_{6n}^3 + 4C_{6n}^5 - \ldots), \text{ iar}$$

$$(-1+2\sqrt{2}\,i)^{3n} = -1 + 8C_{3n}^2 - 64C_{3n}^4 + \ldots + i\sqrt{2}\,(2C_{3n}^1 - 16C_{3n}^3 + 128C_{3n}^5 - \ldots)$$

și identificînd părțile imaginare obținem: $C_{6n}^1 - 2C_{6n}^3 + 4C_{6n}^5 - \ldots = 2(C_{3n}^1 - 8C_{3n}^3 + 64C_{3n}^5 - \ldots)$ deci $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

x) Fie $S_n = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$ sau

$$S_n = C_n^{n-1} + 2C_n^{n-2} + 3C_n^{n-3} + \ldots + nC_n^0$$

unde în calcule am aplicat formula combinărilor complementare $C_n^k = C_n^{n-k}$. Adunînd cele două șiruri de sume obținem:

$$2S_n = n(C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n) = n\cdot 2^n \Rightarrow S_n = n\cdot 2^{n-1}.$$

Fie $S_n' = 1 + \frac{1}{2}C_n^1 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{1}{n+1}(C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+1}^{n+1}) = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$ unde în calcule s-a ținut cont de relația de recurență $C_n^k = \frac{n+1-k}{n+1}C_{n+1}^k \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n-k+1}C_n^{n-k} = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^k.$$

$$\text{Deci } \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot 2^{n-1}}{\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)} = \infty.$$

xi) Fie $S = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin kx$ și $C = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos kx$. Calculăm

$$C + iS = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\cos kx + i\sin kx) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\cos x + i\sin x)^k =$$

$$= [1 + (\cos x + i\sin x)]^n = (1 + \cos x + i\sin x)^n =$$

$$= \left[2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}\right)\right]^n = 2^n \cdot \cos^n\frac{x}{2}\left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right),$$

unde în calcule s-a aplicat dezvoltarea binomului lui Newton și formula lui Moivre. Identificînd cele două sume obținem:

$$S = 2^n \cdot \cos^n\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{nx}{2} \text{ și}$$

$$C = 2^n \cdot \cos^n\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{nx}{2}.$$

Deci $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

xii) Folosim egalitatea $(1+x)^{n-1}\cdot(1+x)^n=(1+x)^{2n-1}$.
Dezvoltînd binoamele obținem:

$$(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1x+C_{n-1}^2x^2+\dots)(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\dots)=$$
$$=C_{2n-1}^0+C_{2n-1}^1x+C_{2n-1}^2x^2+C_{2n-1}^3x^3+\dots.$$

Coeficientul lui x^k este:

$$C_{n-1}^k\cdot C_n^0+C_{n-1}^{k-1}\cdot C_n^1+C_{n-1}^{k-2}\cdot C_n^2+C_{n-1}^{k-3}\cdot C_n^3+\dots=C_{2n-1}^k.$$

Înlocuind relația de recurență

$$C_{n-1}^k=\frac{n-k}{n}\cdot C_n^k \text{ obținem:}$$

$$\frac{n-k}{n}\cdot C_n^k\cdot C_n^0+\frac{n-k+1}{n}\cdot C_n^{k-1}C_n^1+\frac{n-k+2}{n}C_n^{k-2}\cdot C_n^2+$$
$$+\frac{n-k+3}{n}\cdot C_n^{k-3}\cdot C_n^3+\dots=C_{2n-1}^k.$$

Pentru $k=n$ obținem:

$$\frac{0}{n}\cdot C_n^n\cdot C_n^0+\frac{1}{n}\cdot C_n^{n-1}\cdot C_n^1+\frac{2}{n}\cdot C_n^{n-2}\cdot C_n^2+\frac{3}{n}\cdot C_n^{n-3}\cdot C_n^3+$$
$$+\dots=C_{2n-1}^n$$

și aplicînd formula combinărilor complementare $C_n^k=C_n^{n-k}$ obținem:

$$\frac{1}{n}\cdot(C_n^1)^2+\frac{2}{n}(C_n^2)^2+\frac{3}{n}(C_n^3)^2+\dots=C_{2n-1}^n\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1\cdot(C_n^1)^2+2\cdot(C_n^2)^2+3\cdot(C_n^3)^2+\dots=n\cdot C_{2n-1}^n=$$
$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=1.$$

xiii) $\sum_{k=3}^{n}C_k^2:C_k^3=\sum_{k=3}^{n}\frac{k^2(k-1)^2(k-2)}{12}$, iar termenul general îl vom descompune într-o sumă de forma:

$$k^2(k-1)^2(k-2)=Ak(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)+$$
$$+Bk(k-1)(k-2)(k-3)+Ck(k-1)(k-2)+Dk(k-1)+Ek.$$

Pentru $k=1\Rightarrow E=0$
$k=2\Rightarrow D=0$
$k=3\Rightarrow C=6$
$k=4\Rightarrow B=6$
$k=0\Rightarrow A=1$, coeficienți care înlocuiți în relația precedentă vor determina:

$$\frac{k^2(k-1)^2(k-2)}{12}=\frac{10}{5!}k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)+$$
$$+\frac{12}{4!}k(k-1)(k-2)(k-3)+\frac{3}{3!}k(k-1)(k-2)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_k^2C_k^3=10C_k^5+12C_k^4+3C_k^3\Rightarrow$$
$$\sum_{k=3}^{n}C_k^2C_k^3=10\sum_{k=5}^{n}C_k^5+12\sum_{k=4}^{n}C_k^4+3\sum_{k=3}^{n}C_k^3,$$

iar ținînd cont de relația: $\sum_{k=p}^{n}C_k^p=C_{n+1}^{p+1}$ obținem:

$\sum_{k=3}^{n}C_k^2C_k^3=10\cdot C_{n+1}^6+12C_{n+1}^5+3\cdot C_{n+1}^4$ și $\lim_{n\to\infty}a_n=1$.

17. i) $a_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\dots+\frac{1}{3^n}+$
$+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\dots+\frac{1}{3^n}+$
$+\frac{1}{3^3}+\dots+\frac{1}{3^n}+$
$\dots\dots\dots\dots\dots$
$+\frac{1}{3^n}=$

$$=\frac{\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-1}+\frac{\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{3^2}}{\frac{1}{3}-1}+\dots+\frac{\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{3^{n-1}}}{\frac{1}{3}-1}+\frac{1}{3^n}=$$

$$=-\frac{3}{2}\left(\frac{n-1}{3^{n+1}}-\frac{\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-1}\right)+\frac{1}{3^n}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{4}.$$

ii) Pentru $n=1\Rightarrow S_1'=\frac{1}{2}=\frac{A+B}{2}+C$

$$n=2\Rightarrow S_2'=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}=\frac{A\cdot 2+B}{2^2}+C \Rightarrow$$

$$n=3\Rightarrow S_3'=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}=\frac{A\cdot 3+B}{2^3}+C$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+2C=1 \\ 2A+B+4C=4 \\ 3A+B+8C=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=-2 \\ C=2 \end{cases} \Rightarrow S_n'=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}=$$

$$=2-\frac{n+2}{2^n}.$$

Pentru $n=1\Rightarrow S_1''=\frac{1}{2}=\frac{A+B+C}{2}+D$

$$n=2\Rightarrow S_2''=\frac{1}{2}+\frac{4}{4}=\frac{4A+2B+C}{2^2}+D$$

$$n=3\Rightarrow S_3''=\frac{1}{2}+\frac{4}{4}+\frac{9}{8}=\frac{9A+3B+C}{2^3}+D$$

$$n=4\Rightarrow S_4''=\frac{1}{2}+\frac{4}{4}+\frac{9}{8}+\frac{16}{16}=\frac{16A+4B+C}{2^4}+$$

$$+D\Rightarrow A=-1,\ B=-4,\ C=-6,\ D=6\Rightarrow$$

$$S_n''=6-\frac{n^2+4n+6}{2^n}.$$

iii) $a_n=ac[1+(1+b)c+(1+b+b^2)c^2+\ldots+$

$$+(1+b+\ldots+b^n)c^n]=ac\left[\frac{1-b}{1-b}+\frac{1-b^2}{1-b}c+\frac{1-b^3}{1-b}c^2+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{1-b^{n+1}}{1-b}c^n\right]=\frac{ac}{1-b}[1+c+c^2+\ldots+c^n-b(1+bc+$$

$$+b^2c^2+\ldots+b^nc^n)]=\frac{ac}{1-b}\left[\frac{1-c^{n+1}}{1-c}-b\cdot\frac{1-(bc)^{n+1}}{1-bc}\right],$$

unde în calcule s-a ţinut cont de formula sumei a n-termeni

în progresie geometrică: $S_n=a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$ (q — fiind raţia progresiei, iar a_1 — primul termen).

Cum din ipoteză $|c|<1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}c^{n+1}=0$ şi cum

$$|bc|<1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}(bc)^{n+1}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{ac}{1-b}\left[\frac{1}{1-c}-\frac{b}{1-bc}\right].$$

18. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{4\left[\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right]+\ldots+\frac{4}{2}(n^2+n)+\ldots+n-\ldots-an^p}{n^q}=$

$$=\begin{cases} \left.\begin{array}{rl} \frac{4}{3} & ,\ q=3 \\ 0 & ,\ q>3 \\ +\infty & ,\ q<3 \end{array}\right\} \text{pentru } p<3 \\ \left.\begin{array}{rl} \frac{4}{3}-a, & q=3 \\ 0 & ,\ q>3 \\ \operatorname{sign}\left(\frac{4}{3}-a\right)\infty & ,\ q<3 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{pentru } p=3 \\ a\neq\frac{4}{3}\end{array} \\ \left.\begin{array}{rl} -a & ,\ q=p \\ 0 & ,\ q>p \\ (-\operatorname{sign} a)\cdot\infty & ,\ q<p \end{array}\right\} \text{pentru } p>3 \\ \left.\begin{array}{rl} 4 & ,\ q=2 \\ 0 & ,\ q>2 \\ +\infty & ,\ q<2 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{pentru } p=3 \\ a=\frac{4}{3}.\end{array} \end{cases}$$

19. i) Fie $N\neq 1$ şi $N>0$

$$E_n=\sum_{i=1}^{n}\log_{u_i}N=\sum_{i=1}^{n}\log_{a^{b^i}}N=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b^i}\log_a N=$$

$$=\log_a N\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b^i}=\log_a N\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1-\frac{1}{b^n}}{1-\frac{1}{b}}=\frac{1-b^n}{1-b}\cdot\frac{1}{b^n}\cdot\log_a N.$$

ii) Șirul $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent dacă progresia geometrică $1+\frac{1}{b}+\frac{1}{b^2}+\ldots+\frac{1}{b^n}+\ldots$ este convergentă, fapt ce are loc dacă $b>1\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b^n}=0$. Deci

$$\lim_{n\to\infty} E_n = -\frac{1}{1-b}\cdot \log_a N.$$

20. i) $b_{n+1}=a_{n+1}+b_n \Rightarrow b_{n+1}-b_n=a_{n+1}$

$a_{n+1}=\log_{\frac{1}{2}}\frac{n^2+4n+3}{n^2+4n+4}$ și cum $0<\frac{n^2+4n+3}{n^2+4n+4}<1$ (din monotonia funcției logaritmice) atunci $a_{n+1}>0$ și $b_{n+1}-b_n>0$ deci șirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict crescător.

Cum b_n este o sumă de logaritmi, deducem că

$$b_n=\log_{\frac{1}{2}}\frac{n+2}{2n+2}>0,$$

dar $\frac{n+2}{2n+2}>\frac{1}{2}$ și ținînd cont de monotonia funcției logaritmice cu baza subunitară, deducem:

$\log_{\frac{1}{2}}\frac{n+2}{2n+2}<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1$, deci $b_n<1$ și $b_n>0$ pentru orice n natural, deci $b_n\in(0,\ 1)$.

ii) Evident, șirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent și

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\log_{\frac{1}{2}}\left[\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(2+\frac{2}{n}\right)}\right]=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1.$$

21. i) $a_n=\sum\limits_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\ln\prod\limits_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=$

$$=\ln\left[\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\right)\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}\right)\right]=\ln\frac{n+1}{2n};$$

$a_{n+1}=\ln\frac{n+2}{2(n+1)}$; $a_{n+1}-a_n=\ln\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}<0$

(conform monotoniei funcției logaritmice cu baza supraunitară și numărul pozitiv și subunitar), deci șirul este strict descrescător.

Șirul este mărginit inferior, deoarece:

$$\frac{n+2}{2(n+1)}>\frac{1}{2}\Rightarrow \ln\frac{1}{2}<a_{n+1}.$$

Cum șirul este monoton și mărginit atunci este convergent.

ii) $a_n=\ln\frac{1}{2}+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; cum $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e\Rightarrow a_n<\frac{1}{n}-\ln 2$.

iii) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\ln\left[\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2n}\right]=\ln\frac{1}{2}$.

22. $0\leqslant a_n=\frac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+kn)=\frac{1}{n^3}\ln\prod\limits_{k=1}^{n}(1+kn)\leqslant$

$\leqslant\frac{1}{n^3}\ln\prod\limits_{k=1}^{n}(1+n^2)=\frac{1}{n^3}\ln(1+n^2)^n=\frac{1}{n^2}\ln(1+n^2)\leqslant$

$\leqslant\frac{1}{n^2}\ln(1+n)^2=\frac{2}{n^2}\ln(1+n)\leqslant\frac{2}{n^2}(1+n)=\frac{2n+2}{n^2}<$

$<\frac{2n+n}{n^2}=\frac{3}{n}\Rightarrow 0\leqslant a_n\leqslant\frac{3}{n}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ (conform teoremei de trecere la limită în dubla inegalitate).

23. i) $a_n=\ln(1+n)(2+n)^a(3+n)^b=$

$=\ln\left[n^{1+a+b}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)^a\left(1+\frac{3}{n}\right)^b\right]=\ln n^{1+a+b}+$

$+\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)^a\left(1+\frac{3}{n}\right)^b\right]=(1+a+b)\ln n+$

$+\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)^a\left(1+\frac{3}{n}\right)^b\right]$ și trecînd la limită vom obține: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=(1+a+b)\lim\limits_{n\to\infty}\ln n+$

$$+\lim_{n\to\infty}\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)^a\left(1+\frac{3}{n}\right)^b\right]=$$

$$=(1+a+b)\lim_{n\to\infty}\ln n+\ln 1=(1+a+b)\lim_{n\to\infty}\ln n.$$

Şirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ nu poate avea limita nulă decît în cazul în care $a+b+1=0$.

ii) Dezvoltînd şirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vom obţine:

$$\begin{aligned} b_n &= \ln 2 + a\ln 3 + b\ln 4 + \\ &+ \ln 3 + a\ln 4 + b\ln 5 + \\ &+ \ln 4 + a\ln 5 + b\ln 6 + \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \ln(1+n) + a\ln(2+n) + b\ln(3+n) = \\ &= \ln 2 + (a+1)\ln 3 + (a+b+1)\ln 4 + \\ &+ (a+b+1)\ln 5 + \ldots + (a+b+1)\ln(n+1) + \\ &+ (a+b)\ln(2+n) + b\ln(3+n). \end{aligned}$$

Suma s-a efectuat în aşa manieră încît să apară factorul $a+b+1$, care din enunţ este egal cu zero, deci:

$$b_n = \ln 2 + (a+1)\ln 3 + (a+b)\ln(2+n) + b\ln(3+n).$$

$$b_n = \ln 2 + (a+1)\ln 3 + \ln[(2+n)^{a+b}(3+n)^b] = \ln 2 +$$

$$+ (a+1)\ln 3 + \ln\left[n^{a+2b}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{a+b}\left(1+\frac{3}{n}\right)^b\right] = \ln 2 +$$

$$+ (a+1)\ln 3 + (a+2b)\ln n + \ln\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{a+b}\cdot\left(1+\frac{3}{n}\right)^b\right].$$

Şirul este convergent dacă $a+2b=0$. Rezolvînd sistemul vom obţine:

$$\begin{cases} a+b+1=0 \\ a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$$

şi termenul general al şirului $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ va fi:

$$b_n = \ln 2 - \ln 3 + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{3}{n}\right) =$$

$$= \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}}.$$

Trecînd la limită vom obţine: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ln\frac{2}{3}$.

24. i) Rădăcinile ecuaţiei de gradul doi în $\cos x$ sînt:

$$\cos x = \frac{-3\pm(4a-1)}{4(2a+1)} \Rightarrow \begin{cases} \cos x_1 = \dfrac{a-1}{2a+1} \\ \cos x_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_1 \in \left\{\pm\arccos\frac{a-1}{2a+1} + 2k\pi \,\middle|\, k\in\mathbf{Z}\right\} \text{ dacă } -1\leqslant\frac{a-1}{2a+1}\leqslant 1$$

adică $a\in(-\infty,-2]\cup[0,\infty)$ şi

$$x_2 \in \left\{\pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \,\middle|\, k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

ii) Pentru ca ecuaţia să admită soluţii în intervalul $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ trebuie ca:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\frac{a-1}{2a+1}\leqslant 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a-1}{2a+1}-1\leqslant 0 \\ \dfrac{a-1}{2a+1}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\in(\infty,-2]\cup\left(-\dfrac{1}{2};\infty\right) \\ a\in\left[\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2},-\dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\in\left[\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2},-2\right].$$

iii) Pentru orice $a_n\geqslant 1$ avem $\frac{a_n-1}{2a_n+1}\geqslant 0$ deci există o valoare $x=C_n$ cu $C_n\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Fie $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $a_n\geqslant 1$ un şir monoton divergent.

Şirul $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu $u_n=\cos C_n=\frac{a_n-1}{2a_n+1}$ este monoton crescător.

Din inegalitatea $\frac{a_{n+1}-1}{2a_{n+1}+1} > \frac{a_n-1}{2a_n+1}$ putem afirma:

$$(2a_n+1)(a_{n+1}-1) > (2a_{n+1}+1)(a_n-1)$$

sau $2a_na_{n+1} + a_{n+1} - 1 - 2a_n > 2a_na_{n+1} + a_n - 1 - 2a_{n+1}$ sau $3(a_{n+1}-a_n) > 0 \Rightarrow a_n < a_{n+1}$ deci şirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este monoton crescător.

Şirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit superior de $\frac{1}{2}$, deci este convergent. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n-1}{2a_n+1} = \frac{1}{2}.$$

Deci, şirul $(\cos C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este monoton crescător şi are limita $\frac{1}{2}$, prin urmare pentru $C_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir monoton descrescător cu limita $\frac{\pi}{6}$.

25. i) Cum progresia este crescătoare: $r > 1$ şi conform relaţiilor de recurenţă obţinem:
$a_2 = ra_1, \ldots, a_{n+1} = ra_n = r^n a_1$, deci $a_2^p + a_1^p = a_1^p(1+r^p), \ldots$, $a_{n+1}^p + a_n^p = a_n^p(1+r^p)$; $a_2^p - a_1^p = a_1(r^p-1), \ldots, a_{n+1}^p - a_n^p = a_n^p(r^p-1)$; $S_n = \frac{1}{1+r^p}\left(\frac{1}{a_1^p} + \frac{1}{a_2^p} + \ldots + \frac{1}{a_n^p}\right)$;

$$S_n' = \frac{1}{r^p-1}\left(\frac{1}{a_1^p} + \frac{1}{a_2^p} + \ldots + \frac{1}{a_n^p}\right) \Rightarrow \frac{S_n}{S_n'} = \frac{r^p-1}{r^p+1},$$

deci raportul nu depinde de n.

ii) $a_{n+2} = r^2 a_n$, $a_{n-2} = r^{-2}a_n$; $\frac{1}{r^2 + \frac{1}{r^2}} = \frac{4}{17} \Rightarrow 4r^4 - 17r^2 + 4 = 0$. Soluţiile ecuaţiei bipătrate vor fi:

$$r_1' = 2, \ r_1'' = -2, \ r_2' = \frac{1}{2}, \ r_2'' = -\frac{1}{2},$$

iar soluţia care verifică enunţul problemei este: $r = 2$.

iii) $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+r^p}\left(\frac{1}{a_1^p} + \frac{1}{a_2^p} + \ldots + \frac{1}{a_n^p}\right) =$

$$= \frac{1}{1+r^p} \cdot \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{a_1^p} + \frac{1}{a_1^p \cdot r^p} + \ldots + \frac{1}{a_1^p r^{(n-1)p}}\right] =$$

$$= \frac{1}{1+r^p} \cdot \frac{1}{a_1^p} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{r^p} + \frac{1}{r^{2p}} + \ldots + \frac{1}{r^{(n-1)p}}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+r^p} \cdot \frac{1}{a_1^p} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{r^{np}}}{1 - \frac{1}{r^p}} = \frac{1}{1+r^p} \cdot \frac{1}{a_1^p} \cdot \frac{r^p}{r^p-1} \cdot$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{r^{np}}\right) = \frac{1}{a_1^p} \cdot \frac{r^p}{r^{2p}-1}.$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n' = \frac{1}{r^p-1} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1^p} + \frac{1}{a_2^p} + \ldots + \frac{1}{a_n^p}\right) =$$

$$= \frac{1}{r^p-1} \cdot \frac{1}{a_1^p} \cdot \frac{r^p}{r^p-1}$$

unde valoarea limitei s-a determinat analog ca în prima limită.

iv) $R^p = \left[\frac{S_n}{S_n'}\right]^p = \left(\frac{r^p-1}{r^p+1}\right)^p = \left(1 - \frac{2}{r^p+1}\right)^p \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{p\to\infty} R^p = \lim_{p\to\infty}\left(1 - \frac{2}{r^p+1}\right)^p =$$

$$= \lim_{p\to\infty}\left[\left(1 - \frac{2}{r^p+1}\right)^{\frac{r^p+1}{-2}}\right]^{\frac{-2p}{r^p+1}} = e^{\lim_{p\to\infty} \frac{-2p}{r^p+1}} = e^0 = 1.$$

Pentru determinarea limitei:

$\lim_{p\to\infty} \frac{2p}{r^p+1} = 0$ se va aplica, de exemplu, teorema lui

l'Hospital sau se poate aplica proprietatea de trecere la limita în inegalități (sau *proprietatea cleștelui*) și anume:

$$0 < \frac{2p}{r^p+1} = \frac{2p}{[1+(r-1)]^p+1} =$$

$$= \frac{2p}{1+C_p^1(r-1)+C_p^2(r-1)^2+\ldots+C_p^p(r-1)^p+1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2p}{2+p(r-1)+\frac{p(p-1)}{2}(r-1)^2} < \frac{4}{(p-1)(r-1)^2}.$$

Trecînd la limită pentru $p \to \infty$ în dubla inegalitate, vom obține valoarea limitei 0.

26. i) $f(n)=\frac{nA+B}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{2^n}$, $f(n+1)=\frac{(n+1)A+B}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$,

deci $f(n)-f(n+1)=\frac{(n+3)^2+3}{n(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$.

Efectuînd diferența și egalînd numărătorii obținem:

$$2(n+2)(nA+B)-n(n+1)A-nB=(n+3)^2+3.$$

Aplicînd metoda coeficienților nedeterminați, după ce polinomul a fost ordonat descrescător după puterile lui n, obținem sistemul:

$$\begin{cases} A=1 \\ B+3A=6 \\ 4B=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=3 \end{cases}$$

deci $a_n=\frac{n+3}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{2^n}-\frac{n+4}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$.

ii) $b_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+\ldots+a_n=$

$$=\frac{4}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{5}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{5}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2^2}-\frac{6}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{2^3}+\ldots+$$

$$+\frac{n+3}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{2^n}-\frac{n+4}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Reducînd termenii asemenea obținem:

$$b_n=1-\frac{n+4}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{2^{n+1}},\ \text{iar}\ \lim_{n\to\infty}b_n=1.$$

iii) $C_n=b_n^{n\cdot 2^n}=\left[1-\frac{n+4}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\right]^{n\cdot 2^n}$ și organizînd expresia după forma numărului e obținem:

$$\lim_{n\to\infty}C_n=e^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

27. i) Vom determina expresia termenului general de forma:

$$a_n=\alpha u^n+\beta v^n$$

unde constantele α și β vor fi determinate din condițiile inițiale, iar u, v vor fi soluțiile ecuației caracteristice asociate. Înlocuind pe a_n vom obține:

$$\alpha u^{n+1}+\beta v^{n+1}=\alpha u^n+\beta v^n-\frac{1}{4}(\alpha u^{n-1}+\beta v^{n-1})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha u^{n-1}\left(u^2-u+\frac{1}{4}\right)+\beta v^{n-1}\left(v^2-v+\frac{1}{4}\right)=0,$$

iar ecuația caracteristică asociată este:

$$x^2-x+\frac{1}{4}=0\Rightarrow x_1=x_2=\frac{1}{2}\Rightarrow u=v=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n=\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^n+\beta\left(\frac{1}{2}\right)^n=(\alpha+\beta)\cdot\frac{1}{2^n}.$$

Conform condițiilor inițiale avem:

$$\begin{cases} a_0=\alpha+\beta=1 \\ a_1=\alpha\dfrac{1}{2}+\beta\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2} \end{cases}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

ii) Ecuația caracteristică asociată este:

$x^2-2x+1=0\Rightarrow x_1=x_2=1$, iar forma termenului general este: $a_n=\alpha\cdot 1^n+\beta\cdot 1^n=\alpha+\beta\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$.

iii) Ecuația caracteristică asociată este:

$x^2 = \frac{x+1}{2} \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{1}{2}$, iar termenul general îl vom considera ca fiind: $a_n = \alpha \cdot 1^n + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Impunînd condițiile inițiale obținem:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha + \beta = 1 \\ a_1 = \alpha - \frac{1}{2}\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}.$$

iv) Șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este crescător — se demonstrează prin inducție.

Cum $a_1 = \frac{\alpha}{2} < 1$,

$$a_2 = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{8} < 1$$

$$a_3 = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{8} + \frac{\alpha^3}{16} + \frac{\alpha^4}{128} < 1$$

se demonstrează prin inducție că șirul este mărginit, deoarece $a_n < 1$ pentru $\forall n \in \mathbf{N}$.

Cum șirul este monoton și mărginit este convergent, deci are o limită unică; această limită nu se modifică dacă înlăturăm un număr finit dintre termeni, deci $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = l$.

Trecînd la limită în relația de recurență obținem:

$$l = \frac{\alpha}{2} + \frac{l^2}{2} \Rightarrow l^2 - 2l + \alpha = 0 \Rightarrow l = 1 - \sqrt{1-\alpha}$$

deoarece șirul este mărginit superior de 1.

28. Vom considera termenul general de forma: $a_n = n_1 \cdot T_1^n + n_2 T_2^n + n_3 T_3^n$, unde n_1, n_2, n_3 vor fi determinați folosind condițiile inițiale, iar T_1, T_2, T_3 vor fi soluțiile ecuației caracteristice asociate. Ecuația caracteristică asociată relației de recurență este: $T^3 - T^2 - 4T + 4 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow T_1 = 1, T_2 = -T_3 = -2$, deci $a_n = n_1 T_1^n + n_2 T_2^n + n_3 T_3^n =$ $= n_1 + n_2 \cdot 2^n + n_3(-2)^n$, unde coeficienții n_1, n_2, n_3 vor fi determinați cu ajutorul condițiilor inițiale.

$$\begin{cases} a_0 = n_1 + n_2 + n_3 = 3 \\ a_1 = n_1 + 2n_2 - 2n_3 = 1 \\ a_2 = n_1 + 4n_2 + 4n_3 = 9 \end{cases}$$

și rezolvînd sistemul obținem: $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, deci termenul general al șirului este: $a_n = 1 + [1 + (-1)^n] \cdot 2^n =$

$$= \begin{cases} 1 & \text{pentru } n \text{ impar} \\ 1 + 2^{n+1} & \text{pentru } n \text{ par.} \end{cases}$$

29. i) Conform relației de recurență avem:

$$a_1 = \sqrt{a},\ a_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}},\ a_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}},\ \ldots$$

pentru a studia monotonia șirului vom folosi metoda inducției complete:

$a_1 < a_2 \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{a + \sqrt{a}} \Rightarrow a < a + \sqrt{a} \Rightarrow 0 < \sqrt{a}$, evident.

$a_2 < a_3 \Rightarrow a_2^2 < a_3^2 \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{a + \sqrt{a}} \Rightarrow 0 < \sqrt{a}$, evident.

Presupunem adevărat: $a_{n-2} < a_{n-1}$ și vom demonstra că $a_{n-1} < a_n$:

$a_n = \sqrt{a + a_{n-1}} \Rightarrow a_n^2 = a + a_{n-1}$; $a_{n-1} = \sqrt{a + a_{n-2}} \Rightarrow a_{n-1}^2 =$ $= a + a_{n-2}$; $a_n^2 - a_{n-1}^2 = a_{n-1} - a_{n-2}$, dar $a_{n-1} - a_{n-2} > 0$ din pasul precedent, deci $a_n^2 - a_{n-1}^2 > 0 \Rightarrow (a_n - a_{n-1})(a_n + a_{n-1}) > 0$, dar cum a_n, a_{n-1} sînt numere pozitive $\Rightarrow a_n - a_{n-1} > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a_{n-1} < a_n$ deci șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este monoton crescător.

Pentru a demonstra mărginirea șirului, vom scrie:

$a_n = \sqrt{a + a_{n-1}} \Rightarrow a_n^2 = a + a_{n-1} < a + a_n$ deci $a_n^2 - a_n - a < 0$; dacă vom rezolva inecuația obținem

$$a_n^2 - a_n - a = 0 \Rightarrow a_n = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2};$$

$a_n \in \left(\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}, \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right)$, dar cum $a_n > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n \in \left(0, \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right)$ evident pentru orice element al

șirului $\Rightarrow 0 < a_n < \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ deci șirul este mărginit.

Fiind monoton crescător și mărginit șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent pentru oricare ar fi $a > 0$.

ii) Din egalitatea: $a_{n+1}^2 = a + a_n$ și ținînd cont de propoziția care afirmă: dacă unui șir convergent i se adaugă sau i se scad un număr finit de termeni, limita sa nu se modifică, adică $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+p}$, unde k și p sînt numere întregi, pozitive, putem spune că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1} = S$ (evident înlăturîndu-se un termen) deci $S^2 = a + S \Rightarrow$

$\Rightarrow S^2 - S - a = 0$ cu $S > 0$ deci $S = \frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. Se observă că limita este rațională dacă $\sqrt{1+4a} = k$ unde $k \in \mathbf{Q} \Rightarrow 1 + 4a = k^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \frac{k^2-1}{4}$, $k > 1$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1+k}{2}$.

30. i) Șirul este strict crescător. Șirul este mărginit, deoarece pentru orice n natural $a_n \in [a_1, 2]$, deci șirul este convergent și fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Cum șirul este convergent, atunci dacă înlăturăm sau adăugăm un număr finit de termeni, limita sa nu se modifică; vom trece la limită în egalitate, deci: $l = \sqrt[3]{6+l} \Rightarrow l = 2$.

ii) Cum $\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$ și $\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}, \ldots, \cos\frac{\pi}{2^{n+1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} = 2a_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}\cos 0 = \frac{1}{2}.$$

31. i) Formăm ecuația caracteristică asociată șirului de forma $b_{n+2} - 7b_{n+1} + 12b_n = 0$ și înlocuind pe b_n cu r^n obținem: $r^2 - 7r + 12 = 0 \Rightarrow r_1 = 3$, $r_2 = 4$; $a_n = n_1 \cdot r_1^n + n_2 \cdot r_2^n =$
$= n_1 \cdot 3^n + n_2 \cdot 4^n$.

Să determinăm acum termenul general de forma $b_n' = a_0'n^k + a_1'n^{k-1} + \ldots + a_k'$ care satisface relația:

$b_{n+2}' - 7b_{n+1}' + 12b_n' = 6n + 1$ iar $a_0' = a_1' = \ldots = a_{k-2}' = 0$

și considerînd pe $b_n' = \alpha n + \beta$ rezultă:

$[\alpha(n+2)+\beta] - 7[\alpha(n+1)+\beta] + 12(\alpha n + \beta) = 6n + 1.$

Prin identificare avem: $\alpha = 1$, $\beta = 1$. Cum termenul general al șirului u_n este $a_n = b_n + b_n'$ rezultă că $a_n = a \cdot 3^n + b \cdot 4^n + n + 1$ și din condițiile inițiale rezultă că $a = -b = -1$, deci: $a_n = 4^n - 3^n + n + 1$.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(4^n - 3^n + n + 1) = \lim\limits_{n\to\infty} 4^n\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{n}{4^n} + \frac{1}{4^n}\right] = \infty.$

32. Pentru $\alpha \neq \frac{1}{2}$,

$$x_n = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha+\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^3}\cdot\alpha^n + \frac{n^2}{2^n}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}-\alpha} - \frac{n}{2^n}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^2} + \frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{\alpha+\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^3}.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} = 0$, atunci șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent dacă și numai dacă $\alpha \in (-1, 1)$.

Dacă $\alpha = \frac{1}{2}$, atunci $x_n = \frac{1}{2^n}\cdot\left[\frac{2n^3}{6} - n^2 + \frac{n}{3}\right]$, $n \geq 0$.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{2^n} = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, deci șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent pentru $\alpha \in (-1, 1)$.

33. $x_{n+1} = (x_n - 1)^2 + 1 \Rightarrow x_1 = a$,

$x_2 = (a-1)^2 + 1$, $x_3 = (a-1)^4 + 1, \ldots,$

$x_{n+1} = (a-1)^{2^n} + 1$ și cum $a \in [1, 2]$ atunci $a - 1 \in [0, 1]$.

34. Prin inducție se verifică faptul că șirurile sînt monoton crescătoare. Dacă ar fi și mărginite atunci ar fi convergente, deci ar avea o limită unică l.

Din relațiile de recurență obținem:

$l = 1 + l^2 \Rightarrow l \notin \mathbf{R}$

$l = l + \frac{1}{l} \Rightarrow l = \infty$, deci șirurile sînt nemărginite, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, deci sînt divergente.

35. Cum $a_0 \in (0, 2) \Rightarrow a_1^4 = 2a_0^2 + 8 < 16 \Rightarrow a_1 \in (0, 2)$. Avem: $a_1^4 - a_0^4 = -a_0^4 + 2a_0^2 + 8 = -(a_0^2 - 1)^2 + 9$ și cum $a_0 < 2 \Rightarrow a_0^2 < 4 \Rightarrow a_0^2 - 1 < 3 \Rightarrow (a_0^2 - 1)^2 < 9 \Rightarrow a_1^4 - a_0^4 > 0 \Rightarrow a_1 > a_0$.

Să presupunem, folosind metoda inducției că $a_{n-1} < a_n < 2$ și să demonstrăm că $a_n < a_{n+1} < 2$. Avem: $a_{n+1}^4 = 2a_n^2 + 8$ și cum $a_n \in (0, 2) \Rightarrow a_{n+1} \in (0, 2)$. Să demonstrăm că și cum $a_n \in (0, 2) \Rightarrow a_{n+1} \in (0, 2)$. Să demonstrăm că și $a_{n+1} > a_n$; $a_{n+1}^4 - a_n^4 = -a_n^4 + 2a_n^2 + 8 = 9 - (a_n^2 - 1)^2 > 0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$ pentru $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 < a_n < a_{n+1} < 2$, deci șirul este convergent. Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, cu $l \in \mathbf{R}$. Trecînd la limită în relația de recurență obținem: $l^4 - 2l^2 - 8 = 0 \Rightarrow l = 2$, $a_1 = 2$, $a_2 = -2$, $a_3 = i\sqrt{2}$, $a_4 = -i\sqrt{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

36. Vom determina termenii generali ai celor două șiruri:

$$a_1 = 1,\ a_2 = \cos x + \cos x = 2\cos x = \frac{\sin 2x}{\sin x}$$

$$a_3 = a_2 \cdot \cos x + \cos 2x = \frac{\sin 2x}{\sin x} \cdot \cos x + \cos 2x = \frac{\sin 3x}{\sin x}.$$

Folosind metoda inducției matematice, presupunem că

$$a_n = \frac{\sin nx}{\sin x} \text{ atunci } a_{n+1} = a_n \cos x + \cos nx =$$

$$= \frac{\sin (n+1)x}{\sin x} \Rightarrow a_n = \frac{\sin nx}{\sin x} \text{ pentru } \forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}.$$

$$b_1 = 1 = \frac{\sin x}{\sin x},\ b_2 = 2\cos x = \frac{\sin 2x}{\sin x}$$

$$b_3 = 2b_2 \cos x - b_1 = \frac{2\sin 2x \cdot \cos x}{\sin x} - 1 = \frac{\sin 3x}{\sin x}.$$

Folosind metoda inducției matematice, presupunem că $b_n = \frac{\sin nx}{\sin x}$ atunci $b_{n+1} = 2b_n \cos x - b_{n-1} = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x} \Rightarrow$

$\Rightarrow b_n = \frac{\sin nx}{\sin x}$ pentru $\forall n \in \mathbf{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

37. Vom arăta că șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este monoton crescător și mărginit superior, iar șirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este monoton descrescător și mărginit inferior:

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} > \frac{a_0 + a_0}{2} = a_0$$

$$b_1 = \frac{a_0 + 2b_0}{3} < b_0$$

$$b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{6} > 0 \text{ deci } a_0 < a_1 < b_1 < b_0$$

și presupunînd că $a_n < b_n$, rezultă:

$$a_{n+1} = \frac{b_n + a_n}{2} > a_n$$

$$b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3} < b_n$$

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{6} > 0, \text{ deci}$$

$a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$ pentru orice n natural, deci șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este strict crescător și mărginit superior de b_0, iar șirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este strict descrescător și mărginit inferior de a_0, deci cele două șiruri au limită finită.

Fie $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ și trecînd la limită în egalitatea $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ rezultă $a = \frac{a+b}{2} \Rightarrow a = b$.

38. i) Relația de recurență a șirului de matrici, conform proprietăților de adunare și egalitate de matrici, este adevărată pentru fiecare din cele șase șiruri formate cu elementele corespunzătoare matricilor, deci ecuația caracteristică

asociată relației de recurență este: $2x^2 = x + 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ și $x_2 = -\frac{1}{2}$, deci $A_n = 1^n \cdot U + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot V$, unde $U, V \in M_{3,2}(\mathbf{R})$, matrici care vor fi determinate din condițiile inițiale:

$$\begin{cases} A_0 = U + V \\ A_1 = U - \frac{1}{2} V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U = \frac{1}{3}(A_0 + 2A_1) \\ V = \frac{2}{3}(A_0 - A_1) \end{cases}.$$

Dar cum $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} A_n = U = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 7 & \frac{11}{3} \\ 2 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$.

ii) Vom căuta altă exprimare a șirului de matrici, și anume:

$A_n = \alpha^n \cdot U + \beta^n \cdot V + \gamma^n \cdot W$, unde $U, V, W \in M_{2,2}$ (**R**) și le vom determina din condițiile inițiale, iar coeficienții α, β, γ vor fi soluțiile ecuației caracteristice asociate șirului. Ecuația caracteristică se determină:

$6(\alpha^{n+3}U + \beta^{n+3}V + \gamma^{n+3}W) = 11(\alpha^{n+2}U + \beta^{n+2}V + \gamma^{n+2}W) -$
$-6(\alpha^{n+1}U + \beta^{n+1}V + \gamma^{n+1}W) + \alpha^n U + \beta^n V + \gamma^n W \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha^n(6\alpha^3 - 11\alpha^2 + 6\alpha - 1)U + \beta^n(6\beta^3 - 11\beta^2 +$
$+ 6\beta - 1)V + \gamma^n(6\gamma^3 - 11\gamma^2 + 6\gamma - 1)W = 0,$

iar ecuația caracteristică asociată este:

$$6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0$$

având rădăcinile: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{3} \Rightarrow A_n = 1^n \cdot U +$
$+ \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot V + \left(\frac{1}{3}\right)^n W$ pentru $\forall n \in \mathbf{N}$.

Condițiile inițiale vor implica sistemul:

$$\begin{cases} A_0 = U + V + W \\ A_1 = U + \frac{1}{2} V + \frac{1}{3} W \\ A_2 = U + \frac{1}{4} V + \frac{1}{9} W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U = \frac{1}{2}(6A_2 - 5A_1) \\ V = 2(8A_1 - 6A_2 - A_0) \\ W = 3\left(A_0 - \frac{9}{2}A_1 + 3A_2\right) \end{cases}.$$

Dar $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = U + V \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + W \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = U =$
$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 23 & 25 \end{pmatrix}$.

39. i) $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, $-\frac{\varepsilon}{2} < b_{N+1} < \frac{\varepsilon}{2}, \ldots,$
$-\frac{\varepsilon}{2} < b_n < \frac{\varepsilon}{2}$, $S_n = S_N + b_{N+1} + b_{N+2} + \ldots + b_n$

$S_n - S_N = b_{N+1} + \ldots + b_n$; $-\frac{n\varepsilon}{2} < -\frac{(n-N)\varepsilon}{2} <$
$< S_n - S_N < (n - N)\frac{\varepsilon}{2} < \frac{n\varepsilon}{2}$. Împărțim cu n și obținem:

$$\frac{S_N}{n} - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{S_n}{n} < \frac{S_N}{n} + \frac{\varepsilon}{2}, \; n > N,$$

ii) Dacă $-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{S_N}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru $n > N'$ rezultă:
$-\varepsilon < \frac{S_n}{n} < \varepsilon$, $n > N_1$, $n > \max(N, N')$ deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0$.

iii) Considerînd $a_n = L + b_n \Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} =$
$= L + \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}$. Trecînd la limită în inegalitate obținem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = L$.

iv) Aplicînd *lema lui Cezàro-Stolz* obținem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}=0.$$

Se mai poate demonstra folosind rezultatul ii).

40. Vom aplica o consecință a *lemei lui Cesàro-Stolz* și anume:

dacă șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ are termeni pozitivi și dacă există $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ atunci $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

i) $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n^n}{(n+1)^n}\cdot\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}=$

$$=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{4}{e}.$$

ii) $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3^{3n+3}[(n+1)!]^3}{[3(n+1)]!}\cdot\frac{(3n)!}{3^{3n}(n!)^3}=$

$$=\frac{3^{3n}\cdot 3\cdot[n!(n+1)]^3}{(3n)!(3n+1)(3n+2)(3n+3)}\cdot\frac{(3n)!}{3^{3n}(n!)^3}=$$

$$=\frac{3(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)},\ \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{9}.$$

iii) $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\frac{n^n}{(1+n)^n}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$,

$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{e}$.

iv) $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!\,8^{n+1}}\cdot\frac{(2n)!\,8^n}{(n!)^2}=$

$$=\frac{[n!(n+1)]^2}{(2n)!(2n+1)(2n+2)\cdot 8\cdot 8^n}\cdot\frac{(2n)!\cdot 8^n}{(n!)^2}=$$

$$=\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)\cdot 8};\ \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{32}.$$

v) $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2}\cdot\frac{[n!]^2}{(2n)!}=$

$$=\frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{[n!(n+1)]^2}\cdot\frac{[n!]^2}{(2n)!}=\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2},$$

$\lim_{n\to\infty}a_n=4$.

vi) $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\ln(n+1)!}{\ln n!}=\frac{\ln n!+\ln(n+1)}{\ln n!}=$

$$=1+\frac{\ln(n+1)}{\ln n!},\ \lim_{n\to\infty}a_n=1.$$

vii) $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)(a+n+1)}{(n+1)^n(n+1)}\cdot$

$$\cdot\frac{n^n}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}=\frac{n+1+a}{n+1}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},\ \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{e}.$$

41. Reamintesc *lema lui Cesàro-Stolz:*

Fie $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ două șiruri de numere reale, $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este strict monoton și nemărginit. Dacă există

$\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}-c_n}{d_{n+1}-d_n}=l\in\overline{\mathbf{R}}$ atunci există $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{d_n}$ și este egală cu l.

i) fie $c_n=(1^p+2^p+\ldots+n^p)(p+1)-n^{p+1}$ și $d_n=(p+1)n^p$.

$$\frac{c_{n+1}-c_n}{d_{n+1}-d_n}=\frac{\frac{p(p+1)}{2}\cdot n^{p-1}+\ldots}{p(p+1)\cdot n^{p-1}+\ldots},$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}-c_n}{d_{n+1}-d_n}=\frac{1}{2}.$$

ii) $\frac{1}{p+1}$, iii) $\frac{2^p}{p+1}$.

iv) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n+1)-\ln n}{(n+1)^p-n^p}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\dfrac{n+1}{n}}{n^p+C_p^1n^{p-1}+\ldots+1-n^p}=$

$=\dfrac{1}{C_p^1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\dfrac{n+1}{n}}{n^{p-1}}=\dfrac{1}{C_p^1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{n^p}=0.$

v) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}-\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n+1-n}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}=0.$

vi) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{a\sqrt{n+1}+b}{c\sqrt{n+1}+d}}{n+1-n}=\dfrac{a}{c}.$

vii) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{\ln(n+1)}{n+1-n}}=0.$

CAPITOLUL II

LIMITE DE FUNCȚII

PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

1. Să se traseze graficele următoarelor funcții:

a) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{2^n+x^n}$; $f:[0,\infty)\to\mathbf{R}$, $n\in\mathbf{N}$;

b) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{x^{2n+2}}{2^{2n}+x^{2n}}}$, $n\in\mathbf{N}$.

2. Să se determine constantele reale a și b astfel ca:

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$;

ii) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$;

iii) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0.$

Să se calculeze următoarele limite:

3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$;

4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$;

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{x-\dfrac{\pi}{4}}$ **6.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)^2}{x^4}$

7. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{1-\left(\dfrac{x}{\pi}\right)^2}$ **8.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-\sqrt[n]{1-x}}{x}$, $n\in\mathbf{N}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$; **10.** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$;

11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$; **12.** $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^3 ax}{x-\sin x}$, $a\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$; **14.** $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x)^{\frac{1}{x^3-3ex+2e^3}}$;

15. $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x>\frac{\pi}{4}}}\left(\dfrac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}}}$;

16. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}(\sin x+\cos 2x)^{\operatorname{tg} 3x}$; **17.** $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

18. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{1-\sin 2x}}$; **19.** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\right]^{\frac{1}{\sin x}}$;

20. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}(\sqrt{3}\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 3x}$; **21.** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+a\sin bx)^{\frac{1}{x}}$;

22. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg} x-3}{3x-\pi}$; **23.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{tg} x}{x^2\operatorname{tg} x}$;

24. $\lim\limits_{x\to 2}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x-4}{(x-2)^2}$; **25.** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin\frac{x}{2}+\cos x}{1+\cos x}$;

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^{\operatorname{tg} x}}{e^{\sin 2x}-e^{\operatorname{tg} 2x}}$;

27. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x\cdot\sqrt[3]{\cos x}-\cos x\cdot\sqrt[3]{\sin x}}{\ln(\operatorname{tg} x+a\cos 2x)}$;

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$; **29.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$;

30. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{\frac{p}{q}}-1}{x^{\frac{r}{s}}-1}$, unde $p, q, r, s\in\mathbf{N}\setminus\{0\}$;

31. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$; **32.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{3^{\sin^2 x}-3}{x-\frac{\pi}{2}}$;

33. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2^{\operatorname{tg} x}-2}{x-\frac{\pi}{4}}$; **34.** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}$, $a>0$;

35. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{ax}-a^{aa}}{x-a}$, $a>0$;

36. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{a^a}}{x-a}$, unde $a>1$; **37.** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{x^x}-a^{a^a}}{x-a}$;

38. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log\sin x-\log x}{1-\cos x}$; **39.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log\cos x}{\sin^2 x}$;

40. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$; **41.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\operatorname{arctg} x}{x^2}$;

42. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$;

43. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\ldots\cos nx}{x^2}$;

44. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x-1)\left(1-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$;

45. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}\right)$; **46.** $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

47. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x+2}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+2}\right)$;

48. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{\operatorname{arctg}(1+x)-\operatorname{arctg}(1-x)}$;

49 i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[p]{a_1}+\sqrt[p]{a_2}}{2}\right)^n$, $a_1,\ a_2>1$; $n\in\mathbf{N}$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k}\sqrt[p]{a_i}}{k}\right)^n$, $a_i>1$;

50. $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x>\frac{\pi}{3}}}\dfrac{\sqrt{\ln|(\sin x)^{-1}|}}{x-\frac{\pi}{2}}$;

51. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}\dots\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$; $n\in\mathbf{N}$;

52. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\sqrt{\sin^2 x-\frac{1}{4}+\sqrt{\sin^2 x-\frac{1}{4}+\dots}}$;

53. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{tg}\dfrac{2k}{n^2}$; **54.** $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)$;

55. $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{ka}{n\sqrt{n}}$, $a>0$;

56. $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k^p}{n^{p+1}}\right)$, $p>0$; **57.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k}{n^2}$;

58. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2^2}{n^3}\right)\dots\left(1+\dfrac{n^2}{n^3}\right)$;

59. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 1}\frac{Ax^n+Bx^p+C}{(x-1)^2},$$

știind că $A+B+C=0$ și $nA+pB=0$, unde n, p sînt numere naturale și A,B,C numere reale.

60. Să se determine parametrii reali α, β, γ, p astfel încît:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{9x^4-24x^3+6x^2+5}-(\alpha x^p+\beta x+\gamma)\right]=\frac{7}{8}.$$

61. Fie funcția $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{m}\sqrt{\alpha_k x^2+\beta_k x+\gamma_k}-\lambda x-\mu$.

i) Să se determine condiția ca domeniul de definiție E, al funcției f, să includă o semidreaptă. α_k, β_k, γ_k, λ, $\mu\in\mathbf{R}$.

ii) În cazul în care $+\infty$ este punct de acumulare al mulțimii E, să se determine λ și μ astfel încît să avem $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

62. Să se studieze natura șirului $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu $b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, $a_k=\lim\limits_{x\to 0}(1-x\sin kx)^{\frac{1}{x^2}}$.

63. Să se calculeze limita următoarelor sume trigonometrice pentru $n\to\infty$:

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_1}{n}$ unde $S_1=\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{k\pi}{2n}$;

ii) $S_2=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin\dfrac{x}{k(k+1)}}{\cos\dfrac{x}{k}\cdot\cos\dfrac{x}{k+1}}$.

iii) $S_3=\sum\limits_{k=0}^{n}x^k\cos(a+bk)$ pentru $|x|<1$

$S_4=\sum\limits_{k=0}^{n}x^k\sin(a+bk)$ pentru $|x|<1$.

iv) $S_5=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{4^k\cdot\cos^2\dfrac{a}{2^k}}$.

v) $S_6=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{3^{k-1}}\cdot\cos^3 3^{k-1}a$.

64. Să se calculeze următoarele limite:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\cos(a_k x)}{n}\right]^{\frac{1}{x\sin x}}$.

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \cos(a_k x) - n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \arccos(a_k x) - n \cdot \dfrac{\pi}{2}}$, $a_k \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$.

65. Să se arate că există identitățile:

$$\frac{1}{\sin \alpha} = A \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + B \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = C \operatorname{ctg} \alpha + D \operatorname{ctg} 2\alpha$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = E \operatorname{ctg} \alpha + F \operatorname{tg} \alpha$$

și să se determine coeficienții reali A, B, C, D, E, F.

Să se calculeze

i) $S_1 = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{\sin 2^k \alpha}$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_1$.

ii) $S_2 = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2^k} \cdot \operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2^k}$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_2$.

iii) $S_3 = \sum\limits_{k=0}^{n-1} 2^k \cdot \operatorname{tg} 2^k \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_3$.

66. Știind că $x + \dfrac{1}{x} = 2 \cos \alpha$, să se calculeze

$$S = \sum_{k=1}^{n} \left(x^k + \frac{1}{x^k} \right), \text{ cît și}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S}{\cos\left(\dfrac{n+1}{2}\alpha\right) \cdot \sin \dfrac{n\alpha}{2}}$$

67. Să se calculeze limita următoarei sume (pentru $n \in \mathbf{N}$ și $n \to \infty$):

i) $S_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{k^2 + k + 1}$,

ii) $S_2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{2}{(k+1)^2}$.

iii) $S_3 = \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2k^2}$.

iv) $S_4 = \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{arcctg} (k^2 + k + 1)$.

v) $S_5 = \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{arcctg} (2k^2)$.

vi) $S_6 = \dfrac{1}{4n+2} \operatorname{tg}\left(\sum\limits_{k=1}^{4n+1} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{k^2 + k + 2}{k^2 + k} \right)$.

68. Fie ecuația binomă $x^{n+1} - 1 = 0$, $n \in \mathbf{N}$ cu rădăcinile $x_0 = 1$, $x_k \neq 1$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Să se calculeze $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x_k}{1 - x_k}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{n}$.

69. Să se determine numărul a astfel ca funcția:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x \operatorname{tg} x \left(1 - \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}\right)} & \text{pentru } x < 0 \\ a & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$$

să aibă limită în punctul $x = 0$.

70. Să se arate dacă următoarele funcții au limită în punctele specificate:

i) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 4(x-1)}{5(x-1)} & \text{pentru } x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right) \\ \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{\operatorname{tg} 3(x-1)}{\sin(x-1)} + \dfrac{1}{5} & \text{pentru } x \in (1, 2] \end{cases}$

în punctul $x = 1$.

ii) $f(x) = \begin{cases} 4 \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} & \text{pentru } x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \\ \dfrac{\sin 2(x^2-1)\pi}{x^2 - 1} & \text{pentru } x \in (-1, 1) \end{cases}$

în punctul $x = -1$.

71. Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{x+\sqrt[n]{x}}}{\sqrt[n]{x+\sqrt[m]{x}}}$.

Discuție, în cazul cînd m, n sînt numere naturale și cel puțin egale cu 2.

72. Se consideră funcțiile f și $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin:

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ dacă } x \neq 0 \\ 1 \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \text{ dacă } x \text{ este rațional} \\ 0 \text{ dacă } x \text{ este irațional.} \end{cases}$$

Să se studieze dacă există $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x))$.

73. Dacă x este un element real cu $|x| < 1$, să se calculeze:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1})$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} [2 + 6x + 12x^2 + \ldots + n(n-1)x^{n-2}]$.

REZOLVĂRI ȘI RĂSPUNSURI

1. a). i). $0 \leq x < 2 \Rightarrow \dfrac{2^n}{2^n + x^n} = \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^n}$ și

$f(x) = 1$; ii) $x = 2 \Rightarrow \dfrac{2^n}{2^n + x^n} = \dfrac{1}{2}$ deci $f(x) = \dfrac{1}{2}$;

iii) $x > 2 \Rightarrow \dfrac{2^n}{2^n + x^n} = \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{2}{x}\right)^n} \cdot \left(\dfrac{2}{x}\right)^n$, deci $f(x) = 0$,

iar graficul funcției este prezentat în figura II.1a.

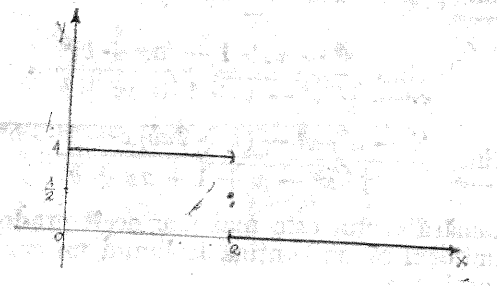


Fig. II.1.a

b) i) $|x| < 2$;

$$\sqrt{\frac{x^{2n+2}}{2^{2n} + x^{2n}}} = \sqrt{\frac{x^{2n+2}}{2^{2n}\left[1 + \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right]}} < \sqrt{\frac{x^{2n+2}}{2^{2n}}} = \left|\frac{x}{2}\right|^n \cdot |x|.$$

deci $f(x) = 0$; ii) $|x| = 2 \Rightarrow f(x) = \sqrt{2}$; iii) $|x| > 2$

$$\sqrt{\frac{x^{2n+2}}{2^{2n} + x^{2n}}} = |x| \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2}{x}\right)^{2n}}} \text{ deci } f(x) = |x|.$$

În concluzie: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } |x| < 2 \\ \sqrt{2} & \text{pentru } |x| = 2 \\ |x| & \text{pentru } |x| > 2 \end{cases}$

iar graficul funcției este prezentat în figura II.1b.

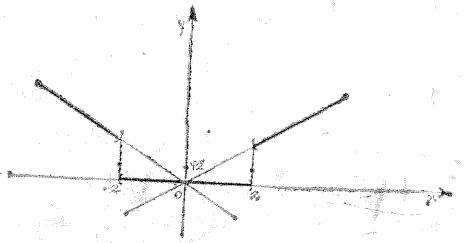


Fig. II.1.b

2. i) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+1-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(1-a^2)x^2-(1+2ab)x+1-b^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}=0 \Leftrightarrow$$

gradul numărătorului este mai mic decît gradul numitorului și numitorul să nu conțină la limită un caz de nedeterminare, deci $a\neq 1$.

$$a=-1,\ b=\frac{1}{2}.$$

ii) $a=1,\ b=-\frac{1}{2}$.

iii) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1}=0 \Leftrightarrow$$

gradul numărătorului este mai mic decît gradul numitorului, deci $a=1,\ b=-1$.

3. $\lim_{x\to\pm\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}=$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{pentru } x>0\\ -\infty \text{ pentru } x<0.\end{cases}$$

4. $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)=$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}=$$

$$=\begin{cases}1 \text{ pentru } x>0\\ -1 \text{ pentru } x<0.\end{cases}$$

5. $\cos x-\sin x=\cos x-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=$

$$=-2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{4}=-\sqrt{2}\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right),$$ deci valoarea limitei este egală cu $-\sqrt{2}$.

6. $\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)^2}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)^2}{x^4}=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4\cdot\sin^4\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^4\cdot 16}=\frac{1}{4}.$$

7. Fie $y=x-\pi$ cu $y\to0$.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{1-\left(\frac{x}{\pi}\right)^2}=\lim_{\substack{y\to0\\ x\to\pi}}\frac{\sin(y+\pi)}{\frac{-y(\pi+x)}{\pi^2}}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\lim_{y\to0}\frac{\sin(\pi+y)}{-y}=\frac{\pi}{2}.$$

8. Cazul „$\frac{0}{0}$“. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-\sqrt[n]{1-x}}{x}=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+x-1+x}{x\left[\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}(1-x)}+\ldots+\sqrt[n]{(1-x)^{n-1}}\right]}=$$

$$=\frac{2}{n}.$$

9. Cazul de nedeterminare „1^∞“. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x^2-2}\right)^{\frac{x^2-2}{3}}\right]^{\frac{3x^2}{x^2-2}}=e^3.$$

10. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{\sin x}} =$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}} = e^0 = 1.$$

11. Cazul „1^∞". $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}} =$

$$= \lim_{x\to 0}\left\{\left[1+\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{\sin x}{x}-1}}\right\}^{\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{x-\sin x}} = e^{-1}.$$

Vezi rezolvarea ex. 13.

12. Cazul de nedeterminare „1^∞". $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x} =$

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{x^2\cdot\operatorname{ctg}^2 x} = e^1 = e.$$

13. Pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ avem inegalitatea obținută prin dezvoltarea în serie Mac Laurin a funcției $f(x) = \sin x \Rightarrow$

$$x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \text{ deci } \frac{x^3}{6} > x - \sin x > \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}, \text{ și } \frac{1}{6} > \frac{x-\sin x}{x^3} > \frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} \text{ și } \frac{1}{6} \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x-\sin x}{x^3} \geqslant \frac{1}{6} - \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{120}, \text{ deci } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{6},$$

iar valoarea limitei este $6a^3$.

14. $\lim\limits_{x\to e}(\ln x)^{\frac{1}{x^2-3ex+2e^2}} =$

$$= \lim_{x\to e}\left\{[1+(\ln x-1)]^{\frac{1}{\ln x-1}}\right\}^{\frac{\ln x-1}{x^2-3ex+2e^2}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln\frac{x}{e}}{(x-e)(x-2e)}} = e^{\frac{1}{e}\lim\limits_{x\to e}\ln\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{x-e}}} =$$

$$= e^{\frac{1}{e}\ln\lim\limits_{x\to e}\left[\left(1+\frac{x-e}{e}\right)^{\frac{e}{x-e}}\right]^{\frac{x-e}{e}\cdot\frac{1}{x-e}}} =$$

$$= e^{-\frac{1}{e}\cdot(\ln e)^{\frac{1}{e}}} = e^{-\frac{1}{e^2}}.$$

15. $\sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$

$$= 2\cdot\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x>\frac{\pi}{4}}}\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x-\frac{\pi}{4}}}} = \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x>\frac{\pi}{4}}}\left[\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^{\frac{1}{\sqrt{x-\frac{\pi}{4}}}} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x>\frac{\pi}{4}}}\left\{\left[1+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1\right]^{\frac{1}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1}}\right\}^{\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1}{\sqrt{x-\frac{\pi}{4}}}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x>\frac{\pi}{4}}}\frac{-2\sin^2\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}}{\left(\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)^2}\cdot\frac{\left(\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)^2}{\sqrt{x-\frac{\pi}{4}}}} = e^0 = 1.$$

16. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}(\sin x+\cos 2x)^{\operatorname{tg}3x}=$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\left\{[1+\sin x(1-2\sin x)]^{\frac{1}{\sin x(1-2\sin x)}}\right\}^{\frac{\sin 3x\sin x(1-2\sin x)}{\cos 3x\cos x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin 3x\sin x\cdot 2\left(\sin\frac{\pi}{6}-\sin x\right)}{\cos 3x\cos x\left(\cos x+\cos\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos x-\cos\frac{\pi}{6}\right)}}=$$

$$=e^{\frac{1\cdot\frac{1}{2}\cdot 2}{4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}}\cdot\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\frac{\pi}{6}-\sin x}{\cos x-\cos\frac{\pi}{6}}}=e^{\frac{1}{6}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}}=e^{\frac{\sqrt{3}}{6}}.$$

17. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{3\operatorname{tg}^2 x}}\right]^{3\operatorname{tg}^2 x\cdot\operatorname{ctg}^2 x}=e^3.$$

18. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{1-\sin 2x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[(1+\operatorname{tg}x-1)^{\frac{1}{\operatorname{tg}x-1}}\right]^{\frac{\operatorname{tg}x-1}{1-\sin 2x}}=$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}x-1}{\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos x(\sin x-\cos x)^2}}=$$

$$=\begin{cases}e^{\infty}=\infty & \text{dacă}\quad x>\dfrac{\pi}{4}\\ e^{-\infty}=0 & \text{dacă}\quad x<\dfrac{\pi}{4}\end{cases}.$$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]^{\frac{1}{\sin x}}=$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left[1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-1\right]^{\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-1}}\right\}^{\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-1}{\sin x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos\frac{\pi}{4}}}=e^{\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}}=e^2.$$

20. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}(\sqrt{3}\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}3x}=$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\left[(1+(\sqrt{3}\operatorname{tg}x-1))^{\frac{1}{\sqrt{3}\operatorname{tg}x-1}}\right]^{(\sqrt{3}\operatorname{tg}x-1)\cdot\operatorname{tg}3x}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sqrt{3}\left(\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}=e^{\sqrt{3}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{6}}\cdot\frac{1}{\cos 3x}\right)}=$$

$$=e^{\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)^2}\cdot\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\left[\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}\cdot\frac{x-\frac{\pi}{6}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)}\right]}=$$

$$=e^{\sqrt{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}=e^{-\frac{4\sqrt{3}}{9}}.$$

21. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+a\sin bx)^{\frac{1}{x}}=$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{[1+(\cos x+a\sin bx-1)]^{\frac{1}{\cos x-1+a\sin bx}}\right\}^{\frac{\cos x-1+a\sin bx}{x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a\sin bx}{x}-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}\right)}=e^{ab}.$$

22. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sqrt{3}\operatorname{tg}x-3}{3x-\pi}=\sqrt{3}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}{3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}=$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}\cdot\frac{1}{\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{3}}\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 4=\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{tg} x}{x^2\cdot\operatorname{tg} x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1-\dfrac{1}{\cos x}}{x\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\cos x-1}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{-2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x\cdot 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x^2}{4}\cdot 4}\cdot\frac{\dfrac{x}{2}\cdot 2}{\sin\dfrac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos\dfrac{x}{2}}\right)=-\frac{1}{2}.$$

24. $\lim\limits_{x\to 2}\operatorname{arctg}\dfrac{x-4}{(x-2)^2}=-\dfrac{\pi}{2}.$

25. Fie $y=x-\pi$ cu $y\to 0\Rightarrow$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\pi}\frac{\sin\dfrac{x}{2}+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{y\to 0}\frac{\cos\dfrac{y}{2}-\cos y}{1-\cos y}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\cos\dfrac{y}{2}-1}{1-\cos y}+\frac{1-\cos y}{1-\cos y}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{-2\sin^2\dfrac{y}{4}}{2\sin^2\dfrac{y}{2}}+1\right)=$$

$$=\lim_{y\to 0}\left[-\frac{\sin^2\dfrac{y}{4}}{\left(\dfrac{y}{4}\right)^2}\cdot\frac{\left(\dfrac{y}{2}\right)^2}{\sin^2\dfrac{y}{2}}\cdot\frac{4}{16}+1\right]=-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}.$$

26. $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^{\operatorname{tg} x}}{e^{\sin 2x}-e^{\operatorname{tg} 2x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg} x}(e^{\sin x-\operatorname{tg} x}-1)}{e^{\operatorname{tg} 2x}(e^{\sin 2x-\operatorname{tg} 2x}-1)}=$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^{\sin x-\operatorname{tg} x}-1}{x}\cdot\frac{1}{\dfrac{e^{\sin 2x-\operatorname{tg} 2x}-1}{x}}\right].$$

Fie $e^{\sin x-\operatorname{tg} x}-1=u$, pentru $x\to 0\Rightarrow u\to 0$ și $\sin x-\operatorname{tg} x=\ln(1+u)$. Fie $e^{\sin 2x-\operatorname{tg} 2x}-1=v$ pentru $x\to 0\Rightarrow v\to 0$ și $\sin 2x-\operatorname{tg} 2x=\ln(1+v)$.

$$\text{Deci } L=\lim_{\substack{x\to 0\\ u\to 0\\ v\to 0}}\left[\frac{u}{\ln(1+u)}\cdot\frac{\sin x-\operatorname{tg} x}{x}\cdot\frac{1}{\dfrac{v}{\ln(1+v)}\cdot\dfrac{\sin 2x-\operatorname{tg} 2x}{x}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg} x}{\sin 2x-\operatorname{tg} 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\dfrac{\cos x-1}{\cos x}}{\sin 2x\cdot\dfrac{\cos 2x-1}{\cos x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{\sin 2x}\cdot\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{4\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{x^2}{2\sin^2 x}\cdot\frac{\cos x}{\cos x}\right]=\frac{1}{8}.$$

27. $L=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x\sqrt[3]{\cos x}-\cos x\sqrt[3]{\sin x}}{\ln(\operatorname{tg} x+a\cos 2x)}=$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\sin^3 x\cos x-\cos^3 x\sin x}{\sin^2 x\sqrt[3]{\cos^2 x}+\sin x\cos x\sqrt[3]{\sin x\cos x}+\cos^2 x\sqrt[3]{\sin^2 x}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{1}{\ln(\operatorname{tg} x+a\cos 2x)}\right]=\frac{1}{3\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}}\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin x\cos x\cos 2x}{\ln(\operatorname{tg} x+a\cos 2x)}=-\frac{\sqrt[3]{2}}{3}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\ln\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x+a\cos 2x)^{\frac{1}{\cos 2x}}}=-\frac{\sqrt[3]{2}}{3}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\ln\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left\{[1+(\operatorname{tg} x-1+a\cos 2x)]^{\frac{1}{\operatorname{tg} x-1+a\cos 2x}}\right\}^{\frac{\operatorname{tg} x-1+a\cos 2x}{\cos 2x}}}=$$

$$= -\frac{\sqrt[3]{2}}{3} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\operatorname{tg} x - 1}{\cos 2x} + a \right)} = -\frac{\sqrt[3]{2}}{3} \cdot \frac{1}{\ln e^{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\operatorname{tg} x - 1}{\cos 2x} + a \right)}} =$$

$$= -\frac{\sqrt[3]{2}}{3} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} + a \right)} = \frac{\sqrt[3]{2}}{3} \cdot \frac{1}{1 - a}.$$

28. Cazul „$\frac{0}{0}$". $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = I + Y$$

$$I = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = \lim_{a \to 0} \frac{1}{\ln(1 + a)^{\frac{1}{a}}} = 1, \text{ unde}$$

$$e^{x^2} - 1 = a \Rightarrow x^2 = \ln(1 + a).$$

$$Y = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2},$$

deci valoarea limitei este $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

29. Cazul „$\frac{\infty}{\infty}$". $\frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})} = \frac{\ln e^x \left(1 + \frac{x^2}{e^x}\right)}{\ln e^{2x} \left(1 + \frac{x^4}{e^{2x}}\right)} =$

$$= \frac{1 + \frac{x^2 \ln\left(1 + \frac{x^2}{e^x}\right)^{\frac{e^x}{x^2}}}{xe^x}}{2 + \frac{x^4 \ln\left(1 + \frac{x^4}{e^{2x}}\right)^{\frac{e^{2x}}{x^4}}}{xe^{2x}}} \to \frac{1}{2} \text{ pentru } x \to \infty.$$

30. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[q]{x^p} - 1}{\sqrt[s]{x^r} - 1} =$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x^p - 1)\left[\left(\sqrt[q]{x^r}\right)^{s-1} + \left(\sqrt[q]{x^r}\right)^{s-2} + \ldots + 1\right]}{(x^r - 1)\left[\left(\sqrt[q]{x^p}\right)^{q-1} + \left(\sqrt[q]{x^p}\right)^{q-2} + \ldots + 1\right]} =$$

$$= \frac{s}{q} \lim_{x \to 1} \frac{x^p - 1}{x^r - 1} = \frac{s}{q} \cdot \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + 1)}{(x - 1)(x^{r-1} + x^{r-2} + \ldots + 1)} =$$

$$= \frac{s}{q} \cdot \frac{p}{r}.$$

31. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{\arcsin(1 - 2x)}{1 - 2x} \cdot \frac{1}{-(1 + 2x)} = -\frac{1}{2}$.

32. $L = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{3^{\sin^2 x} - 3}{x - \frac{\pi}{2}} = 3 \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{3^{\sin^2 x - 1} - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$.

Fie $3^{\sin^2 x - 1} - 1 = u$, pentru $x \to 0 \Rightarrow u \to 0$.

$3^{\sin^2 x - 1} = 1 + u \Rightarrow (\sin^2 x - 1) \ln 3 = \ln(1 + u)$.

Deci $L = 3 \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ u \to 0}} \frac{u}{\ln(1 + u)} \cdot \frac{\ln 3 \cdot (\sin^2 x - 1)}{x - \frac{\pi}{2}} =$

$$= 3 \ln 3 \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\left(\sin x - \sin \frac{\pi}{2}\right)\left(\sin x + \sin \frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} =$$

$$= 6 \ln 3 \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin \frac{x - \frac{\pi}{2}}{2} \cos \frac{x + \frac{\pi}{2}}{2}}{x - \frac{\pi}{2}} =$$

$$= 6 \ln 3 \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

33. $L = 2 \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{2^{\operatorname{tg} x - 1} - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$. Vom face notația:

$$2^{\operatorname{tg} x - 1} - 1 = u \Rightarrow (\operatorname{tg} x - 1) \ln 2 = \ln(1 + u)$$

deci $L = 2 \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{4} \\ u \to 0}} \dfrac{u}{\ln(1+u)} \cdot \dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \cdot \ln 2 =$

$$= 2 \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{4} \\ u \to 0}} \left[\frac{1}{\frac{\ln(1+u)}{u}} \cdot \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} \cdot \ln 2 \right] =$$

$$= 2 \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{4} \\ u \to 0}} \left[\frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}} \cdot \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{\cos x \cos \frac{\pi}{4}} \cdot \ln 2 \right] = \ln 16.$$

34. Cazul de nedeterminare „$\frac{0}{0}$".

$$L = \lim_{x \to a} \left(\frac{x^x - x^a}{x - a} + \frac{x^a - a^a}{x - a} \right) =$$

$$= \lim_{x \to a} \left[\frac{x^x (x^{x-a} - 1)}{x - a} + \frac{a^a \left(\left(\frac{x}{a} \right)^a - 1 \right)}{a \left(\frac{x}{a} - 1 \right)} \right] = a^a \cdot A + a^{a-1} \cdot B.$$

Calculăm limita A:

fie $x^{x-a} - 1 = u \Rightarrow (x - a) \ln x = \ln (1 + u)$ și pentru $x \to a \Rightarrow u \to 0$.

$$A = \lim_{\substack{x \to a \\ u \to 0}} \left[\frac{u}{\ln(1+u)} \cdot \frac{(x-a) \ln x}{x - a} \right] = \ln a.$$

Calculăm limita B:

fie $\left(\frac{x}{a}\right)^a - 1 = u \Rightarrow a \cdot \ln \frac{x}{a} = \ln (1 + u)$ și pentru $x \to a \Rightarrow u \to 0$.

$$B = \lim_{\substack{x \to a \\ u \to 0}} \frac{u}{\ln(1+u)} \cdot \frac{a \ln \frac{x}{a}}{\frac{x}{a} - 1} =$$

$$= a \lim_{x \to a} \ln \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{1}{\frac{x}{a} - 1}} = a \ln \lim_{x \to a} \left[1 + \left(\frac{x}{a} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{\frac{x}{a} - 1}} = a.$$

Deci $L = a^a \cdot \ln a + a^{a-1} \cdot a = a^a (\ln a + 1)$.

35. $L = \lim\limits_{x \to a} \left[\dfrac{x^{a^x} - a^{a^x}}{x - a} + \dfrac{a^{a^x} - a^{a^a}}{x - a} \right] =$

$$= a^{a^a} \lim_{x \to a} \frac{\left(\frac{x}{a} \right)^a - 1}{a \left(\frac{x}{a} - 1 \right)} + a^{a^a} \lim_{x \to a} \frac{a^{a^x - a^a} - 1}{x - a} = a^{a^a} (A + B),$$

Calculăm limita A:

Fie $\left(\frac{x}{a}\right)^{a^x} - 1 = u \Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^{a^x} = 1 + u$, pentru $x \to a \Rightarrow u \to 0$;

$$a^x \cdot \ln \frac{x}{a} = \ln (1 + u) \Rightarrow$$

$$A = \lim_{\substack{x \to a \\ u \to 0}} \left[\frac{u}{\ln(1+u)} \cdot \frac{a^x \ln \frac{x}{a}}{a \left(\frac{x}{a} - 1 \right)} \right] =$$

$$= a^{a-1} \lim_{x \to a} \ln \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{1}{\frac{x}{a} - 1}} = a^{a-1} \ln \lim_{x \to a} \left[1 + \left(\frac{x}{a} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{\frac{x}{a} - 1}} = a^{a-1}.$$

Calculăm limita B: Fie $a^{a^x-a^a}-1=u \Rightarrow (a^x-a^a)\ln a = \ln(1+u)$ pentru $x\to a \Rightarrow u\to 0$.

$$B=\lim_{\substack{x\to a\\ u\to 0}}\left[\frac{u}{\ln(1+u)}\cdot\frac{(a^x-a^a)\ln a}{x-a}\right]=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{a^a(a^{x-a}-1)}{x-a}\cdot\ln a = a^a\cdot\ln a\cdot\lim_{x\to a}\frac{a^{x-a}-1}{x-a}=a^a\cdot\ln a\cdot C.$$

Pentru calcularea limitei C procedăm: fie $a^{x-a}-1=u\Rightarrow$

$$\Rightarrow (x-a)\ln a=\ln(1+u)\Rightarrow$$

$$C=\lim_{\substack{x\to a\\ u\to 0}}\left[\frac{u}{\ln(1+u)}\cdot\frac{(x-a)\ln a}{x-a}\right]=\ln a.\ \text{Deci}$$

$$L=a^{a^a}(a^{a-1}+a^a\ln^2 a)=a^{a^a}a^a(\ln^2 a+a^{-1}).$$

36. $L=\lim\limits_{x\to a}a^{a^a}\dfrac{a^{a^x-a^a}-1}{x-a}$. Vom face substituția:

$$a^{a^x-a^a}-1=u\Rightarrow (a^x-a^a)\ln a=\ln(1+u).$$

$$L=a^{a^a}\lim_{\substack{x\to a\\ u\to 0}}\frac{u}{\ln(1+u)}\cdot\frac{a^x-a^a}{x-a}\cdot\ln a=$$

$$=a^{a^a}\cdot\ln a\cdot\lim_{\substack{x\to a\\ u\to 0}}\frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}\cdot\frac{a^a(a^{x-a}-1)}{x-a}=$$

$$=a^{a^a}\cdot a^a\cdot\ln a\cdot\lim_{x\to a}\frac{1}{\ln e}\cdot\frac{a^{x-a}-1}{x-a}.$$

Vom face substituția: $a^{x-a}-1=0\Rightarrow (x-a)\ln a=$

$=\ln(1+0)$, deci $L=a^{a^a}\cdot a^a\cdot\ln a\lim\limits_{0\to 0}\dfrac{0}{\ln(1+0)}\cdot\ln a=$

$$=a^{a^a}\cdot a^a\cdot\ln^2 a\cdot\lim_{0\to 0}\frac{1}{\ln(1+0)^{\frac{1}{0}}}=a^{a^a}\cdot a^a\cdot\ln^2 a.$$

37. $L=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^a}(a^{x^x-a^a}-1)}{x-a}$. Vom face substituția $a^{x^x-a^a}-1=u\Rightarrow (x^x-a^a)\ln a=\ln(1+u)$ și pentru $x\Rightarrow a\Rightarrow u\to 0$.

$$L=a^{a^a}\lim_{\substack{x\to a\\ u\to 0}}\left[\frac{u}{\ln(1+u)}\cdot\frac{x^x-a^a}{x-a}\cdot\ln a\right]=$$

$$=a^{a^a}\cdot\ln a\cdot\left[\lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}\cdot\lim_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}\right]=$$

$$=a^{a^a}\cdot\ln a\cdot\lim_{x\to a}\left[\frac{x^x-a^x}{x-a}+\frac{a^x-a^a}{x-a}\right]=$$

$$=a^{a^a}\cdot\ln a\cdot\lim_{x\to a}\left[a^x\cdot\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^x-1}{a\left(\frac{x}{a}-1\right)}+a^a\cdot\frac{a^{x-a}-1}{x-a}\right]=$$

$$=a^{a^a}\cdot\ln a\cdot[a^{a-1}\cdot A+a^a\cdot B].$$

Calculăm limita A:

fie $\left(\dfrac{x}{a}\right)^x-1=u\Rightarrow x\cdot\ln\dfrac{x}{a}=\ln(1+u)$ și pentru $x\to a\Rightarrow u\to 0$.

$$A=\lim_{\substack{x\to a\\ u\to 0}}\left[\frac{u}{\ln(1+u)}\cdot\frac{x\ln\frac{x}{a}}{\frac{x}{a}-1}\right]=$$

$$=a\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}\cdot\lim_{x\to a}\ln\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{\frac{x}{a}-1}}=$$

$$=a\ln\lim_{x\to a}\left[1+\left(\frac{x}{a}-1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{x}{a}-1}}=a\ln e=a.$$

Calculăm limita B:
fie $a^{x-a} - 1 = u \Rightarrow (x-a)\ln a = \ln(1+u)$ și pentru $x \to a \Rightarrow u \to 0$.

$$B = \lim_{\substack{x\to a\\ u\to 0}} \left[\frac{u}{\ln(1+u)} \cdot \frac{(x-a)\ln a}{x-a}\right] = \ln a.$$

Deci $L = a^{a^a}\ln a[a^{a-1}\cdot a + a^a \cdot \ln a] = a^{a^a}\cdot a^a(1+\ln a)\ln a$.

38. Efectuăm substituția: $\frac{\sin x}{x} = 1 + u$ și pentru $x \to 0 \Rightarrow u \to 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log \frac{\sin x}{x}}{1-\cos x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ u\to 0}} \left[\frac{\log(1+u)}{u} \cdot \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{1-\cos x}\right] =$$

$$= \lim_{u\to 0} \log(1+u)^{\frac{1}{u}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x - x}{x}}{2\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \log e \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x - x}{x}}{\frac{2}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot x^2} =$$

$$= 2\log e \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{3}\log e,$$

unde în calcule am dezvoltat funcția $f(x) = \sin x$ în serie Mac Laurin, adică: $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$

39. Fie $\cos x = 1 + \alpha$. $\lim_{x\to 0} \frac{\log\cos x}{\sin^2 x} =$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ \alpha\to 0}} \frac{\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{\sin^2 x} = -\lim_{\alpha\to 0} \frac{\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{2(1+\alpha)} = -\frac{\log e}{2}.$$

40. $L = \lim_{x\to 0} \ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \ln \lim_{x\to 0} [1 + (\cos x - 1)]^{\frac{1}{x^2}} =$

$$= \ln \lim_{x\to 0} \left\{[1 + (\cos x - 1)]^{\frac{1}{\cos x - 1}}\right\}^{\frac{\cos x - 1}{x^2}} =$$

$$= \ln e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}} = \ln e^{-\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \ln e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

41. Fie $E = \arcsin x - \operatorname{arctg} x \Rightarrow \sin E =$
$= \sin(\arcsin x)\cos(\operatorname{arctg} x) - \sin(\operatorname{arctg} x)\cos(\arcsin x) =$

$$= x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2} =$$

$$= \frac{x(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow E = \arcsin\frac{x(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1+x^2}},$$

Iar în calcule s-a ținut cont de următoarele reguli de calcul: fie $\cos(\operatorname{arctg} x) = a$, $b = \operatorname{arctg} x \Rightarrow \cos b = a$ și $x = \operatorname{tg} b \Rightarrow$
$\Rightarrow a = \cos b = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 b}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, iar pentru a determina semnul vor trasa diagrama compunerii celor două funcții:

$$\mathbf{R} \xrightarrow{\operatorname{arctg}} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cap [0, \pi] \xrightarrow{\cos} [-1, 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathbf{R} \xrightarrow{\operatorname{arctg}} \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{\cos} (0, 1]}_{\cos \circ \operatorname{arctg}} \Rightarrow \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

Fie $\sin(\operatorname{arctg} x) = a$, $b = \operatorname{arctg} x \Rightarrow \sin b = a$ și

$$x = \operatorname{tg} b \Rightarrow a = \sin b = \frac{\operatorname{tg} b}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 b}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\pm\sqrt{1+x^2}}$, iar diagrama compunerii este:

$$\underbrace{\mathbf{R} \xrightarrow{\operatorname{arctg}} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cap \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \xrightarrow{\sin} [-1, 1]}_{\sin \circ \operatorname{arctg}}$$

Fie $\cos(\arcsin x) = a$, $\arcsin x = b \Rightarrow \cos b = a$ și $\sin b = x \Rightarrow a = \cos b = \pm\sqrt{1-\sin^2 b} = \pm\sqrt{1-x^2}$, iar pentru a determina semnul vor trasa diagrama compunerii:

$$[-1,\ 1] \xrightarrow{\arcsin} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \cap [0,\ \pi] \xrightarrow{\cos} [-1,\ 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [-1,\ 1] \xrightarrow{\cos \text{ arc}} \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \xrightarrow{\sin} [0,\ 1] \Rightarrow$$

($\cos \circ \arcsin$)

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}.$$

Iar limita se va calcula:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\arcsin\dfrac{x(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1+x^2}}}{\dfrac{x(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1+x^2}}} \cdot \frac{\dfrac{x(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1+x^2}}}{x^2}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x(1+\sqrt{1-x^2})} = 0.$$

42. Conform exercițiului precedent,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\arcsin\dfrac{x(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1+x^2}}}{\dfrac{x(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1+x^2}}} \cdot \frac{\dfrac{x(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1+x^2}}}{x^3}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})} = \frac{1}{2}.$$

43. Vom determina limita folosind metoda inducției matematice.

$$L_1 = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{12}.$$

$$L_2 = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{2}(\cos 3x+\cos x)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos 3x}{2x^2} + \frac{1-\cos x}{2x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{3}{2}x}{2x^2} +$$

$$+ \frac{1}{2}L_1 = \frac{9}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{10}{4} = \frac{2(2+1)(2\cdot 2+1)}{12}.$$

$$L_3 = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{2}(\cos 3x+\cos x)\cos 3x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos^2 3x}{2x^2} + \frac{1-\cos x\cos 3x}{2x^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{(1-\cos 3x)(1+\cos 3x)}{2x^2} + \frac{1-\dfrac{1}{2}(\cos 4x+\cos 2x)}{2x^2}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin^2\dfrac{3}{2}x\cdot 2\cos^2\dfrac{3}{2}x}{2x^2} + \frac{1-\cos 4x}{4x^2} + \frac{1-\cos 2x}{4x^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin^2\dfrac{3}{2}x}{x^2}\cdot 2\cos^2\frac{3}{2}x + \frac{2\sin^2 2x}{4x^2} + \frac{2\sin^2 x}{4x^2}\right] =$$

$$= 2\cdot\frac{9}{4} + 2 + \frac{1}{2} = 7 = \frac{3(2+1)(2\cdot 3+1)}{12}.$$

Raționamentul continuă, determinînd astfel:

$$L_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}.$$

Valoarea limitei o putem determina mai ușor folosind o relație de recurență și condițiile inițiale:

fie $L_n = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x \cos 2x \ldots \cos nx}{x^2} =$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x\cos 2x\ldots\cos(n-1)x}{x^2}\cdot\cos nx + \right.$

$\left. + \frac{1-\cos nx}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\ldots\cos(n-1)x}{x^2}\cdot$

$\cdot \lim_{x\to 0}\cos nx + \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos nx}{x^2} = L_{n-1} + \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{nx}{2}}{x^2} =$

$= L_{n-1} + 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{\left(\frac{nx}{2}\right)^2\cdot 4}\cdot n^2 = L_{n-1} + \frac{n^2}{2} \Rightarrow L_n = L_{n-1} + \frac{n^2}{2}$

(am determinat o relație de recurență), iar condiția inițială este $L_1 = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} =$

$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot 4} = \frac{1}{2}.$

Deci am obținut: $\begin{cases} L_1 = \frac{1}{2} \\ L_n = L_{n-1} + \frac{n^2}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$L_2 = L_1 + \frac{2^2}{2}$

$L_3 = L_2 + \frac{3^2}{2}$

$L_4 = L_3 + \frac{4^2}{2}$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$L_n = L_{n-1} + \frac{n^2}{2};$

adunînd cele $n-1$ egalități și reducînd termenii asemenea obținem:

$$L_n = L_1 + \frac{2^2+3^2+\ldots+n^2}{2} = \frac{1+2^2+3^2+\ldots+n^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}.$$

44. Cazul de nedeterminare „$0\cdot\infty$",

$$L = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - 1\right)\left(1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1}{\left(1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}\left(1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\right] = 1.$$

45. $\lim_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right) = \lim_{x\to\infty} x\operatorname{arctg}\frac{1}{(2x+1)} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\cdot\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{2x+1}}{\frac{1}{2x+1}}\right) = \frac{1}{2}.$$

46. Fie $1-x = y$ cînd $x\to 1$ atunci $y\to 0$;

$$\lim_{y\to 0} y\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(1-y) = \lim_{y\to 0} y\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}y = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}y} = \frac{2}{\pi}.$$

47. Cazul de nedeterminare „$0\cdot\infty$".

$$L = \lim_{x\to\infty}\left[x\cdot\operatorname{arctg}\frac{\frac{x+1}{x+2} - \frac{x}{x+2}}{1+\frac{x+1}{x+2}\cdot\frac{x}{x+2}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[x\cdot \operatorname{arctg}\frac{x+2}{2x^2+5x+4}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{x+2}{2x^2+5x+4}}{\dfrac{x+2}{2x^2+5x+4}}\cdot\frac{\dfrac{x+2}{2x^2+5x+4}}{1}\cdot x\right] = \frac{1}{2}$$

unde în calcule s-a aplicat relația:

$$\operatorname{arctg} x \pm \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x\pm y}{1\mp xy}.$$

48. Cazul de nedeterminare „$\frac{0}{0}$"

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{2-x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\dfrac{2x}{2-x^2}}{\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{2-x^2}}\cdot\frac{\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{2x}\cdot(2-x^2)\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2x}{2-x^2}}{\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{2-x^2}}\cdot\lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}\cdot 2 = 1\cdot\ln e\cdot 2 = 2.$$

49. i) Cazul de nedeterminare „1^∞"

$$L = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\dfrac{2}{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}-2}}\right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}-2}}\right]^{\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}-2}{2}\cdot n}$$

$$= e^{\frac{1}{2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{a_1}-1+\sqrt[n]{a_2}-1)n} =$$

$$= e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_1^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{a_2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right)} = e^{\frac{1}{2}(\ln a_1+\ln a_2)} =$$

$$= e^{\ln\sqrt{a_1a_2}} = \sqrt{a_1a_2},$$ unde în calcule s-a aplicat și

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a.$$

ii) $$L = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}\sqrt[n]{a_i}-k}{k}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}(\sqrt[n]{a_i}-1)}{k}\right]^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}\left(a_i^{\frac{1}{n}}-1\right)}{k}\right]^{\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{k}\left(a_i^{\frac{1}{n}}-1\right)}}\right\}^{\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}\left(a_i^{\frac{1}{n}}-1\right)}{k}\cdot n} =$$

$$= e^{\frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_i^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}} = e^{\frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k}\ln a_i} = e^{\ln\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}} =$$

$$= \sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}.$$

50. Efectuăm substituția: $x-\frac{\pi}{2} = y$, pentru $x\to\frac{\pi}{2} \Rightarrow y\to 0$.

$$L = \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}}\frac{\sqrt{-\ln|\cos y|}}{y} = \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}}\sqrt{\frac{\ln|\cos y|}{\cos y-1}\cdot\frac{1-\cos y}{y^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \sqrt{\ln\left|1+(\cos y-1)^{\frac{1}{\cos y-1}}\right|\cdot\frac{2\sin^2\frac{y}{2}}{y^2}} =$$

$$= \sqrt{\ln e\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

51. $E_n = \lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}\ldots\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$

$$E_1 = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

$$E_n = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\ldots\sqrt[n-1]{\cos(n-1)x}}{x^2}\cdot\sqrt[n]{\cos nx} + \right.$$

$$\left. + \frac{1-\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}\right) \text{ sau } E_n = E_{n-1} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos nx)}{x^2(\sqrt[n]{\cos^{n-1}nx}+\sqrt[n]{\cos^{n-2}nx}+\ldots+1)} = \frac{n^2}{2}\cdot\frac{1}{n} = \frac{n}{2},$$

deci am obținut relația de recurență: $E_n = E_{n-1} + \dfrac{n}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow E_2 = E_1 + 1$, $E_3 = E_2 + \dfrac{3}{2}$, ..., $E_n = E_{n-1} + \dfrac{n}{2}$, adunînd relațiile și reducînd termenii asemenea obținem:

$$E_n = E_1 + \frac{1}{2}(2+3+\ldots+n) = \frac{1+2+3+\ldots+n}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{4}.$$

52. $a_n^2 = \sin^2 x - \dfrac{1}{4} + a_{n-1}$; $a_2 - a_1 \geqslant 0$; $a_n - a_{n-1} =$

$$= \frac{a_n^2 - a_{n-1}^2}{a_n + a_{n-1}} = \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{a_n + a_{n-1}} \geqslant 0,$$

deci folosind metoda inducției s-a observat că șirul este monoton crescător.

Șirul este mărginit, deoarece:

$a_n^2 = \sin^2 x - \dfrac{1}{4} + a_{n-1} \leqslant \sin^2 x - \dfrac{1}{4} + a_n$, deci $a_n^2 - a_n + \dfrac{1}{4} - \sin^2 x \leqslant 0$, adică $0 \leqslant a_n \leqslant \dfrac{1+2\sin x}{2}$. Cum șirul este și mărginit, înseamnă că este convergent. Trecînd la limită, în relația de recurență vom obține:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1+2\sin x}{2} \text{ adică } \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

53. În exercițiile **53, 54, 55, 56, 57, 58,** vom aplica următoarea proprietate:

Fie $f,\ g : (a,\ b) - \{0\} \to \mathbf{R}$, $0 \leqslant a < b$ și $g(x) > 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Dacă α_{kn} este un șir cu $\alpha_{kn} \neq 0$ și convergent către zero, adică conform teoremei de convergență cu ε pentru $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$, astfel încît $|\alpha_{kn}| < \varepsilon$ pentru $\forall n > N(\varepsilon)$ și $k \leqslant n$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\alpha_{kn}) = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} g(\alpha_{kn})$ dacă limita a doua există.

Fie $f(x) = \operatorname{tg} x$, $g(x) = x$, $x \in (0,\ 1)$ și șirul $\alpha_{kn} = \dfrac{2k}{n^2}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$, $g(x) = x > 0$ și cum $0 < \alpha_{kn} \leqslant$

$\leqslant \dfrac{2n}{n^2} = \dfrac{2}{n}$ pentru orice $k \leqslant n$, avem $\alpha_{kn} \to 0$.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g(\alpha_{kn}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right] = 1, \text{ deci } \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\operatorname{tg}\frac{2k}{n^2}\right) = 1.$$

54. Aplicăm proprietatea logaritmică:

$$A = e^{\ln A}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} e^{\ln \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{k} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)}.$$

Fie $f(x) = \ln(1 + x)$, $g(x) = x$, $x \in (0, 1)$ iar şirul $\alpha_{kn} = \frac{k}{n^2}$. Avem $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln(1 + x) =$

$= \ln \lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$. Cum $0 < \alpha_{kn} \leqslant \frac{1}{n}$ atunci pentru $\forall k \leqslant n$, avem $\alpha_{kn} \to 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g(\alpha_{kn}) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

Deci $L = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

55. $L = \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \cos \frac{ka}{n\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\ln \prod\limits_{k=1}^{n} \cos \frac{ka}{n\sqrt{n}}} =$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\cos \frac{ka}{n\sqrt{n}}\right)}.$$

Fie $f(x) = \ln(\cos x)$, $g(x) = -\frac{1}{2} x^2$, $x \in (0, 1)$ şi şirul $\alpha_{kn} = \frac{a}{n\sqrt{n}} \cdot k$.

Avem $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \left[-\frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(\cos x)\right]^{-\frac{1}{2}x^2} =$

$$= \lim_{x\to 0} \ln[1 + (\cos x - 1)]^{-\frac{1}{2}x^2} =$$

$$= \ln \lim_{x\to 0} \left\{[1 + (\cos x - 1)]^{\frac{1}{\cos x - 1}}\right\}^{\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{-\frac{1}{2}x^2}} = \ln e = 1.$$

Cum $0 < \alpha_{kn} < \frac{1}{n\sqrt{n}}$, atunci pentru $\forall k \leqslant n$ avem $\alpha_{kn} \to 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g(\alpha_{kn}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{n\sqrt{n}} k\right)^2\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{n^3} \cdot k^2\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = -\frac{a^2}{6}.$$

Deci $L = e^{-\frac{a^2}{6}}$.

56. $L = e^{\frac{1}{p+1}}$.

57. Fie $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$, $x \in (0, 1)$ şi şirul $\alpha_{kn} = \frac{k}{n^2}$. Avem $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Cum $0 < \alpha_{kn} \leqslant \frac{1}{n^2}$ pentru $\forall k \leqslant n$, atunci $\alpha_{kn} \to 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g(\alpha_{kn}) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{1}{2}.$$

Deci valoarea limitei este $\frac{1}{2}$.

58. $L = \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^3}\right) = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \ln \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^3}\right)} =$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k^2}{n^3}\right)}.$$

Fie $f(x) = \ln(1+x)$, $g(x) = x$, $x \in (0, 1)$ și șirul $\alpha_{kn} = \frac{k^2}{n^3}$.

Avem $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) = \ln \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} =$

$= \ln e = 1$.

Cum $0 < \alpha_{kn} \leqslant \frac{1}{n^3}$, atunci pentru $\forall\, k \leqslant n$, avem $\alpha_{kn} \to 0$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} g(\alpha_{kn}) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] =$

$= \frac{1}{3}$. Deci limita este $e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$.

59. Vom efectua substituția $x - 1 = t$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{Ax^n + Bx^p + C}{(x-1)^2} = \lim_{t\to 0}\frac{A(1+t)^n + B(1+t)^p + C}{t^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{A + B + C + t(nA + pB) + t^2(C_n^2\cdot A + C_n^2\cdot B) + t^3 P(t)}{t^2} =$$

$= \lim\limits_{t\to 0}[C_n^2\cdot A + C_p^2\cdot B + tP(t)] = C_n^2\cdot A + C_p^2\cdot B$, iar $P(t)$ este un polinom de gradul $[\max(n, p) - 3]$ în t.

60. $f(x) = \sqrt{9x^4 - 24x^3 + 6x^2 + 5} - (\alpha x^p + \beta x + \gamma) =$

$= x^2\left[\sqrt{9 - 24\cdot\frac{1}{x} + 6\cdot\frac{1}{x^2} + 5\cdot\frac{1}{x^4}} - x^{p-2}\left(\alpha + \beta\frac{1}{x^{p-1}} + \right.\right.$

$\left.\left. + \gamma\cdot\frac{1}{x^p}\right)\right]$. Dacă $p \neq 2$ sau dacă $p = 2$ și $\alpha \neq 3$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)| = \infty$; rezultă deci condițiile necesare $p = 2$, $\alpha = 3$.

Înlocuind și apoi amplificînd cu conjugata, pe baza condițiilor din enunț obținem: $\beta = -4$, $\gamma = -4$.

61. i) Dacă $\exists j \in \{1, \ldots, m\}$ astfel încît $\alpha_j < 0$, atunci domeniul de definiție al lui f este sau un interval mărginit sau mulțimea vidă. Dacă $\alpha_j = 0$ și $\beta_j \geqslant 0$ și presupunînd că $\beta_l = 0 \Rightarrow \gamma_l \geqslant 0$, atunci f este definită pe o semidreaptă de forma (a, ∞).

Dacă $\alpha_j = 0$ și $\beta_j < 0$ și presupunînd în plus că $\beta_l = 0 \Rightarrow \gamma_l \geqslant 0$ atunci f este definită pe o semidreaptă de forma $(-\infty, a)$. Dacă $\alpha_j = \beta_j = 0$ și $\gamma_j \geqslant 0$, atunci f este definită pe $\mathbf{R}$ etc.

ii) Funcția f poate avea limită finită la $+\infty$ doar dacă $\alpha_j \geqslant 0$ pentru $\forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ și $\alpha_j > 0$ pentru cel puțin un j (presupunînd în plus că $\alpha_l = 0 \Rightarrow \beta_l \geqslant 0$ și $\alpha_l' = \beta_l' = 0 \Rightarrow \gamma_l' \geqslant 0$). Scriind:

$f(x) = x\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\alpha_k + \beta_k\cdot\frac{1}{x} + \gamma_k\cdot\frac{1}{x^2}} - \lambda - \frac{\mu}{x}\right]$ rezultă că

dacă $\lambda \neq \sum\limits_{k=1}^{m}\sqrt{\alpha_k}$ atunci $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)| = \infty$. Dacă $\lambda = \sum\limits_{k=1}^{m}\sqrt{\alpha_k}$

atunci: $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{m}\left(\sqrt{\alpha_k x^2 + \beta_k x + \gamma_k} - x\sqrt{\alpha_k}\right) - \mu =$

$$= \sum_{k=1}^{m}\frac{\beta_k x + \gamma_k}{x\left(\sqrt{\alpha_k + \beta_k\cdot\frac{1}{x} + \gamma_k\cdot\frac{1}{x^2}} + \sqrt{\alpha_k}\right)} - \mu$$

deci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{\beta_k}{\sqrt{\alpha_k}} - \mu$.

Condiția ca limita funcției să fie zero este ca:

$$\lambda = \sum_{k=1}^{m}\sqrt{\alpha_k},\quad \mu = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\frac{\beta_k}{\sqrt{\alpha_k}}.$$

62. $a_k = \lim\limits_{x\to 0}\left\{[1 + (-x\sin kx)]^{\frac{1}{-x\sin kx}}\right\}^{\frac{-x\sin kx}{x^2}} =$

$= e^{-k}\cdot\frac{1}{2}$ $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{e^k} = \frac{1}{e-1}\left[1 - \left(\frac{1}{e}\right)^n\right]$; fiind su-

ma unei progresii geometrice de rație $\frac{1}{e}$, avînd n termeni, iar primul termen fiind egal $\frac{1}{e}$. Obținem $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{e-1}$.

63. i) Vom calcula suma $S_n' = \sum_{k=1}^{n} \cos kx$.

Ținînd cont de relația:

$$\sin\frac{x}{2}\cos kx = \frac{1}{2}\left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right]$$

și particularizînd indicele de însumare obținem:

$$\sin\frac{x}{2}\cos x = \frac{1}{2}\left[\sin\frac{3}{2}x - \sin\frac{1}{2}x\right]$$

$$\sin\frac{x}{2}\cos 2x = \frac{1}{2}\left[\sin\frac{5}{2}x - \sin\frac{3}{2}x\right]$$

$$\sin\frac{x}{2}\cos 3x = \frac{1}{2}\left[\sin\frac{7}{2}x - \sin\frac{5}{2}x\right]$$

.....

$$\sin\frac{x}{2}\cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right].$$

Însumînd cele n — egalități și reducînd termenii asemenea obținem:

$$\sin\frac{x}{2}\cdot S_n' = \frac{1}{2}\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{1}{2}x\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n' = \frac{\sin\frac{n}{2}x\cdot\cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Deci suma S_1 o vom determina din S_n' în care $x = \frac{\pi}{2n} \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_1 = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\cdot\frac{\pi}{2n}\right)\cdot\cos\left(\frac{n+1}{2}\cdot\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\frac{\pi}{4n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{S_1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left[\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{n+1}{n}\right)\cdot\frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}\cdot\frac{4}{\pi}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

ii) $$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{x}{k(k+1)}}{\cos\frac{x}{k}\cdot\cos\frac{x}{k+1}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{x}{k}-\frac{x}{k+1}\right)}{\cos\frac{x}{k}\cos\frac{x}{k+1}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{x}{k}\cos\frac{x}{k+1} - \sin\frac{x}{k+1}\cos\frac{x}{k}}{\cos\frac{x}{k}\cos\frac{x}{k+1}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{k} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{tg}\frac{x}{k+1}\right) = \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\frac{x}{n+1}$$ deci limita este egală cu tg x.

iii) Vom forma numărul complex:

$$S_3 + \mathrm{i}\,S_4 = (\cos a + \mathrm{i}\sin a)\sum_{k=0}^{n} x^k(\cos b + \mathrm{i}\sin b)^k =$$

$$= (\cos a + \mathrm{i}\sin a)\cdot\frac{1-[x(\cos b + \mathrm{i}\sin b)]^{n+1}}{1 - x(\cos b + \mathrm{i}\sin b)}.$$

Aplicînd *formula lui Moivre*, amplificînd cu conjugata numitorului și apoi separînd partea reală de partea

imaginară prin identificarea celor două numere complexe vom obține:

$$S_3 = \frac{x^{n+2}\cdot\cos(a+nb) - x^{n+1}\cos[a+(n+1)b] - x\cos(a-b) + \cos a}{x^2 - 2x\cos b + 1}$$

$$S_4 = \frac{x^{n+2}\cdot\sin(a+nb) - x^{n+1}\cos[a+(n+1)b] - x\sin(a-b) + \sin a}{x^2 - 2x\cos b + 1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_3 = \frac{\cos a - x\cdot\cos(a-b)}{x^2 - 2x\cos b + 1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_4 = \frac{\sin a - x\sin(a-b)}{x^2 - 2x\cos b + 1};$$

iar în calcule s-a ținut cont de faptul că dacă $|x| < 1$ atunci $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

iv) Se folosește identitatea:

$$\frac{1}{4^k\cdot\cos^2\frac{a}{2^k}} = \frac{1}{4^{k-1}\cdot\sin^2\frac{a}{2^{k-1}}} - \frac{1}{4^k\cdot\sin^2\frac{a}{2^k}},$$

însumînd cele n-relații pentru $k \in \{1, 2, ..., n\}$ și reducînd termenii asemenea obținem:

$$S_5 = \frac{1}{\sin^2 a} - \frac{1}{4^n\cdot\sin^2\frac{a}{2^n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_5 = \frac{1}{\sin^2 a} - \frac{1}{a^2}.$$

v) Se folosește identitatea:

$$\cos^3(3^{k-1}a) = \frac{1}{4}[\cos(3^k a) + 3\cos(3^{k-1}a)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(-1)^{k-1}}{3^{k-1}}\cdot\cos^3(3^{k-1}a) = \frac{1}{4}\left[\frac{(-1)^{k-1}}{3^{k-1}}\cos(3^k a) + \frac{(-1)^{k-1}}{3^{k-2}}\cos(3^{k-1}a)\right];$$

însumînd cele n-relații pentru $k \in \{1, 2, ..., n\}$ și reducînd termenii asemenea obținem:

$$S_6 = \frac{1}{4}\cdot\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\cdot\cos(3^n a) + \frac{3}{4}\cos a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_6 = \frac{3}{4}\cos a,$$

deoarece $-1 \leqslant \cos 3^n a \leqslant 1 \Rightarrow \frac{(-1)^n}{3^{n-1}} \leqslant \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\cdot\cos 3^n a \leqslant$

$\leqslant \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$ și trecînd la limită în dubla inegalitate obținem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\cos(3^n a) = 0.$$

64. i) Cazul de nedeterminare: „1^∞"

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sum_{k=1}^{n}\cos(a_k x)}{n}\right]^{\frac{1}{x\sin x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left\{\left[1 + \frac{\sum_{k=1}^{n}(\cos a_k x - 1)}{n}\right]^{\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}(\cos a_k x - 1)}}\right\}^{\frac{-2\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{a_k x}{2}}{n\cdot x\sin x}} =$$

$$= e^{\frac{-2}{n}\lim_{x\to 0}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{a_k x}{2}}{x\sin x}} = e^{\frac{-2}{n}\lim_{x\to 0}\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sin\frac{a_k x}{2}}{\frac{a_k x}{2}}\right)^2\cdot\frac{a_k^2}{4}}{\frac{\sin x}{x}}} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}a_k^3},$$

ii) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sum_{k=1}^{n}(1-\cos(a_k x))}{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(a_k x)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{a_k x}{2}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{\pi}{2} - \arccos(a_k x)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(a_k x)\right)} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(a_k x)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\sin\frac{a_k x}{2}}{\frac{a_k x}{2}}\right)^2 \cdot \left(\frac{a_k x}{2}\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{\pi}{2} - \arccos(a_k x)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(a_k x)\right)} \cdot a_k x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} x^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2}{x \sum_{k=1}^{n} a_k} = 0,$$

unde în calcule s-a ținut cont de relația:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

65. Fie $t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{1+t^2}{2t} = A \cdot \frac{1}{t} + B \cdot \frac{1-t^2}{2t}$ și aplicînd metoda coeficienților nedeterminați obținem:

$$A = -B = 1.$$

Fie $u = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow u = C \cdot \frac{1}{4} + D \cdot \frac{1-u^2}{2u}$ și aplicînd metoda coeficienților nedeterminați obținem:

$$C = 1, \quad D = -2.$$

Analog, determinăm $E = -F = \frac{1}{2}$.

i) $\frac{1}{\sin 2^k \alpha} = \operatorname{ctg} 2^{k-1}\alpha - \operatorname{ctg} 2^k \alpha$, însumînd cele $n+1$ relații, pentru $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ și reducînd termenii asemenea obținem: $S_1 = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg} 2^n \alpha$, iar $\lim_{n\to\infty} S_1$ nu există deoarece funcțiile trigonometrice nu au limită în punctele $\pm\infty$.

ii) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^k} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^k} - 2 \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^{k-1}}$, însumînd cele $n+1$ relații și reducînd termenii asemenea obținem $S_2 = \frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^n} - 2\operatorname{ctg} 2\alpha \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_2 = \frac{1}{\alpha} - 2\operatorname{ctg} 2\alpha$.

iii) $S_3 = \operatorname{ctg}\alpha - 2^n \cdot \operatorname{ctg} 2^n\alpha \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_3$ nu există deoarece funcția ctg nu are limită în punctul $+\infty$.

66. Cum $x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha \Rightarrow x^2 - 2\cos\alpha \cdot x + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \cos\alpha \pm i \sin\alpha$

$\frac{1}{x} = \cos\alpha \mp i \sin\alpha$ și aplicînd *formula lui Moivre* obținem:

$$x^k = \cos k\alpha \pm i \sin k\alpha$$

$$\frac{1}{x^k} = \cos k\alpha \mp i \sin k\alpha \Rightarrow S = \sum_{k=1}^{n}\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) = 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \cos k\alpha =$$

$$= 2 \cdot \frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{n}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2 \cdot \cos\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right] = \frac{2}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

67. Aplicăm relația trigonometrică $\operatorname{arctg} x \pm \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x \pm y}{1 \mp xy}$.

i) $\operatorname{arctg} \frac{1}{k^2+k+1} = \operatorname{arctg} \frac{1}{k} - \operatorname{arctg} \frac{1}{k+1}$, însumînd cele n diferențe pentru $k \in \{0, 1, 2, \ldots n\}$ și reducînd termenii asemenea obținem $S_1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_1 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

ii) $\operatorname{arctg} \frac{2}{k^2+2k+1} = \operatorname{arctg} (k+2) - \operatorname{arctg} k$; însumînd cele n diferențe și reducînd termenii asemenea obținem $S_2 = \operatorname{arctg} n + \operatorname{arctg} (n-1) - \operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{1-n-n^2} - \operatorname{arctg} (-3) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_2 = -\operatorname{arctg} (-3)$.

iii) $\operatorname{arctg} \frac{1}{2k^2} = \operatorname{arctg} \frac{k}{k+1} - \operatorname{arctg} \frac{k-1}{k}$; însumînd cele n relații și reducînd termenii asemenea, obținem $S_3 = \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_3 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

iv) Mai întîi demonstrăm că $\operatorname{tg} (\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}$;

Fie $\operatorname{tg} (\operatorname{arcctg} x) = a$, notăm $\operatorname{arcctg} x = b \Rightarrow x = \operatorname{ctg} b$ și $\operatorname{tg} b = a \Rightarrow a = \operatorname{tg} b = \frac{1}{\operatorname{ctg} b} = \frac{1}{x}$. Deci $\operatorname{arcctg} (k^2+k+1) = \operatorname{arctg} \frac{1}{k^2+k+1} = \operatorname{arctg} (k+1) - \operatorname{arctg} k$; însumînd cele n egalități și reducînd termenii asemenea obținem $S_4 = \operatorname{arctg} \left(1 + \frac{2}{n}\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_4 = \frac{\pi}{4}$.

v) $\operatorname{arcctg} 2k^2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2k^2} = \operatorname{arctg} (2k+1) - \operatorname{arctg} (2k-1)$, însumînd cele n egalități și reducînd termenii asemenea

obținem $S_5 = \operatorname{arctg} (2n+1) - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1} \Rightarrow \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_5 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

vi) $\operatorname{arctg} \frac{k^2+k+2}{k^2+k} = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{k^2+k+1} = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{1+k(k+1)} = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} (k+1) - \operatorname{arctg} k$.

$S_6 = \frac{1}{4n+2} \cdot \operatorname{tg} [\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} (4n+2) - \operatorname{arctg} 1] = 1 \Rightarrow \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_6 = 1$.

68. Rezolvăm ecuația binomă: $x^{n+1} = 1 = \cos 0 + i \sin 0 \Rightarrow x_k = \cos \frac{2k\pi}{n+1} + i \sin \frac{2k\pi}{n+1}$ pentru $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{1-x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k - 1 + 1}{1-x_k} = \sum_{k=1}^{n} \left(-1 + \frac{1}{1-x_k}\right) + \Rightarrow$$

$$= -n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-x_k} = -n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \cos \frac{2k\pi}{n+1} - i \sin \frac{2k\pi}{n+1}} =$$

$$= -n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - \cos \frac{2k\pi}{n+1} + i \sin \frac{2k\pi}{n+1}}{\left(1 - \cos \frac{2k\pi}{n+1}\right)^2 + \left(\sin \frac{2k\pi}{n+1}\right)^2} =$$

$$= -n + \sum_{k=1}^{n} \frac{2 \sin^2 \frac{k\pi}{n+1} + 2i \sin \frac{k\pi}{n+1} \cos \frac{k\pi}{n+1}}{2\left(1 - \cos \frac{2k\pi}{n+1}\right)} =$$

$$= -n + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + i \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{n+1}\right) = -n + \frac{n}{2} + \Rightarrow$$

$$+ \frac{i}{2} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{n+1} = -\frac{n}{2}$$ (iar în calcule s-a ținut cont de

împărțirea a două numere complexe, care se realizează prin amplificarea fracției cu conjugata numitorului).

Acum calculăm suma $\sigma = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{n+1} =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ctg}\left[\pi - \frac{(n-k+1)\pi}{n+1}\right] = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ctg}\left(-\frac{(n-k+1)\pi}{n+1}\right) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \operatorname{ctg} \frac{(n-k+1)\pi}{n+1} = -\sigma \Rightarrow \sigma = -\sigma \Rightarrow 2\sigma = 0 \Rightarrow \sigma = 0.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = -\frac{1}{2}$.

69. $l_s = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \dfrac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{2x \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \cdot \left(1-\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)} =$

$$= \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2x} = \frac{1}{2}.$$

$l_d = a$ Pentru ca f să aibă limită în $x = 0$ trebuie ca:

$l_s = l_d = l(0) \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ ș mai mult chiar, cum f are limită în punctul $x = 0$ și această limită este egală cu valoarea funcției în $x = 0$, atunci putem spune că funcția f este continuă în $x = 0$.

70. O funcție $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ are limită în punctul de acumulare $x_0 \in [a, b]$ dacă și numai dacă limitele laterale în acest punct există și sînt egale, adică $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) =$

$= \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

i) $l_s(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} \dfrac{\sin 4(x-1)}{5(x-1)} = \frac{4}{5}$ ș

$l_d(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} \left[\frac{1}{5} \dfrac{\operatorname{tg} 3(x-1)}{\sin (x-1)} + \frac{1}{5}\right] = \frac{4}{5} \Rightarrow l_s(1) = l_d(1) =$

$= \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{4}{5}$.

ii) $l_s(-1) = \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x<-1}} \left(4 \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}\right) = 4 \cdot \dfrac{3\pi}{2} = 6\pi$

$l_d(-1) = \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} \dfrac{\sin 2(x^2-1)\pi}{x^2-1} = 2\pi \Rightarrow l_s(-1) \neq l_d(-1)$

71. Dacă $m > 1$, $n > 1$, $E = \dfrac{\sqrt[m]{x^{\frac{1}{m}}\left(x^{\frac{n-1}{n}}+1\right)}}{\sqrt[n]{x^{\frac{1}{n}}\left(x^{\frac{m-1}{n}}+1\right)}}$

dacă $m = 1, n > 1, E = \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}} x^{\frac{n-1}{n}} + \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}} \to \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}$ cînd $x \to 0$,

dacă $m = 1$, $n < 1$, $E \to +\infty$ cînd $x \to 0$,

dacă $m < 1$, $n < 1$, $E = \dfrac{x^{\frac{1}{m}}\left(1+x^{\frac{1-n}{m}}\right)^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}\left(1+x^{\frac{1-m}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}}$

și $\lim\limits_{x\to 0} E = \begin{cases} 0 & \text{pentru } m < n \\ 1 & \text{pentru } m = n \\ +\infty & \text{pentru } m > n. \end{cases}$

72. Fie $h = f \circ g$, adică $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dacă } x \in \mathbf{Q} - \{0\} \\ 1 & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \\ & \text{sau } x = 0. \end{cases}$

Fie $x_n \to 0$ un șir de numere raționale nenule, atunci $h(x_n) = x_n^2 \to 0$.

Dacă $y_n \to 0$ este șir de numere iraționale atunci $h(y_n) = 1$. Deci, $\lim_{x \to 0} h(x)$ nu există.

73. i) Fie $f(x) = x + x^2 + \ldots + x^n = x \cdot \frac{1 - x^n}{1 - x}$

Cum f este o funcție polinomială, este derivabilă, deci:

$$f'(x) = 1 + 2x + \ldots + nx^{n-1} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

ii) $f''(x) = 2 + 6x + 12x^2 + \ldots + n(n-1)x^{n-2} =$

$$= \frac{-n(n+1)x^{n+2} + (n^2 + 3n - 2)x^{n+1} + (n^2 - 3n + 2)x^n}{(1-x)^4} -$$

$$- \frac{n(n-1)x^{n-1} - 2(1-x)}{(1-x)^4} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$$ unde în calcule s-a ținut cont de: $|x| < 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x^n = 0$.

CAPITOLUL III

CONTINUITATE. DERIVABILITATE

DERIVATA DE ORDINUL n. APLICAȚII ALE DERIVATELOR: tangenta, subtangenta, normala, subnormala duse la o curbă dată; unghiul sub care se intersectează două curbe; unghiul sub care se vede o curbă dintr-un punct dat. DERIVATA UNUI DETERMINANT, PROPRIETATEA ȘI TEOREMA LUI DARBOUX. PRIMITIVE

PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

1. Să se studieze continuitatea și derivabilitatea următoarelor funcții:

i) $f(x) = \frac{|2 + x| - |3 - x|}{|1 + x| + |4 - x|}$; ii) $f(x) = 1 + \ln \frac{|x| + 1}{|x - 1|}$;

iii) $f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{|\sin x| e^{nx} + \cos x}{e^{nx} + 1}$;

iv) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + |x|}{x^2 - x} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0; \end{cases}$

v) $f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & \text{pentru } x \text{ rațional} \\ 0 & \text{pentru } x \text{ irațional.} \end{cases}$

vi) $f(x) = \begin{cases} |x| \cdot e^{-\frac{1}{|x+1|}} & \text{pentru } x \in (-\infty, -1) \\ \frac{1}{2} & \text{pentru } x = -1 \\ e^{\frac{1}{\sin(x+1)}} & \text{pentru } x \in (-1, 0). \end{cases}$

vii) $f(x) = |x^2 - 4x| \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}$.

2. Să se determine valorile constantei reale α astfel încît următoarele funcții să fie continue:

i) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\alpha^2}{4}x^2 + \alpha x + 1} & \text{pentru } x \geq 1 \\ 3|\alpha| \cdot x & \text{pentru } x < 1. \end{cases}$

ii) $f(x) = \begin{cases} 2 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{pentru } x \in [-1, 0) \\ \alpha & \text{pentru } x = 0 \\ 2^{-\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2 \cdot e^x}} & \text{pentru } x \in (0, \infty). \end{cases}$

3. Să se cerceteze derivabilitatea următoarelor funcții:

i) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x \cdot \sin^3 x & \text{dacă } |x| \leq \frac{\pi}{4} \\ \frac{3\sqrt{2}}{4} x \cdot \operatorname{sgn} x + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4} & \text{dacă } |x| > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

ii) $f : [0, \pi] \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \max [\cos x, \cos^3 x]$$

iii) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \max [|1 - x|, 3|x|]$$

iv) $f : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \max \left[\frac{1}{2} \operatorname{tg} x, \operatorname{tg} x \sin x\right]$$

4. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

i) Să se traseze graficul funcției.

ii) Să se arate că derivata funcției este discontinuă în origine.

5. Să se arate că $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

este derivabilă în orice punct, iar derivata este nemărginită în vecinătatea originii.

6. Să se determine numerele reale a și b astfel încît funcția $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ dată prin:

$$f(x) = \begin{cases} \ln^3 x & \text{pentru } x \in (0, e] \\ ax + b & \text{pentru } x \in (e, \infty) \end{cases}$$

să fie derivabilă în $x = e$.

7. Se consideră funcția:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - x^4} + \frac{1}{2} \arcsin \sqrt{x^2}$$

i) Să se determine domeniul de definiție.

ii) Să se determine $a, b, c \in \mathbf{R}$ astfel încît funcția:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pentru } -1 < x < 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{pentru } x \geq 0 \end{cases}$$

să fie de două ori derivabilă pe domeniul considerat.

8. Se dă funcția $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x = 0 \text{ sau } x = 1 \\ x \sin \frac{1}{x} & \text{dacă } 0 < x < \frac{1}{\pi} \\ 0 & \text{dacă } \frac{1}{\pi} \leq x \leq 1 - \frac{1}{\pi} \\ (1 - x) \sin \frac{1}{1 - x} & \text{dacă } 1 - \frac{1}{\pi} < x < 1 \end{cases}$$

i) Să se determine mulțimea punctelor din segmentul $[0, 1]$ în care funcția f este continuă.

ii) Să se determine mulțimea punctelor din segmentul $[0, 1]$ în care funcția f este derivabilă.

(Fac. de matematică)

9. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție reală cu valori reale și Γ_f graficul său:

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbf{R}\} \subseteq \mathbf{R}^2.$$

Se consideră aplicația $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ a planului real $\mathbf{R}^2$ în el însuși, dată prin relația $u((x, y)) = (2x + 1, 3x + 4y + 5)$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

a) Să se arate că imaginea $u(\Gamma_f)$ a mulțimii Γ_f prin u este graficul unei funcții $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

b) Să se arate că, dacă funcția f este derivabilă atunci și funcția g este derivabilă și reciproc.

c) Să se găsească relația dintre funcțiile f', g'.

d) Presupunînd că funcția f este definită prin $f(x) = \sin x$ pentru $\forall\, x \in \mathbf{R}$, să se determine $g'(1)$.

(Fac. de matematică)

10. Se consideră intervalele $(0, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$ și funcțiile $u : (0, 1) \to (2, 3)$, $v : (2, 3) \to (3, 4)$, $w : (0, 1) \to (3, 4)$ verificînd relațiile:

i) $w = v \circ u$

ii) $v(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2 & \text{dacă } 2 < x \leqslant 2 + \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} & \text{dacă } 2 + \frac{1}{2} < x < 3 \end{cases}$

iii) $w(x) = \sin x + 3$ dacă $0 < x < 1$.

a) Să se determine punctele în care funcția u este continuă.

b) Să se determine punctele în care funcția u este derivabilă.

(Fac. de matematică)

11. Să se calculeze derivata de ordinul n ($n \in \mathbf{N}$) a funcției:

i) $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

ii) $f(x) = \dfrac{1 + x}{1 - x}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

iii) $f(x) = \dfrac{1 + x}{\sqrt{x}}$, $x \in (0, \infty)$.

iv) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x - 2)(x - 3)}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{2, 3\}$.

v) $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2(x^2 - 1)}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

vi) $f(x) = \dfrac{1}{a^2 - b^2x^2}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\pm \dfrac{a}{b}\right\}$.

vii) $f(x) = x\,e^x$, $x \in \mathbf{R}$.

viii) $f(x) = x^2\,e^{-2x}$, $x \in \mathbf{R}$.

ix) $f(x) = (1 - x^2)\cos x$, $x \in \mathbf{R}$.

x) $f(x) = (3x^2 - 4)\,e^x$, $x \in \mathbf{R}$.

xi) $f(x) = x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

xii) $f(x) = x^p(1 - x)^q$, $x \in \mathbf{R}$, $p, q \in \mathbf{N}$.

xiii) $f(x) = \ln(a + x)$, $x \in (-a, \infty)$.

xiv) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x \in (0, \infty)$.

xv) $f(x) = x \ln(1 - x^2)$, $x \in (-1, 1)$.

xvi) $f(x) = \ln\dfrac{a + bx}{a - bx}$, $x \in \left(-\dfrac{a}{b}, \dfrac{a}{b}\right)$.

xvii) $f(x) = \dfrac{1}{n!}x \cdot \ln(2 + \alpha x)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $x \in \left(-\dfrac{2}{\alpha}, \infty\right)$

xviii) $f(x) = x^3 \ln x$, $x \in (0, \infty)$.

xix) $f(x) = x^p \ln x$, $x \in (0, \infty)$.

12. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = x^n$. Să se calculeze:

$$E = f(1) + \frac{f'(1)}{1!} + \frac{f''(1)}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!},\ n \in \mathbf{N}.$$

13. Fie $f(x) = \dfrac{x + 2}{(x + 1)^2}$.

i) Să se calculeze: $S = f(0) + f'(0) + \ldots + f^{(2n)}(0) - 1$ în două moduri.

ii) Pentru ce valori raționale ale lui x, expresia $y = f(x) \in \mathbf{Z}$?

14. Să se calculeze suma:

$$S = \sum_{k=1}^{n} (3k - 2) \cdot x^{3k-3}$$

pentru $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

15. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$. Să se calculeze suma $S_n(x) = 1 + 2^2x + 3^2x^2 + \ldots + n^2x^{n-1}$ și $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ pentru $x \in (0, 1)$ folosind derivatele funcției f.

(Institutul Politehnic)

16. Scrieți ecuația tangentei la curba $y = x^3 + 3x^2 - 5$ care este perpendiculară pe dreapta $2x - 6y + 1 = 0$.

17. Arătați că subtangenta parabolei de gradul n, $y = x^n$ este egală cu a n-a parte din abscisa punctului de contact.

18. Calculați subtangenta și subnormala la curbele $y = x^3$, $y^2 = x^3$, $xy^2 = 1$.

19. Scrieți ecuația tangentei și a normalei la parabola $x^2 = 4ay$ în punctul (x_0, y_0); arătați că tangenta la parabolă în punctul de abscisă $x_0 = 2am$ are ca ecuație dreapta $x = \frac{y}{m} + am$.

20. Scrieți ecuația normalei la curba $y = -\sqrt{x} + 2$ în punctul de intersecție cu prima bisectoare.

21. Calculați aria triunghiului format de normalele și de coarda care trece prin punctele de intersecție ale dreptei de ecuație $x - y + 1 = 0$ cu parabola $y = x^2 - 4x + 5$.

22. Determinați ecuația tangentei la curba

$$x^2(x + y) = a^2(x - y)$$

în punctul $(0, 0)$.

23. Trasați normala la curba $y = x \ln x$ care este paralelă cu dreapta de ecuație $2x - 2y + 3 = 0$.

24. Arătați că subtangentele la curba $y = a\,e^{bx}$ (a și b fiind constante reale) sînt constante.

25. Arătați că subnormala la curba $y = x \ln (cx)$ (c fiind o constantă arbitrară) este de patru ori proporțională cu abscisa, ordonata și suma dintre abscisa și ordonata punctului de contact.

26. Calculați unghiul sub care se intersectează curbele:

i) $y = \frac{x+1}{x+2}$ și $y = \frac{x^2+4x+8}{16}$; ii) $y = (x-2)^2$ și $y = 4x - x^2 - 4$; iii) $y^2 = 2x$ și $x^2 + y^2 = 8$;
iv) $x^2 + y^2 - 4x = 1$ și $x^2 + y^2 + 2y = 9$;
v) $y = \sin x$ și $y = \cos x$, $x \in [0, \pi]$.

27. Arătați că segmentul de tangentă al astroidei cuprins între axele carteziene are o lungime constantă a.

28. Calculați lungimea tangentei, normalei, subtangentei și subnormalei la:

i) cardioida: $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$

ii) astroida: $\begin{cases} x = a\sin^3 t \\ y = a\cos^3 t \end{cases}$

iii) cercul: $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$

29. Arătați că tangenta la hiperbola echilateră $xy = a^2$, limitată de axele de coordonate este împărțită în două segmente congruente de punctul de tangență.

30. Arătați că hiperbolele $xy = a^2$, $x^2 - y^2 = b^2$ se intersectează într-un unghi drept.

31. Arătați că lungimea subnormalei la hiperbola $x^2 - y^2 = a^2$ în punctul curent este egală cu abscisa acestui punct.

32. Să se afle punctele de pe dreapta $x + 2y - 6 = 0$ din care cercul de ecuație $x^2 + y^2 - 4 = 0$ se vede sub un unghi drept.

33. Să se afle unghiul sub care este văzută elipsa de ecuație $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} - 1 = 0$ din punctul $P(5, 7)$.

34. Să se afle unghiul sub care este văzută parabola de ecuație $y^2 - 2px = 0$ din punctul $A(12p, 7p)$.

35. Să se scrie ecuația normalelor la parabola care are ecuația $y = x^2 - 4x + 5$ în punctele de intersecție ale acesteia cu dreapta de ecuație $x - y + 1 = 0$.

36. Să se determine constantele reale a și b astfel încît curbele de ecuații $f(x) = ax^2 + bx + 1$ și $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$ să fie tangente în punctul $T\left(2, \dfrac{2}{3}\right)$.

37. Fie $f(x) = \begin{vmatrix} x^5 & x^4 & x^3 & 1 \\ 5x^4 & 4x^3 & 3x^2 & 0 \\ 20 & 12 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Să se demonstreze că $x = 1$ este o rădăcină dublă.

38. Fie $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix}$

Să se demonstreze că $x = 1$ este o rădăcină triplă.

39. Să se demonstreze că valoarea determinantului

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin(x+a) & \sin(x+b) & \sin(x+c) & \sin(x+d) \\ \cos(x+a) & \cos(x+b) & \cos(x+c) & \cos(x+d) \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ e_1 & f_1 & g_1 & h_1 \end{vmatrix}$$

nu depinde de x (unde $a, a_1, b, b_1, c, c_1, d, d_1, e_1, f_1, g_1, h_1 \in \mathbf{R}$).

40. Fie a_i, $x \in \mathbf{R}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Să se arate că:

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} x + a_1 & x & \ldots & x \\ x & x + a_2 & \ldots & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & \ldots & x + a_n \end{vmatrix} =$$

$$= a_1 a_2 \ldots a_n \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \cdot x + 1 \right).$$

Proprietatea lui Darboux

(sau proprietatea valorilor intermediare)

Fie I un interval, $f : I \to \mathbf{R}$. f are proprietatea lui Darboux pe intervalul I dacă pentru orice puncte $x_1 < x_2$ din I și oricare ar fi numărul c situat între $f(x_1)$ și $f(x_2)$, există cel puțin un punct $\xi \in (x_1, x_2)$ astfel încît $f(\xi) = c$. Adică, o dată cu valorile luate între două puncte ale intervalului I, funcția ia și valorile intermediare y, atunci cînd x parcurge intervalul dintre cele două puncte.

Intuitiv, proprietatea lui Darboux se mai poate enunța:

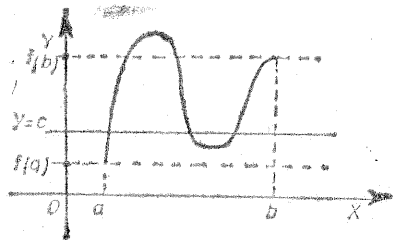


Fig. III.P.

dacă f este o funcție continuă pe $[a, b]$ și $f(a) \neq f(b)$, atunci orice dreaptă $y = c$, situată între dreptele $y = f(a)$ și $y = f(b)$ intersectează graficul neîntrerupt al funcției f cel puțin o dată.

P1) Orice funcție continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux pe acel interval.

P2) Dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă și $f(a) \cdot f(b) < 0$, atunci există cel puțin un punct $\xi \in (a, b)$ astfel încît $f(\xi) = 0$.

P3) Dacă f este o funcție continuă pe un interval I și nu se anulează pe I, atunci f păstrează același semn pe I.

P4) Orice funcție derivată are proprietatea lui Darboux. Se spune că $f : I \to \mathbf{R}$, unde I este un interval real, este o derivată (sau funcție derivată), dacă există o funcție derivabilă $F : I \to \mathbf{R}$ astfel încît $F'(x) = f(x)$ pentru $\forall x \in I$ (iar funcția F se numește *primitiva funcției* f).

P5) Dacă $f : I \to \mathbf{R}$ are proprietatea lui Darboux, atunci ea nu are nici un punct de discontinuitate de prima speță. Deci o funcție cu proprietatea lui Darboux pe un interval I poate să fie discontinuă în orice punct din I și nu poate avea puncte de discontinuitate de prima speță.

Fie $x_0 \in I$, x_0 se numește *punct de discontinuitate de prima speță*, dacă funcția are limite laterale finite în x_0. În cazul cînd limitele laterale sînt egale, evident ele sînt diferite de $f(x_0)$, deoarece funcția nu este continuă în x_0.

41. Folosind proprietatea lui Darboux, să se determine mulțimea valorilor următoarelor funcții:

a) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N}$, $I = [0, \infty)$;

b) $f(x) = x^{2n-1}$, $x \in \mathbf{R}$;

c) $f(x) = a^x$, $(a > 0, a \neq 1)$, $x \in \mathbf{R}$;

d) $f(x) = \sin x$, $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

e) $f(x) = \cos x$, $I = [0, \pi]$;

f) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

g) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $I = (0, \pi)$.

42. Folosind proprietatea lui Darboux pentru funcțiile continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

i) $f(x) = x^5 - 3x - 1$

ii) $f(x) = x \cdot 2^x - 1$

să se arate că se anulează cel puțin într-un punct $c \in (1, 2)$, respectiv $c \in (0, 1)$.

iii) Să se determine valorile parametrului $m \in \mathbf{R}$ astfel ca ecuația $(m-3)x^2 - 2(m-1)x + 4m - 3 = 0$ să admită o singură rădăcină în intervalul $(2, 3)$.

43. *Funcții care au proprietatea lui Darboux (exemplu):*

$f : (0, 2\pi) \to \mathbf{R}$ definită prin:

$f(x) = 1 + \sin x$ are proprietatea lui Darboux, deoarece:

$$\sin x = y \in [-1, 1] \Rightarrow$$

$$\inf_{x \in (0, 2\pi)} f(x) = 0 \quad \text{și} \quad \sup_{x \in (0, 2\pi)} f(x) = 2 \Rightarrow \text{pentru}$$

$\alpha \in [0, 2]$ ecuația $\sin x = \alpha - 1$ are totdeauna o soluție reală.

44. *Există funcții care nu au proprietatea lui Darboux:*

i) fie $f : (-2, 2) \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru} \quad -2 < x \leqslant 0 \\ x + 1 & \text{pentru} \quad 0 < x < 2 \end{cases}$$

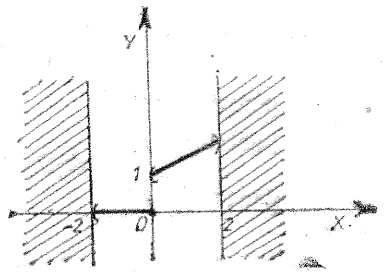


Fig. III.44 i

nu are proprietatea lui Darboux, pentru că ia valoarea 0 în punctul $x = -1$ și valoarea $\frac{3}{2}$ în $x = \frac{1}{2}$ fără a lua toate valorile intermediare între (0, 1), cum ar fi de exemplu $y = \frac{1}{2}$. Dar restricția funcției pe (0, 2) are proprietatea lui Darboux

ii) fie $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{pentru} \quad x \in [-1, 0) \\ x & \text{pentru} \quad x \in [0, 1] \end{cases}$$

nu are proprietatea lui Darboux pe $[-1, 1]$, deoarece pentru $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{4}$ și $C = \frac{1}{3}$, avem $f(x_1) = \frac{1}{2}$,

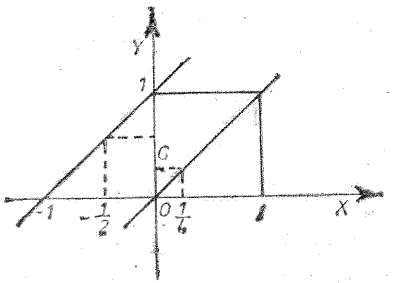


Fig. III.44 ii

$f(x_2) = \frac{1}{4}$ și $f(x_1) < C < f(x_2)$, deci nu există nici un punct $\xi \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ astfel încît $f(\xi) = \frac{1}{3}$.

Observație: restricția funcției f la intervalul $[0, 1]$ are proprietatea lui Darboux.

iii) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } x < 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \\ \sin\frac{1}{x} & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$ definită pe $\mathbf{R}$,

această funcție nu are proprietatea lui Darboux pe $\mathbf{R}$ și pe nici un interval care-l conține pe 0.

iv) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{pentru } x < 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$

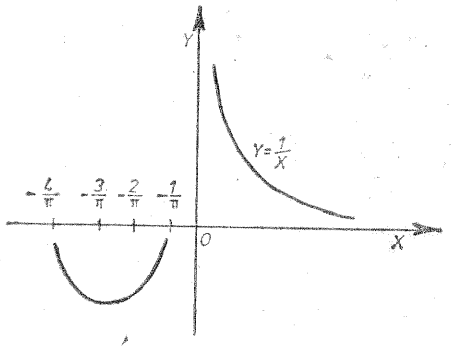


Fig. III.44 iv

Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = \infty \Rightarrow f$ nu are proprietatea lui Darboux; dacă f ar avea această proprietate, atunci ea nu are nici un punct de discontinuitate.

45. *Există funcții care au proprietatea lui Darboux fără a fi continue:*

i) fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{pentru } x \neq 0 \\ a & \text{pentru } x = 0 \end{cases} \quad \text{cu } |a| \leqslant 1$$

este discontinuă în $x = 0$, dar are proprietatea lui Darboux.

ii) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{pentru } x > 0 \\ 1 & \text{pentru } x \leqslant 0 \end{cases}$ definită pe $\mathbf{R}$

f nu are limită la dreapta lui 0.
$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\leqslant 0}} f(x) = 1$, dar f are proprietatea lui Darboux.

iii) fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

Cum $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nu există, rezultă că f este discontinuă în $x = 0$, totuși ea admite primitive, adică este o funcție derivată:

fie $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

Funcția F este derivabilă pe $\mathbf{R}$ și

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

Funcția $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$g(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

are o primitivă G pe $\mathbf{R}$, deoarece este continuă pe $\mathbf{R}$.

Construim aplicația $H : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $H = G - F$

Funcția H este o primitivă a lui f. Într-adevăr H este derivabilă și $H'(x) = (G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) =$

$$= g(x) - F'(x) = f(x) = \begin{cases} \cos \dfrac{1}{x}, & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

deci f are proprietatea lui Darboux, deoarece este derivată.

46. *Dacă $f : I \to \mathbf{R}$ are proprietatea lui Darboux atunci $f(I)$ este un interval. Reciproca, în general nu este adevărată: dacă $f(I)$ este un interval nu rezultă că f are proprietatea lui Darboux.*

i) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } -1 \leqslant x < 0 \\ x & \text{pentru } 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$

este definită pe $I = [-1, 1]$; $f(I) = [0, 1]$ deci este un interval, dar f nu are proprietatea lui Darboux.

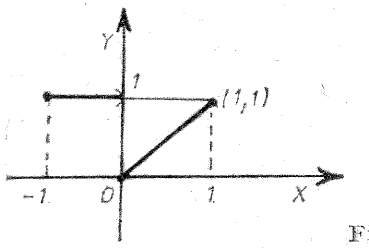


Fig. III.46 i

Dacă luăm intervalul $Y = [-1, 0] \subset I$, avem $f(Y) = \{0, 1\}$, deci $f(Y)$ nu este un interval (între $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$, funcția nu mai ia nici o valoare intermediară pe $[-1, 0]$).

ii) $f(x) = \begin{cases} x & \text{pentru } x \in [0, 2] \\ 2x - 3 & \text{pentru } x \in (2, 3] \end{cases}$

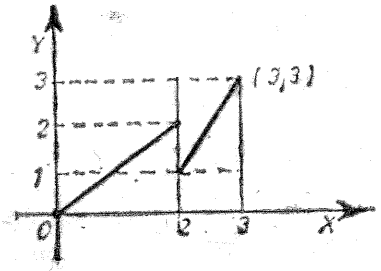


Fig. III.46 ii

funcția transformă intervalul $[0, 3]$ în el însuși, dar nu are proprietatea lui Darboux.

iii) Funcțiile σ, sgn, $[x]$, $\{x\}$ nu au proprietatea lui Darboux pe intervale de forma $[-a, a]$ cu $a > 0$, dar au această proprietate pe $(-\infty, 0)$ sau $(0, \infty)$, (se exceptează $[x]$).

Definiții.

1° $\sigma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x < 0 \\ 1 & \text{pentru } x \geqslant 0 \end{cases}$

numită funcția treapta unitate a lui Heaviside.

2° $[x] = \begin{cases} -n - 1 \text{ cu } -n - 1 \leqslant x < -n & \text{pentru } x < 0 \\ n \quad \text{cu} \quad n \leqslant x < n + 1 & \text{pentru } x \geqslant 0 \end{cases}$

și $n \in \mathbf{N}$ — numită funcție partea întreagă.

3° $\{x\} = x - [x]$ numită funcția partea zecimală.

4° $\operatorname{sgn} : \mathbf{R} \to \{-1, 0, 1\}$ definită prin:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{pentru } x < 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \\ 1 & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$$

numită funcție signum (signatură) sau funcția semn.

iv) $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = \dfrac{2}{x}$ are proprietatea că $f(-1) = -2$, $f(1) = 2$, deci ia valorile -2 și 2, totuși ea nu ia valoarea zero. Cum f nu este continuă în $x = 0$ se contrazice propoziția P1, că orice funcție continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux pe acel interval.

v) Funcția discontinuă $f : [0, 3] \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pentru } x \in [0, 1] \\ 3 - x & \text{pentru } x \in (1, 3] \end{cases}$$

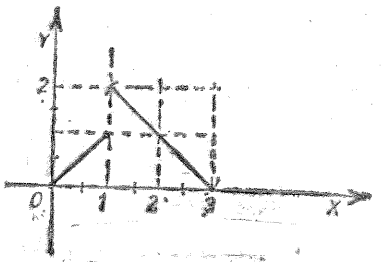


Fig. III.46 v

nu are proprietatea lui Darboux, deoarece nu transformă un interval într-un interval, de exemplu $f\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right) = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup \left\{\frac{3}{2}\right\}$ care nu este un interval.

Evident, privind superficial proprietatea lui Darboux se putea face un raționament eronat și anume:

„Această funcție are proprietatea lui Darboux deoarece transformă un interval de exemplu $[0, 3]$ într-un interval și anume în $[0, 2]$".

47. *Este posibil ca suma, diferența sau produsul a două funcții care au proprietatea lui Darboux să nu aibă această proprietate:*

i) Fie $f_1, f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f_1(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{dacă } x > 0 \\ 1 & \text{dacă } x \leqslant 0 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} -\sin \frac{1}{x} & \text{dacă } x > 0 \\ 0 & \text{dacă } x \leqslant 0 \end{cases}$$

$$(f_1 + f_2)(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x > 0 \\ 1 & \text{dacă } x \leqslant 0 \end{cases}$$ nu are *proprietatea lui Darboux*

ii) fie $f_1, f_2 : [0, 1] \to \mathbf{R}$ definite prin

$$f_1(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & \text{dacă } 0 < x \leqslant 1 \\ 2 & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} -\cos \frac{1}{x} & \text{dacă } 0 < x \leqslant 1 \\ 2 & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{și } f(x) = (f_1 + f_2)(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } 0 < x \leqslant 1 \\ 4 & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

nu are *proprietatea lui Darboux.*

Deci cu toate că f_1, f_2 au *proprietatea lui Darboux*, funcția sumă nu are *proprietatea lui Darboux.*

iii) Vom considera două funcții derivate (deci două funcții cu *proprietatea lui Darboux)* al căror produs să nu aibă *proprietatea lui Darboux*:

fie $F, G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{m} \sin \frac{m}{x} & \text{pentru } x \neq 0, \quad m \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{2}{m} x \sin \frac{m}{x} & \text{pentru } x \neq 0, \quad m \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

Funcția F este derivabilă și derivata sa este:

$$F'(x) = \begin{cases} \frac{2}{m} x \sin \frac{m}{x} - \cos \frac{m}{x} & \text{pentru } x \neq 0, \ m \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

Funcția G fiind continuă, are primitivă, este o funcție derivată, deci are *proprietatea lui Darboux.*

Funcția $\varphi_m : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$\varphi_m(x) = G(x) - F'(x) = \begin{cases} \cos \frac{m}{x} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

este o funcție derivată

și $\psi_m : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$\psi_m(x) = \begin{cases} \sin \frac{m}{x} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$ este o derivată

Cum φ_2 este o derivată, rezultă că și funcția f,

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}[1 - \varphi_2(x)] = \begin{cases} \sin^2 \frac{1}{x} & \text{pentru } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

este o derivată.

Considerăm funcțiile derivate $f_1, f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin:

$$f_1(x) = f(x) - \psi_1(x) = \begin{cases} \sin^2 \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x} & \text{pentru } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

$$f_2(x) = f(x) + \psi_1(x) = \begin{cases} \sin^2 \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} & \text{pentru } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

Fie $h(x) = (f_1 f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4} \sin^2 \frac{2}{x} & \text{pentru } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$

se observă că h nu are *proprietatea lui Darboux* într-un interval care conține originea.

Funcțiile f_1 și f_2 sînt funcții derivate și mărginite.

Teorema lui Darboux

Dacă $f : I \to \mathbf{R}$ este o funcție derivabilă pe un interval I, atunci derivata sa f' are *proprietatea lui Darboux* — adică nu poate trece de la o valoare la alta fără a trece prin toate valorile intermediare.

Consecințele *proprietății lui Darboux* se vor extinde și asupra *teoremei lui Darboux.*

Primitive

Fie $f : I \to \mathbf{R}$, unde I este un interval. Spunem că *f admite primitive pe I*, dacă există o funcție $F : I \to \mathbf{R}$ astfel încît:

i) F este derivabilă pe I

ii) $F'(x) = f(x)$ pentru $\forall x \in I$ și F se numește *primitiva funcției f.*

— O funcție care admite primitive are *proprietatea lui Darboux*, deoarece dacă f admite primitive, atunci există o

funcție derivabilă F cu proprietatea că $F' = f$ și cum derivata oricărei funcții derivabile are proprietatea lui Darboux atunci f are *proprietatea lui Darboux.*

— Dacă $f : Y \to \mathbf{R}$ este o funcție astfel încît $f(Y) = \{f(x) \mid x \in Y\}$ nu este interval, atunci funcția f nu admite primitive, căci dacă f ar admite primitive, atunci f ar avea *proprietatea lui Darboux*, adică o dată cu două valori ar lua orice valoare intermediară, deci imaginea lui Y prin f ar fi un interval — ceea ce contrazice ipoteza.

— Orice funcție continuă admite primitive.

48. *Funcții care admit primitive:*

i) $f(x) = \arccos \frac{|x|}{1 + |x|}$ admite primitive deoarece este continuă.

ii) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{pentru } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$ f este continuă, deci admite primitivă.

iii) $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{pentru } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$ admite primitive:

fie G o primitivă a funcției continue.

$$g(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

atunci

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} - 2G(x) & \text{pentru } x \neq 0 \\ -2G(0) & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

este o primitivă continuă a funcției date și

$$F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x} - 2G(x) + 2G(0)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} x \cos \frac{1}{x} - 2 \lim_{x\to 0} \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} = 0 - 2G'(0) = g(0) = 0.$$

iv) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$ admite primitive.

v) $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$ admite primitive;

fie G o primitivă a funcției continue

$$g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

atunci

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} - 2G(x) & \text{pentru } x \neq 0 \\ -2G(0) & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

este o primitivă continuă a funcției date și

$$F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 2G(x) + 2G(0)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[x \sin \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{G(x) - G(0)}{x} \right] = 0 = f(0).$$

49. *Există funcții care nu admit primitive:*

i) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pentru } x < 0 \\ 1 & \text{pentru } x \geqslant 0 \end{cases}$

nu admite primitive, deoarece imaginea lui $\mathbf{R}$ prin f este mulțimea $\{-1, 1\}$, deci cum această mulțime nu este un interval rezultă că f nu admite primitive.

ii) funcțiile σ, sgn, $[x]$, $\{x\} = x - [x]$ nu admit primitive, căci dacă ar avea primitive, ele ar fi funcții derivate și cu form *teoremei lui Darboux*, ar avea *proprietatea lui Darboux*.

Pentru $f(x) = [x]$ mai putem spune: deoarece $f(\mathbf{R}) = \mathbf{Z}$, rezultă că f nu are proprietatea lui Darboux (transformă un interval într-o mulțime) și deci nu poate avea primitive pe $\mathbf{R}$.

De asemenea, *funcția lui Dirichlet*, $D : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $D(x) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } x \in \mathbf{Q} \\ 0 & \text{pentru } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$ nu are primitive pe $\mathbf{R}$, deoarece nu are proprietatea lui Darboux, fapt care rezultă din relația $D(\mathbf{R}) = \{0, 1\}$, fiindcă $\{0, 1\}$ este o mulțime și nu un interval.

iii) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pentru } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \\ 1 & \text{pentru } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$ și $f\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) =$

$= \{-1, 0, 1\}$ nu este un interval, deci f nu admite primitive.

iv) $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x} & \text{pentru } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ 1 & \text{pentru } x = 0 \\ \frac{\operatorname{tg} x + x}{x} & \text{pentru } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

nu admite primitive. Funcția f se mai poate scrie ca:

$f(x) = g(x) + h(x)$, unde

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} x}{x} & \text{pentru } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 1 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} -1 & \text{pentru } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \\ 1 & \text{pentru } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

cum g admite primitive fiind funcție continuă și h nu admite primitive, rezultă că f nu admite primitive.

v) funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$

nu admite primitive. Este suficient să arătăm că f nu are *proprietatea lui Darboux*, dar se poate raționa și direct: dacă $F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ar fi o primitivă a funcției f, atunci am avea

$$f(0) = F'(0) = F'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{(x - 0) \cdot F'(C_x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(C_x) = \infty, \text{ ceea ce este absurd}$$

(în calcule, pentru F s-a aplicat *teorema lui Lagrange*).

vi) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, cu $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ pentru } x \in \mathbf{Q} \\ 2^x \text{ pentru } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$ nu admite primitive pe $\mathbf{R}$.

Fie $u, v: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $u(x) = x^2$ și $v(x) = 2^x$ atunci ecuația $u(x) = v(x) \Leftrightarrow x^2 = 2^x$ admite trei rădăcini reale și distincte: $x_1 \in (-1, 0)$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$ și se observă că pentru orice $x > 4$, avem $v(x) > u(x)$. Se observă că $f([6, 7] \cap \mathbf{Q}) = [36, 49] \cap \mathbf{Q}$ pe cînd $f([6, 7] - \mathbf{Q}) \subset [2^6, 2^7] = [64, 128]$ ceea ce arată că f nu are *proprietatea lui Darboux* și deci f nu are primitive pe $\mathbf{R}$.

vii) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \leqslant 0 \\ \sin\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x} & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$

nu admite primitive. Fie funcțiile $f_1(x) = 0$ pentru $x \in (-\infty, 0]$ $f_2(x) = \sin\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ pentru $x \in (0, \infty)$ admit ca primitive funcțiile:

$$F_1(x) = C \qquad \text{pentru } x \in (-\infty, 0]$$

$$F_2(x) = x\sin\frac{1}{x} \quad \text{pentru } x \in (0, \infty).$$

Dacă funcția f ar admite o primitivă:

$$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ atunci } F|_{(-\infty, 0]} = F_1 + C_1 = K$$
$$F|_{(0, \infty)} = F_2 + C_2$$

Cum orice primitivă este o funcție derivabilă, deci continuă, atunci primitiva F este continuă în origine, deci:

$$\left.\begin{aligned} F(0) &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \leqslant 0}} F(x) = K \\ F(0) &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} F(x) = C_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow K = C_2 \text{ și}$$

F va fi de forma: $F(x) = \begin{cases} K & \text{pentru } x \leqslant 0 \\ K + x\sin\dfrac{1}{x} & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$

dar $F'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \sin\dfrac{1}{x}$

pentru orice $x > 0$, nu are limită în $x = 0$, deci F nu este derivabilă în $x = 0$.

viii) $f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{x} & \text{pentru } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$ nu posedă primitive pe $\mathbf{R}$,

deoarece dacă G este o primitivă a funcției continue g,

$$g(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

$$H(x) = \begin{cases} -x^2\sin\dfrac{1}{x} + 2G(x) & \text{pentru } x \neq 0 \\ 2G(0) & \text{pentru } x = 0 \end{cases} \text{ dar}$$

$H|_{(-\infty, 0)}$ este o primitivă a funcției $f|_{(-\infty, 0)}$
$H|_{(0, \infty)}$ este o primitivă a funcției $f|_{(0, \infty)}$

Dacă F ar fi o primitivă a lui f, atunci

$$F|_{(-\infty, 0)} = H|_{(-\infty, 0)} + C_1$$
$$F|_{(0, \infty)} = H|_{(0, \infty)} + C_2$$

F fiind derivabilă, este continuă, deci

$$\left.\begin{aligned} F=(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} F(x)=C_1+2G(0)\\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x)=C_2+2G(0)\end{aligned}\right\}\Rightarrow C_1=C_2=C$$

deci F este de forma:

$$F(x)=\begin{cases} -x^2\sin\dfrac{1}{x}+2G(x)+C & \text{pentru } x\neq 0\\ 2G(0) & \text{pentru } x=0\end{cases}$$

și

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}+$$

$+2\lim_{x\to 0}\dfrac{G(x)-G(0)}{x-0}=2G'(0)=2g(0)=0$ dar $f(0)=\dfrac{1}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow F'(0)\neq f(0)$, adică F nu este o primitivă a funcției f.

ix) $f(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x} & \text{pentru } x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}\\ \dfrac{1}{2} & \text{pentru } x=0\end{cases}$

nu admite primitive pe $\mathbf{R}$, deoarece: fie $H(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ pentru $\forall x\neq 0$, dar $H|_{(-\infty,\,0)}$ este o primitivă a funcției $f|_{(-\infty,\,0)}$ și $H|_{(0,\,\infty)}$ este o primitivă a funcției $f|_{(0,\,\infty)}$.

Dacă ar exista o primitivă $F:\mathbf{R}-\mathbf{R}$ a lui f, atunci:

$$F|_{(-\infty,\,0)}=H|_{(-\infty,\,0)}+C_1$$
$$F|_{(0,\,\infty)}=H|_{(0,\,\infty)}+C_2$$

Cum F este derivabilă, înseamnă că este continuă pe $\mathbf{R}$, deci:

$$\left.\begin{aligned} F(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} F(x)=C_1\\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x)=C_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow C_1=C_2=C$$

deci F este de forma $F(x)=\begin{cases} H(x)+C & \text{pentru } x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}x+C & \text{pentru } x=0\end{cases}$

atunci $F'(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\dfrac{H(x)+C-F(0)}{x-0}=$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{H(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)=0\neq\dfrac{1}{2}=f(0)$, deci F nu poate fi o primitivă a funcției f.

x) $f(x)=\begin{cases} x & \text{dacă } x\in\mathbf{Q}\\ x^3 & \text{dacă } x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}$ nu posedă primitive pe $\mathbf{R}$,

deoarece imaginea unui interval $(\sqrt{a},\,\sqrt{b})$, prin funcția f nu este un interval, deoarece $f(\sqrt{a})=a^{\frac{3}{2}}<c<b^{\frac{3}{2}}=f(\sqrt{b})$, iar $f(x)\neq C$ pentru $\forall x\in(\sqrt{a},\,\sqrt{b})$, deci f nu admite primitive.

Caz particular: $a=3$, $b=5$, $c=8$.

xi) $f(x)=\begin{cases} |x| & \text{dacă } x\in\mathbf{Q}\\ x^2 & \text{dacă } x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}$ nu admite primitive.

Se analizează ca în exemplul precedent, iar, de exemplu, imaginea intervalului $(\sqrt{15},\,\sqrt{17})$ nu este un interval.

50. *Dacă o funcție $f:[a,\,b]\to\mathbf{R}$ nu admite primitive, nu rezultă în general, că funcția $f^n=f^{n-1}\circ f$ nu admite primitive* $(n\in\mathbf{N})$:

Fie $f:[-1,\,1]\to\mathbf{R}$, definită prin:

$$f(x)=\begin{cases}\cos^2\dfrac{1}{x} & \text{dacă } x\neq 0\\ 0 & \text{dacă } x=0\end{cases}$$ nu admite primitive

fie $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}x^2\sin\dfrac{2}{x}+G(x) & \text{dacă } x\in[-1,\,1]\setminus\{0\}\\ G(0) & \text{dacă } x=0\end{cases}$

unde G este o primitivă a funcției continue

$$g(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{2}{x} & \text{dacă } x\in[-1,\,1]\setminus\{0\}\\ 0 & \text{dacă } x=0\end{cases}$$

Dar $F'(0) = \frac{1}{2} \neq f(0)$, deci f nu admite primitive, iar funcția f este pătratul funcției.

$$h(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$ care posedă primitive (vezi a.v).

51. *Operații cu funcții care admit sau care nu admit primitive:*

i) dacă f și g sînt funcții care nu admit primitive, atunci este posibil ca $f+g$, $f-g$, fg, $f \circ g$ să admită primitive:

$$\text{fie } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in \mathbf{Q} \\ 0 & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases} \quad \text{și} \quad g(x) = 1 - f(x).$$

Funcțiile f, g nu admit primitive, deoarece nu au proprietatea lui Darboux, dar $(f+g)(x) = 1$ pentru orice $x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow f + g = 1_{\mathbf{R}}$ și $(fg)(x) = 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, deci $f+g$, fg admit primitive pe $\mathbf{R}$;

analog $$f \circ g = 1_{\mathbf{R}}.$$

ii) dacă f și g sînt funcții care admit primitive, atunci este posibil ca $f+g$, $f-g$, fg, $f \circ g$ să nu admită primitive:

ii1) fie $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dacă } x = 0 \\ \sin^2 \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dacă } x = 0 \\ \sin^2 \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \end{cases}$$

care admit primitive, dar funcția fg nu admite primitive; fie $F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$F(x) = (fg)(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{dacă } x = 0 \\ -\frac{1}{4} \sin^2 \frac{2}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \end{cases}$$

iar F nu are *proprietatea lui Darboux*, deci produsul fg nu admite primitive.

ii2) fie $$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

funcțiile f, g, $h = g - f$ admit primitive pe $\mathbf{R}$, dar h^2 nu admite primitive:

$$\text{fie } F : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ cu } F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

este o primitivă a funcției f, iar funcția g, admite primitivă fiind continuă,

$$h(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

admite primitive, iar

$$h^2(x) = \begin{cases} \cos^2 \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

nu admite primitive.

52. *Există funcții derivate care nu sînt continue:*

$$\text{Fie } g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \; g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

este derivabilă pe $\mathbf{R}$ și

$$g'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \quad \text{pentru } x \neq 0$$

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 0.$$

Funcția $f = g'$ cu $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ și definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

este o derivată și nu este continuă în $x = 0$.

În particular, f are proprietatea lui Darboux fără a fi continuă.

REZOLVĂRI ȘI RĂSPUNSURI

1. i) Explicitînd funcția obținem:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-5}{2x-3} & \text{pentru } x \in (-\infty, -2] \\ \dfrac{-2x+1}{2x-3} & \text{pentru } x \in (-2, -1] \\ \dfrac{2x-1}{5} & \text{pentru } x \in (-1, 3] \\ 1 & \text{pentru } x \in (3, 4] \\ \dfrac{5}{2x-3} & \text{pentru } x \in (4, \infty) \end{cases}$$

Funcția f este continuă pe tot domeniul de definiție. Funcția f nu este derivabilă pe $\{-2, -1, 3, 4\}$ deoarece în fiecare punct, derivatele laterale sînt diferite.

ii) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } x \in (-\infty, 0] \\ 1 + \ln \dfrac{1+x}{1-x} & \text{pentru } x \in (0, 1) \\ 1 + \ln \dfrac{x+1}{x-1} & \text{pentru } x \in (1, \infty) \end{cases}$

Funcția f este continuă pe $\mathbf{R} \setminus \{1\}$. Funcția f este derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$.

iii) $f(x) = \begin{cases} |\sin x| & \text{dacă } x > 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{dacă } x = 0 \\ |\cos x| & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$

Funcția f este continuă pe $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Funcția f este derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \left[\{0\} \cup \{k\pi\} \cup \left\{(2k-1)\dfrac{\pi}{2}\right\}\right]$ unde $k \in \mathbf{Z}$ adică pe $\mathbf{R} \setminus \left\{k\dfrac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbf{Z}\right\}$.

iv) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x < 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \\ \dfrac{x+1}{x-1} & \text{dacă } x > 0,\ x \neq 1 \end{cases}$

Funcția f este continuă pe $\mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$. Funcția f este derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$.

v) Pentru ca funcția să fie continuă într-un punct $a \in \mathbf{R}$, trebuie ca pentru orice șir $a_n \to a$ să avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$. Vom considera șirurile convergente către a:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \to a, \text{ cu } x_i \text{ rațional}$$
$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots \to a, \text{ cu } y_i \text{ irațional}$$

Va trebui ca $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = f(a) = 0$,

deci $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n^3 - x_n^2) = a^3 - a^2 = 0$, adică $a = 0$ sau $a = 1$. Deci problema continuității se pune în punctele 0 și 1. În aceste puncte, pentru orice șir $x_n \to a$, cu x_n rațional, și pentru orice șir $y_n \to a$ cu y_n irațional, avem:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(a) = 0.$$

Dacă șirul $a_n \to a$, $a = 0$ sau 1, are un număr finit de termeni raționali (iraționali) atunci de la un anumit rang n_0 toți termenii șirului vor fi iraționali (raționali) și ne vom încadra în unul din cazurile de mai sus; deci $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 0$.

Dacă $a_n \to a$ are termeni raționali și iraționali în număr infinit, șirul a_n se poate despărți în două subșiruri distincte,

convergente către a și formate din termeni sau numai raționali sau numai iraționali, iar șirul valorilor funcției va fi convergent către $f(a) = 0$. Deci f este continuă numai în punctele $x = 0$ și $x = 1$.

Cum o funcție discontinuă într-un punct este nederivabilă în acel punct evident negarea propoziției: *f derivabilă $\Rightarrow$ f continuă*, atunci derivabilitatea va fi studiată numai în punctele $x = 0$ și $x = 1$.

Fie $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ pentru x_i rațional
$y_1, y_2, \ldots y_n, \ldots$ pentru y_i irațional
$x_1', x_2', \ldots x_n', \ldots$ pentru x_i' rațional
$y_1', y_2', \ldots y_n', \ldots$ pentru y_i' irațional și orice $i \in \mathbf{N}$.

Vom obține:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n') - f(1)}{x_n' - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x_n')^3 - (x_n')^2}{x_n' - 1} = \lim_{n\to\infty} (x_n')^2 = 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n') - f(1)}{y_n' - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{0 - 0}{y_n' - 1} = 0.$$

Cum pentru cele două șiruri diferite, ambele convergente către 1, limita raportului $\frac{f(a_n) - f(1)}{a_n - 1}$ depinde de alegerea șirului $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, nu există $f'(1)$.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(x_n)^3 - (x_n)^2}{x_n} =$

$$= \lim_{n\to\infty} [(x_n)^2 - x_n] = 0$$

și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(0)}{y_n - 0} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0 - 0}{y_n - 0} = 0.$

Considerații analoage cu cele de la punctul precedent ne conduc la concluzia că pentru orice șir

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \to 0$$

avem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(a_n) - f(0)}{a_n - 0} = 0$, deci f este derivabilă în $x = 0$ și $f'(0) = 0$, deci funcția nu este derivabilă în $\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

vii) $$f(x) = \begin{cases} (x^2 - 4x) \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{pentru } x \in [4, \infty) \\ -(x^2 - 4x) \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{pentru } x \in (0, 4) \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-2) \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}} - (x-4) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x \in [4, \infty) \\ -2(x-2) \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}} + (x-4) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x \in (0, 4). \end{cases}$$

f este continuă pe $(0, \infty)$
f este derivabilă pe $(0, \infty)\setminus\{4\}$.

2. i) $$\lim_{\substack{x\to 1 \\ x\geqslant 1}} \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} x^2 + \alpha x + 1} = \left|\frac{\alpha}{2} + 1\right|$$

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} 3 \mid \alpha \mid x = 3 \mid \alpha \mid.$$

Pentru ca funcția să fie continuă în $x = 1$ trebuie ca $\left|\frac{\alpha}{2} + 1\right| = 3|\alpha|$ adică:

explicitînd modulele obținem:

$$\left|\frac{\alpha}{2} + 1\right| = \begin{cases} \frac{\alpha}{2} + 1 & \text{pentru } \alpha \geqslant -2 \\ -\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) & \text{pentru } \alpha < -2 \end{cases}$$

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha \text{ pentru } \alpha \geqslant 0 \\ -\alpha \text{ pentru } \alpha < 0. \end{cases}$$

Pentru $\alpha \in (-\infty, -2) \Rightarrow -\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) = -3\alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2}{5} \notin (-\infty, -2).$$

Pentru $\alpha \in [-2, 0] \Rightarrow \frac{\alpha}{2} + 1 = -3\alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{2}{7} \in [-2, 0].$$

Pentru $\alpha \in (0, \infty) \Rightarrow \frac{\alpha}{2} + 1 = 3\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2}{5} \in (0, \infty)$.

Restricțiile funcției pe $(-\infty, 1)$ și $[1, \infty)$ sînt funcții continue fiind funcții elementare.

ii) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(2 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right) = 2 \cdot 0 \cdot \frac{3\pi}{2} = 0.$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} 2^{-\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2 e^x}} = 2^{-\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1+x-1}{(\sqrt{1+x}+1)\, x^2 e^x}} = 0.$$

Deci pentru $\alpha = 0$, funcția este continuă în punctul $x = 0$, restricțiile fiind continue deoarece sînt funcții elementare.

3. i) $f'(x) = \begin{cases} 3 \sin^2 x \cdot \cos x \cdot \operatorname{sgn} x, & \text{pentru } |x| < \frac{\pi}{4} \\ \frac{3\sqrt{2}}{4} \operatorname{sgn} x & \text{pentru } |x| > \frac{\pi}{4} \end{cases}$

În punctele $|x| = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4}$, derivabilitatea o vom studia aplicînd definiția funcțiilor derivabile:

$$f'_d\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{4} \\ x>\frac{\pi}{4}}} \frac{\frac{3\sqrt{2}}{4} x + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4} \frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

$$f'_s\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{4} \\ x<\frac{\pi}{4}}} \frac{\sin^3 x - \sin^3 \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{4} \\ x<\frac{\pi}{4}}} \left[\frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} \left(\sin^2 x + \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{3\sqrt{2}}{4},$$

unde în calcule s-a aplicat formula trigonometrică:

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}.$$

$$f'_d\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{\substack{x \to -\frac{\pi}{4} \\ x>-\frac{\pi}{4}}} \frac{-\sin^3 x + \sin^3\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{x + \frac{\pi}{4}} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

$$f'_s\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{\substack{x \to -\frac{\pi}{4} \\ x<-\frac{\pi}{4}}} \frac{\frac{-3\sqrt{2}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4} \frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x + \frac{\pi}{4}} =$$

$$= -\frac{3\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$$

f este derivabilă în punctele $\pm \frac{\pi}{4}$, deci f este derivabilă pe tot domeniul de definiție (restricțiile sînt funcții derivabile fiind funcții elementare).

ii) $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{pentru } \cos x \geqslant \cos^3 x \\ \cos^3 x & \text{pentru } \cos^3 x > \cos x \end{cases} =$

$$= \begin{cases} \cos x & \text{pentru } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \cos^3 x & \text{pentru } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\sin x & \text{pentru } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ -3 \cos^2 x \sin x & \text{pentru } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$$

Restricțiile fiind funcții elementare sînt derivabile, deci problema derivabilității se va pune în punctul $x = \frac{\pi}{2}$:

$$f_d\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} \frac{\cos^3 x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} \frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{x - \frac{\pi}{2}} =$$

$$f_s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = -\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\frac{\pi}{2} - x} = -1,$$

deci f nu este derivabilă în punctul $\frac{\pi}{2}$.

iii) f este derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}$.

iv) Explicităm funcția:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\operatorname{tg} x & \text{pentru } \frac{1}{2}\operatorname{tg} x \geqslant \operatorname{tg} x \cdot \sin x \\ \operatorname{tg} x \cdot \sin x & \text{pentru } \operatorname{tg} x \cdot \sin x > \frac{1}{2}\operatorname{tg} x \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\operatorname{tg} x & \text{pentru } x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \\ \operatorname{tg} x \cdot \sin x & \text{pentru } x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right] \end{cases}.$$

Fie $\mathsf{E} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x \cdot \sin x = \operatorname{tg} x\left(\frac{1}{2} - \sin x\right) =$

$$= -\operatorname{tg} x\left(\sin x - \sin\frac{\pi}{6}\right) = -2 \cdot \operatorname{tg} x \cdot \sin\frac{x - \frac{\pi}{6}}{2} \cos\frac{x + \frac{\pi}{6}}{2}.$$

Semnul expresiei E îl vom analiza cu ajutorul tabelului:

x	0		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$-\operatorname{tg} x$	0	$-$	$-$	$-$	$+$	$+\ 0\ -$	$+$	0
$\sin\frac{x - \frac{\pi}{6}}{2}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\cos\frac{x + \frac{\pi}{6}}{2}$	$+$		$+$	$+$	$+\ 0\ -$	$-$	$-$	$-$
semnul expresiei E	$+$		$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

Fie $\sin\frac{x - \frac{\pi}{6}}{2} > 0 \Rightarrow 0 < \frac{x - \frac{\pi}{6}}{2} < \pi \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{6} < x < 2\pi + \frac{\pi}{6}.$$

Fie $\cos\frac{x + \frac{\pi}{6}}{2} < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{x + \frac{\pi}{6}}{2} < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{5\pi}{6} < x < 3\pi - \frac{\pi}{6}.$$

Deci f este derivabilă pe $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \setminus \left\{\frac{\pi}{6}\right\}$.

4. i) Cum $-1 \leqslant \sin\frac{1}{x} \leqslant 1 \Rightarrow -x^2 \leqslant x^2 \sin\frac{1}{x} \leqslant x^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ graficul funcției $f(x)$ este tangent parabolelor:

$$y = x^2, \quad y = -x^2$$

Din $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x = \dfrac{1}{k\pi} \\ -\dfrac{1}{\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)^2} & \text{pentru } x = \dfrac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi} \\ \dfrac{1}{\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^2} & \text{pentru } x = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \end{cases}$

și $k \in \mathbf{Z}$, rezultă că în vecinătatea originii curba admite o infinitate de bucle tangente celor două parabole. De remarcat că funcția este impară, deci graficul său este simetric față de originea axelor.

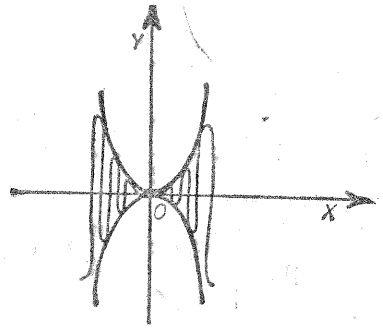


Fig. 4.1

ii) $f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$

și f' este discontinuă în origine, deoarece prima restricție nu are limită în origine: $\lim\limits_{x \to 0} 2x \sin \dfrac{1}{x} = 0$ deoarece $-1 \leqslant \sin \dfrac{1}{x} \leqslant 1 \Rightarrow -2x \leqslant 2x \sin \dfrac{1}{x} \leqslant 2x$ și trecînd la limită în dubla inegalitate obținem valoarea limitei zero; $\lim\limits_{x \to 0} \cos \dfrac{1}{x}$ nu există. (Funcțiile trigonometrice sin, cos, tg, ctg nu au limită în punctele $\pm\infty$: fie șirul convergent către zero $x_n = \dfrac{2}{\pi} \cdot \dfrac{1}{n}$, atunci șirul $\sin \dfrac{1}{x_n} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} n\right)$ este de forma 0, 1, −1, 0, 1,..., deci acest șir nu are limită, deoarece în afara oricărei vecinătăți a punctului 0 există un număr infinit de termeni, analog în afara vecinătății punctului 1 sau a punctului −1).

5. $f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} \cos \dfrac{1}{x^2} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$

Fie șirul convergent către zero.

$x_n = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$; $f'(x_n) = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi n}} \sin(2\pi n) - 2\sqrt{2\pi n} \cos(2\pi n) =$
$= -2\sqrt{2n\pi}$ și deci $\lim\limits_{n \to \infty} f'(x) = -\infty$. Fie șirul convergent către zero $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}}$, $f'(x_n) = 2\sqrt{(2n+1)\pi}$ și deci $\lim\limits_{n \to \infty} f'(x_n) = +\infty$. Deci funcția derivată este nemărginită în vecinătatea originii, originea fiind un punct de discontinuitate de speța a doua.

6. $f'_s(\mathrm{e}) = \lim\limits_{\substack{x \to \mathrm{e} \\ x < \mathrm{e}}} \dfrac{f(x) - f(\mathrm{e})}{x - \mathrm{e}} = \dfrac{3}{\mathrm{e}}$; $f'_d(\mathrm{e}) = a$.

Punem condiția ca f să fie continuă în e și obținem

$$\begin{cases} a\mathrm{e} + b = 1 \\ a = \dfrac{3}{\mathrm{e}} \end{cases} \quad \text{deci} \quad \begin{cases} a = \dfrac{3}{\mathrm{e}} \\ b = -2 \end{cases}.$$

7. i) Domeniul de definiție este $[-1, 1]$.

ii) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2 - x^4} + \dfrac{1}{2} \arcsin(-x) & \text{pentru } -1 < x < 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{pentru } x \geqslant 0 \end{cases}$

problema derivabilității se pune în $x = 0$, funcția g trebuie să fie continuă în $x = 0$, deci $c = 0$.

$$g'(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x^2} & \text{pentru } -1 < x < 0 \\ 2ax + b & \text{pentru } x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$b = -1$$

cum g' este derivabilă în $x = 0$, rezultă că $a = 0$.

8. i) f este continuă pe $[0, 1]$;

ii) f este derivabilă pe $[0, 1] \setminus \left\{0, \frac{1}{\pi}, 1 - \frac{1}{\pi}, 1\right\}$.

9. a) Pentru ca $\Gamma \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ să fie graficul unei funcții $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, trebuie conform definiției graficului unei funcții, ca pentru orice t real, să existe un element u real astfel încît $(t, u) \in \Gamma$. Deci, $\Gamma = u(\Gamma_f) = \{(u(x, f(x)) \mid x \in \mathbf{R}\} = \{(2x + 1, 3x + 4f(x) + 5) \mid x \in \mathbf{R}\}$.

Dacă $t \in \mathbf{R}$, pentru ca (t, u) să aparțină lui $u(\Gamma_f)$ trebuie să existe un x, astfel încît $t = 2x + 1$ și $u = 3x + 4f(x) + 5$. Deci, pentru un număr real t dat, avem:

$$u = 3 \cdot \frac{t-1}{2} + 4 \cdot f\left(\frac{t-1}{2}\right) + 5 = \frac{3t+7}{2} + 4 \cdot f\left(\frac{t-1}{2}\right)$$

și vom avea:

$$\left(t, \frac{3t+7}{2} + 4f\left(\frac{t-1}{2}\right)\right) \in u(\Gamma_f) \text{ deoarece:}$$

$$\left(t, \frac{3t+7}{2} + 4 \cdot f\left(\frac{t-1}{2}\right)\right) = u\left(\frac{t-1}{2}, f\left(\frac{t-1}{2}\right)\right)$$

elementul u căutat și care depinde de t este:

$$u = g(t) = \frac{3t+7}{2} + 4 \cdot f\left(\frac{t-1}{2}\right)$$

în acest fel, u este unic și g a fost determinat.

b) Funcția g este suma funcției $g_1(t) = \frac{3t+7}{2}$ cu funcția compusă $4f \circ h$ unde $h(t) = \frac{t-1}{2}$. Dacă, f este derivabilă, g este derivabilă.

Cum $f(x) = \frac{g(2x+1) - 3x - 5}{4}$, dacă g este derivabilă, atunci f este derivabilă.

c) $f' = \frac{1}{4}(2g' - 3) \Rightarrow f' = \frac{1}{2}g' - \frac{3}{4}$;

d) dacă $f(x) = \sin x$ avem:

$$g(x) = \frac{3x+7}{2} + 4 \sin \frac{x-1}{2};$$

$$g'(x) = \frac{3}{2} + 2 \cdot \cos \frac{x-1}{2} \Rightarrow g'(1) = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}.$$

10. Funcția continuă v este o aplicație bijectivă a intervalului $(2, 3)$ pe intervalul $(3, 4)$, transformînd intervalul $\left(2, \frac{5}{2}\right]$ în $\left(3, \frac{13}{4}\right]$ și intervalul $\left[\frac{5}{2}, 3\right)$ în intervalul $\left[\frac{13}{4}, 4\right)$ și

$$v^{-1}(x) = \begin{cases} 2(x-2) & \text{pentru } 3 < x \leqslant \frac{13}{4} \\ \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right) & \text{pentru } \frac{13}{4} \leqslant x < 4. \end{cases}$$

Deci $u(x) = v^{-1}(x) \circ w(x)$. Funcția w transformă intervalul $(0, 1)$ în intervalul $(3, 3 + \sin 1)$ și cum

$$\sin 1 > \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7$$

rezultă:

$$u(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} \sin x + \frac{7}{3} & \text{pentru } x \in \left(\arcsin \frac{1}{4}, 1\right] \\ 2 \sin x + 2 & \text{pentru } x \in \left(0, \arcsin \frac{1}{4}\right] \end{cases}$$

a) u este continuă în $x = \arcsin \frac{1}{4}$ și cum restricțiile sînt funcții continue, înseamnă că u este continuă pe $(0, 1]$;

b) funcția u este derivabilă pe $(0, 1) \setminus \left\{\arcsin \frac{1}{4}\right\}$.

11. i) $f'(x)=\frac{1}{(1-x^2)}$, $f''(x)=\frac{1\cdot 2}{(1-x)^3}$, $f'''(x)=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1-x)^4}$.

Presupunem că $f^{(k)}(x)=\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$. Vom analiza dacă relația de derivare este verificată și pentru $f^{(k+1)}$: prin derivare obținem $f^{(k+1)}(x)=[f^{(k)}(x)]'=\left[\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}\right]'=$

$=\frac{k!\,(k+1)}{(1-x)^{k+2}}=\frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}}$, expresie care se obține și din pasul k, atribuind lui k valoarea $k+1$. Deci pentru $\forall\, n\in\mathbf{N}$, $f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

ii) $f(x)=\frac{1}{1-x}+\frac{x}{1-x}$; $f^{(n)}(x)=\frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$.

iii) $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2^n\cdot x^{\frac{2n+1}{2}}}(x-2n+1)$.

iv) $f(x)=\frac{x^3}{(x-2)(x-3)}=x+5+27\cdot\frac{1}{x-3}-8\cdot\frac{1}{x-2}$

$$f'(x)=1+27\cdot\frac{-1}{(x-3)^2}-8\cdot\frac{-1}{(x-2)^2}$$

$$f''(x)=27\cdot\frac{+1\cdot 2}{(x-3)^3}-8\cdot\frac{+1\cdot 2}{(x-2)^2}$$

$$f'''(x)=27\cdot\frac{-1\cdot 2\cdot 3}{(x-3)^4}-8\cdot\frac{-1\cdot 2\cdot 3}{(x-2)^3}$$

Presupunem că $f^{(k)}(x)=27\cdot\frac{(-1)^k\cdot k!}{(x-3)^{k+1}}-8\cdot\frac{(-1)^k\cdot k!}{(x-2)^{k+1}}$ și vom demonstra pentru $f^{(k+1)}(x)$: prin derivarea expresiei $f^{(k)}(x)$ și prin observare, adică atribuind în $f^{(k)}(x)$ lui k valoarea $k+1$. Cum cele două expresii raționale coincid, atunci putem spune că

$$f^{(n)}(x)=27\,\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x-3)^{n+1}}-8\cdot\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x-2)^{n+1}}\text{ pentru } n\geq 2.$$

v) Ca și în exercițiul precedent, vom descompune fracția compusă într-o sumă de fracții elementare:

$$\frac{2x+3}{x^2(x^2-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2x+3}{x^2(x^2-1)}=\frac{(A+C+D)x^3+(B-C+D)x^2-Ax-B}{x^2(x^2-1)}$$

Aplicînd metoda coeficienților nedeterminați obținem:

$$\begin{cases}A+C+D=0\\B-C+D=0\\-A=2\\-B=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-2\\B=-3\\C=-\frac{1}{2}\\D=\frac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2x+3}{x^2(x^2-1)}=-2\cdot\frac{1}{x}-3\cdot\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x-1}$$

$$f'(x)=-2\cdot\frac{-1}{x^2}-3\cdot\frac{-2}{x^3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{(x+1)^2}+\frac{5}{2}\cdot\frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$f''(x)=-2\cdot\frac{1\cdot 2}{x^3}-3\cdot\frac{2\cdot 3}{x^4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 2}{(x+1)^3}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1\cdot 2}{(x-1)^3}$$

$$f'''(x)=-2\cdot\frac{-1\cdot 2\cdot 3}{x^4}-3\cdot\frac{-2\cdot 3\cdot 4}{x^5}-\frac{1}{2}\cdot\frac{-1\cdot 2\cdot 3}{(x+1)^4}+$$

$$+\frac{5}{2}\cdot\frac{-1\cdot 2\cdot 3}{(x-1)^4}$$

Presupunem că:

$$f^{(k)}(x)=-2\cdot\frac{(-1)^k\cdot k!}{x^{k+1}}-3\cdot\frac{(-1)^k\cdot k!}{x^{k+2}}-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^k\cdot k!}{(x+1)^{k+1}}+\frac{5}{2}\cdot\frac{(-1)^k\cdot k!}{(x-1)^{k+1}}$$

și vom verifica valabilitatea pasului $k+1$ prin observație, adică atribuind lui k valoarea $k+1$ și prin calcul, derivînd

pe $f^{(k)}(x)$. Cum cele două expresii raționale coincid putem spune:

$$f^{(n)}(x) = -2 \cdot \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}} - 3 \cdot \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+2}} -$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+1)^{n+1}} + \frac{5}{2} \cdot \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} = (-1)^{n+1} \cdot n! \left[\frac{2x+3}{x^{n+2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{5(x+1)^{n+1} - (x-1)^{n+1}}{2(x^2-1)^{n+1}} \right] \text{ pentru } \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

vi) Fracția compusă o descompunem într-o sumă de fracții elementare:

$$f(x) = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a-bx} + \frac{1}{a+bx}\right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2a}\left[\frac{b}{(a-bx)^2} + \frac{-b}{(a+bx)^2}\right]$$

$$f''(x) = \frac{1}{2a}\left[\frac{1 \cdot 2 \cdot b^2}{(a-bx)^3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot b^2}{(a+bx)^3}\right]$$

Presupunem că $f^{(k)}(x) = \frac{1}{2a}\left[\frac{k!\,b^k}{(a-bx)^{k+1}} + \frac{(-1)^k k!\,b^k}{(a+bx)^{k+1}}\right]$ și demonstrăm valabilitatea pasului $k+1$ prin observare (atribuind lui k valoarea $k+1$) și prin calcul (derivînd pe $f^{(k)}(x)$), deci cum cele două rezultate coincid putem spune că pentru $\forall\, n \in \mathbf{N}$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!\,b^n}{2a}\left[\frac{1}{(a-bx)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(a+bx)^{n+1}}\right].$$

vii) $f^{(n)}(x) = (x+n)\mathrm{e}^x$.

viii) Putem aplica *formula de derivare a lui Leibniz*:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}, \text{ pentru } \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

Deci $f^{(n)}(x) = 2^{n-1} \cdot \mathrm{e}^{-2x}\left[2(-1)^n x^2 + 2n(-1)^{n-1}x + \right.$

$$\left. + (-1)^{n-2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}\right].$$

ix) Aplicăm *formula lui Leibniz*:

$$f^{(n)}(x) = (1-x^2)\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - 2nx\cos\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) -$$

$$- n(n-1)\cos\left[x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right]$$

x) $f^{(n)}(x) = [3x^2 + 6nx + 3n(n-1) - 4]\mathrm{e}^x$.

xi) $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{1}{x^{n+1}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

xii) Aplicăm *formula lui Leibniz*:

$$f^{(n)}(x) = p(p-1)\ldots(p-n+1) \cdot x^{p-n}(1-x)^{q-n} \cdot$$

$$\cdot\left[1 + C_n^1 \frac{q}{p-n+1} \cdot \frac{x}{1-x} + C_n^2 \frac{q(q-1)}{(p-n+1)(p-n+2)} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \ldots\right].$$

xiii) $f'(x) = \frac{1}{a+x}$, $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(a+x)^n}$

xiv) $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}}\left(\ln x - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{n}\right)$.

xv) Aplicăm *formula lui Leibniz*:

fie $f_1(x) = x$ și $g_1(x) = \ln(1-x^2)$. Funcția f_1 are derivatele $f_1'(x) = 1$, $f_1^{(n)}(x) = 0$ pentru $n \geqslant 2$; iar funcția g_1 are derivatele:

$$g_1(x) = \ln(1+x) + \ln(1-x)$$

$$g_1'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{1-x}$$

$$g_1''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$g_1'''(x) = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3} - \frac{1 \cdot 2}{(1-x)^3}$$

și $g_1^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(1+x)^n} - \frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$

și înlocuind în *formula lui Leibniz* obținem:

$$f^{(n)}(x) = C_n^0 f_1^{(0)}(x) g_1^{(n)}(x) + C_n^1 f_1^{(1)}(x) \cdot g_1^{(n-1)}(x) =$$
$$= x \cdot g_1^{(n)}(x) + n \cdot g_1^{(n-1)}(x).$$

xvi) $f(x) = \ln(a + bx) - \ln(a - bx)$

$$f^{(n)}(x) = b^{n-1}(n-1)!\left[\frac{(-1)^{n+1}}{(a+bx)^n} - \frac{1}{(a-bx)^n}\right].$$

xvii) $f'(x) = \frac{1}{n!}\left[\ln(2 + \alpha x) + 1 - \frac{2}{2 + \alpha x}\right];$

$$f''(x) = \frac{1}{n!}\left[\frac{\alpha}{2 + \alpha x} + \frac{2\alpha}{(2 + \alpha x)^2}\right];$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{\alpha^2 x + 2(\alpha + n - 1)}{n(n-1)(2 + \alpha x)^n};$$

apoi se va verifica valabilitatea derivatei $f^{(n+1)}$ comparînd rezultatele obținute din derivarea funcției $f^{(n)}$ și prin atribuirea în $f^{(n)}$, n cu $n + 1$. Dacă rezultatele coincid atunci derivata $f^{(n)}$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

Pentru $\alpha = 0$ avem $x \in \mathbf{R}$, iar formula nu mai este valabilă și $f^{(n)}(x) = 0$.

xviii) Aplicăm *formula lui Leibniz*:

Fie $f_1(x) = x^3$, $f_1'(x) = 3x^2$, $f_1''(x) = 6x$

$f_1'''(x) = 6$, $f_1^{(n)}(x) = 0$ pentru $n \geqslant 4$ și

$$g_1(x) = \ln x, \quad g_1'(x) = \frac{1}{x}, \quad g_1''(x) = \frac{-1}{x^2};$$

$$g_1'(x) = \frac{1 \cdot 2}{x^3}; \quad g_1^{IV}(x) = \frac{-1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4}, \ \ldots,$$

$$g_1^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n}$$

și conform formulei obținem:

$$f^{(n)}(x) = C_n^0 f_1^{(0)}(x) g_1^{(n)}(x) + C_n^1 f_1^{(1)}(x) g_1^{(n-1)}(x) +$$
$$+ C_n^2 f_1^{(2)}(x) g_1^{(n-2)}(x) + C_n^3 f_1^{(3)}(x) g_1^{(n-3)}(x) =$$
$$= x^3 g_1^{(n)}(x) + 3nx^2 g_1^{(n-1)}(x) + 3n(n-1) \cdot x g_1^{(n-2)}(x) +$$
$$+ n(n-1)(n-2) \cdot g_1^{(n-3)}(x),$$

apoi vom substitui derivatele succesive ale funcției g_1.

xix) Se aplică *formula lui Leibniz*:

fie $f_1(x) = x^p$, $g_1(x) = \ln x$ cu $f_1^{(n)}(x) = 0$ dacă $n \geqslant p + 1$

și $$g_1^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{p} C_n^k g^{(n-k)}(x) \cdot f_1^{(k)}(x).$$

Dacă $p = n$ atunci:

$$f^{(n)}(x) = n!\left(\ln x + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$

12. $f'(x) = nx^{n-1} \Rightarrow f'(1) = n$

$f''(x) = n(n-1)x^{n-1} \Rightarrow f''(1) = n(n-1)$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$f^{(n)}(x) = n! \Rightarrow f^{(n)}(1) = n!$

$$\Rightarrow E = 1 + \frac{n}{1!} + \frac{n(n-1)}{2!} + \ldots + \frac{n!}{n!} = C_n^0 + C_n^1 +$$
$$+ C_n^2 + \ldots + C_n^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = (1+1)^n = 2^n.$$

13. i) $S = 1 + \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k (k+2)k! = 1 + \sum_{k=1}^{n} [(-1)^k \cdot k \cdot k! +$

$$+ 2 \cdot (-1)^k \cdot k!] = 1 + \sum_{k=1}^{2n} [(-1)^k \cdot ((k+1)! - k!) +$$

$$+ 2 \cdot (-1)^k \cdot k!] = 1 + \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k [(k+1)! + k!] =$$
$$= 1 + [-2! - 1! + 3! + 2! - 4! - 3! + \ldots +$$
$$+ (-1)^{2n} \cdot (2n+1)! + (-1)^{2n} \cdot (2n)!] =$$
$$= 1 + [(-1)^{2n} \cdot (2n+1)! - 1] = (2n+1)!$$

Al doilea mod de lucru:

Fracția compusă o descompunem într-o sumă de fracții elementare:

$$f(x)=\frac{x+2}{(x+1)^2}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}+\frac{-2}{(x+1)^3}$$

$$f''(x)=\frac{1\cdot 2}{(x+1)^3}+\frac{2\cdot 3}{(x+1)^4}$$

$$f'''(x)=\frac{-1\cdot 2\cdot 3}{(x+1)^4}+\frac{-2\cdot 3\cdot 4}{(x+1)^5}\Rightarrow$$

$$f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^k\cdot k!}{(x+1)^{k+1}}+\frac{(-1)^k\cdot(k+1)!}{(x+1)^{k+2}}.$$

$$S=\sum_{k=0}^{2n}f^{(k)}(0)=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k[(k+1)!+k!]-1=$$

$$=[1!+0!-2!-1!+3!+2!-4!-3!+\ldots+$$

$$+(-1)^{2n}(2n+1)!+(-1)^{2n}(2n)!]-1=(2n+1)!$$

ii) $\frac{x+2}{(x+1)^2}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\in\mathbf{Z}$, deci trebuie să existe divizibilitățile:

$$x+1\mid 1 \text{ și } (x+1)^2\mid 1\Rightarrow x=0.$$

14. Fie suma în progresie geometrică $x+x^4+x^7+\ldots+x^{3n-2}=\frac{x^{3n+1}-x}{x^3-1}$, $n\in\mathbf{N}$. Derivînd ambii membri obținem:

$$\sum_{k=1}^{n}(3k-2)x^{3k-3}=\frac{(3n-2)x^{3(n+1)}-(3n+1)\cdot x^{3n}+2x^3+1}{(x^3-1)^2}.$$

15. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1} & \text{pentru } x\neq 1\\ n+1 & \text{pentru } x=1\end{cases}$

$$f'(x)=1+2x+\ldots+nx^{n-1}=\begin{cases}\dfrac{nx^n(x-1)-(x^n-1)}{(x-1)^2}, & x\neq 1\\ \dfrac{n(n+1)}{2}, & x=1\end{cases}$$

$$f''(x)=2\cdot 1+3\cdot 2\cdot x+\ldots+n(n-1)x^{n-2}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(n^2+n)x^{n-1}\cdot(x-1)^2-2n\cdot x^n\cdot(x-1)+2(x^n-1)}{(x-1)^3} & \text{pentru } x\neq 1\\ \sum\limits_{k=2}^{n}k(k-1)=\sum\limits_{k=2}^{n}k^2-\sum\limits_{k=2}^{n}k=\dfrac{n(n^2-1)}{3} & \text{pentru } x=1\end{cases}$$

dar $x\cdot f'(x)=x+2x^2+\ldots+n\cdot x^n$ și derivînd, obținem:

$$S_n(x)=f'(x)+x\cdot f''(x)=\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot x^{k-1}+$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(n^2+2n)x^n(x-1)^2-2nx^{n+1}(x-1)+(x^n-1)(x+1)}{(x-1)^3} & \text{pentru } x\neq 1\\ \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \text{pentru } x=1.\end{cases}$$

Pentru $x\in(0,1)$, avem $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=\dfrac{-x-1}{(x-1)^3}$.

16.

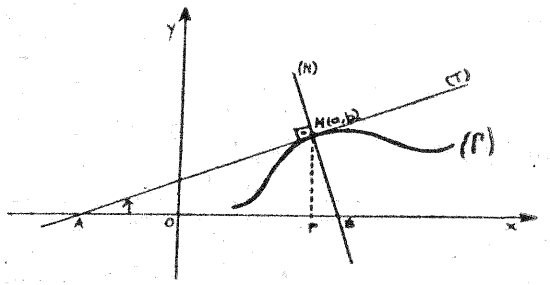


Fig. III.16

— ecuația tangentei (T) la curba (Γ) este $y-b=f'(a)(x-a)$:

— normala este dreapta perpendiculară pe tangentă în punctul de contact, deci are ecuația:

$$y-b=-\frac{1}{f'(a)}(x-a):$$

— segmentul AP se numește subtangentă și

$$AP=|x_p-x_A|=\left|\frac{b}{f'(a)}\right|;$$

— segmentul PB se numește subnormală și

$$PB = |x_P - x_B| = |b \cdot f'(a)|$$

$$MA = \left| \frac{f(a)}{f'(a)} \cdot \sqrt{1 + (f'(a))^2} \right|, \quad MB = |f(a) \cdot \sqrt{1 + (f'(a))^2}|.$$

Ecuația tangentei este $3x + y + 6 = 0$.

18. Subtangentele sînt: $\frac{x}{3}$; $\frac{2x}{3}$, $-2x$. Subnormalele sînt: $-3x^5$, $-\frac{3x^2}{2}$; $\frac{1}{2}x^2$. **19.** $y = \frac{x_0}{2a}\left(x - \frac{x_0}{2}\right)$; $y - y_0 = -\frac{2a}{x_0}(x - x_0)$. **20.** $2x - y - 1 = 0$. **21.** 3,75. **22.** $y = x$. **23.** $x - y - 3e^{-2} = 0$. **26.** Reamintesc modul de a determina măsura unghiului sub care se intersectează două curbe. Fie curbele: (Γ_1) $y = f_1(x)$; (Γ_2) $y = f_2(x)$.

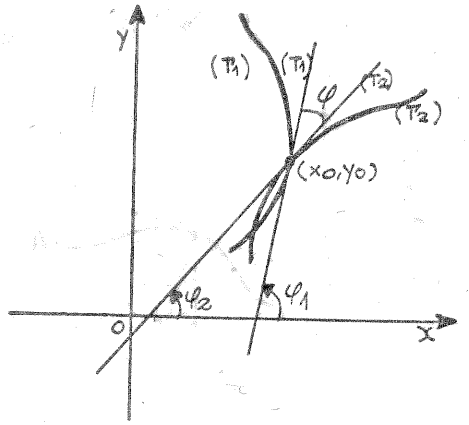


Fig. III.26

Fie φ unghiul dintre cele două tangente (T_1), (T_2), $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2}$, dar $\operatorname{tg}\varphi_1 = f_1'(x_0)$, $\operatorname{tg}\varphi_2 = f_2'(x_0) \Rightarrow \varphi \in \left\{ \operatorname{arctg} \frac{f_1'(x_0) - f_2'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0)} + k\pi \mid k \in \{-1, 0, 1\} \right\}$.

i) $\varphi = 0$ sau $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{18}{31}$; ii) $\operatorname{arctg}\frac{8}{15}$; iii) $\varphi = \operatorname{arctg} 3$; iv) 45°; v) $\varphi = \operatorname{arctg}(2\sqrt{2})$.

28. i) tangenta: $T = \left| \frac{y}{\sin\frac{3}{2}t} \right|$; normala: $N = \left| \frac{y}{\cos\frac{3}{2}t} \right|$; subtangenta: $S_T = \left| y \operatorname{ctg}\frac{3}{2}t \right|$; subnormala: $S_N = \left| y \operatorname{tg}\frac{3}{2}t \right|$.

ii) $T = \left| \frac{y}{\cos t} \right|$, $N = \left| \frac{y}{\sin t} \right|$, $S_T = |y \operatorname{tg} t|$, $S_N = |y \operatorname{ctg} t|$. iii) $T = \left| \frac{y}{\sin t} \right|$, $N = \left| \frac{y}{\cos t} \right|$; $S_T = |y \cdot \operatorname{ctg} t|$, $S_N = |y \cdot \operatorname{tg} t|$.

29. Ecuația tangentei este $\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} - 1 = 0$. Deci, tangenta intersectează axele de coordonate în punctele $A(2a, 0)$ și $B(0, 2b)$, iar mijlocul segmentului AB este punctul $M(a, b)$.

30. Vom determina punctele de intersecție ale celor două hiperbole:

$$y = \frac{a^2}{x}, \quad y = \pm\sqrt{x^2 - a^2} \Rightarrow x^4 - a^2x^2 - a^4 = 0$$

$$x_0 = \pm\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}a \text{ și } y_0 = \frac{a}{\pm\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}}$$

$$f'(x) = \left(\frac{a^2}{x}\right)' = -\frac{a^2}{x^2}$$

$$g'(x) = (\pm\sqrt{x^2 - a^2})' = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2 - a^2}}$$

Pentru ca cele două curbe să fie ortogonale, adică să se intersecteze într-un unghi drept trebuie ca: $f'(x_0)\cdot g'(x_0)=-1$.

$$f'\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}a\right)\cdot g'\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}a\right)=-\frac{a^2}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}a^2}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}a}{\pm\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1\right)a^2}}=-\frac{2}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{5}+1}}{\sqrt{\sqrt{5}-1}}=-1$$

(în calcule cum amplificat cu conjugata numitorului: $\sqrt{5}+1$).

31. Fie punctul curent $P(x_0, y_0)$, atunci ecuația tangentei dusă la hiperbolă în punctul P este: $y-y_0=\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2-a^2}}(x-x_0)$, iar ecuația normalei dusă tot în punctul P este: $y-y_0=-\frac{\sqrt{x_0^2-a^2}}{x_0}(x-x_0)$. Lungimea subnormalei este

$$\left|x_0-\frac{x_0y_0}{\sqrt{x_0^2-a^2}}-x_0\right|=\left|-\frac{x_0\sqrt{x_0^2-a^2}}{\sqrt{x_0^2-a^2}}\right|=|-x_0|.$$

32. Reamintesc: Unghiul sub care se vede o curbă dintr-un punct P exterior ei, este unghiul format între tangentele duse la curbă din acel punct. Pentru a determina tangentele duse din P la cerc scriem ecuația fascicolului de drepte cu vîrful în A, $y-b=\lambda(x-a)$, iar pentru a determina panta λ, astfel ca dreapta să intersecteze curba în două puncte

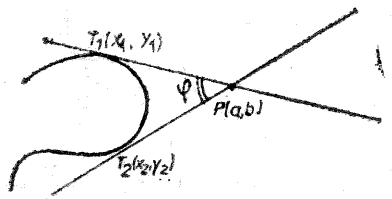


Fig. 32

confundate, vom elimina pe y între ecuația curbei și ecuația fasciculului de drepte, obținînd o ecuație al cărei discriminant este nul. Deci tangentele au ecuațiile $y-b=\lambda_1(x-a)$ și $y-b=\lambda_2(x-a)$. Unghiul între cele două tangente este

$$\varphi=\varphi_1-\varphi_2\Rightarrow\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\varphi_1-\varphi_2)=\frac{\operatorname{tg}\varphi_1-\operatorname{tg}\varphi_2}{1+\operatorname{tg}\varphi_1\cdot\operatorname{tg}\varphi_2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\varphi\in\left\{\operatorname{arctg}\frac{\lambda_1-\lambda_2}{1+\lambda_1\lambda_2}+k\pi\;\middle|\;k\in\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}\right\}.$$

Punctele se află la intersecția dreptei cu cercul $x^2+y^2-8=0$ (cerc concentric cu cel dat și de rază $2\sqrt{2}$), $A\left(\frac{2}{5},\frac{14}{5}\right)$, $B(2,2)$. Tangentele din A sînt: $3x-4y+10=0$ și $4x+3y-10=0$, iar tangentele din B sînt paralele cu axele de coordonate:

33. Ecuațiile tangentelor sînt:

$$3x+5y-50=0,\qquad x+3y-26=0.$$

34. Ecuația dreptei variabile care trece prin A este $y-7p=\lambda(x-12p)$. Intersectăm ecuația dreptei variabile cu ecuația parabolei:

$$\begin{cases}y^2=2px\\ y-7p=\lambda(x-12p)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\lambda^2x^2-2p(12\lambda^2-7\lambda+1)x+(144\lambda^2-168\lambda+49)p^2=0$$

Impunem condiția de tangentă, adică

$$\Delta=0\Rightarrow\Delta=4p^2(24\lambda^2-14\lambda+1)=0\Rightarrow\lambda_1=\frac{1}{2}\text{ și }\lambda_2=\frac{1}{12}.$$

Ecuațiile tangentelor sînt: $x-2y+2p=0$, $x-12y+72p=0$.

35. Punctele de intersecție sînt $x=1$ și $x=4$. Pantele tangentelor duse la curbă în $x=1$ și $x=4$ sînt:

$f'(1)=-2$, $f'(4)=4$. Cum normala este perpendiculară pe tangentă în punctul de contact, atunci ecuațiile normalelor sînt: $y-a=\frac{1}{2}(x-1)$ și $y-5=-\frac{1}{4}(x-4)$.

36. Se impune condiția ca cele două curbe să admită tangentă comună în punctul comun $T\left(2,\frac{2}{3}\right)$

adică:

$$\begin{cases} f(2) = g(2) \\ f'(2) = g'(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = \dfrac{5}{36} \\ b = -\dfrac{4}{9}. \end{matrix}$$

37. Fie $a_{ij} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, n^2 funcții derivabile și $\Delta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin:

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

atunci $\Delta(x)$ este o funcție derivabilă pe $\mathbf{R}$ și:

$$\Delta'(x) = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a'_{i1}(x) & a'_{i2}(x) & \ldots & a'_{in}(x) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

deci pentru a deriva un determinant înseamnă a deriva pe rînd o linie sau o coloană, restul liniilor sau al coloanelor rămînînd nederivate, apoi însumînd determinanții obținuți.

$$f'(x) = \begin{vmatrix} 5x^4 & 4x^3 & 3x^2 & 0 \\ 5x^4 & 4x^3 & 3x^2 & 0 \\ 20 & 12 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} x^5 & x^4 & x^3 & 1 \\ 20x^3 & 12x^2 & 6x & 0 \\ 20 & 12 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^5 & x^4 & x^3 & 1 \\ 5x^4 & 4x^3 & 3x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} x^5 & x^4 & x^3 & 1 \\ 5x^4 & 4x^3 & 3x^2 & 0 \\ 20 & 12 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

dacă $x = 1$ este rădăcină dublă atunci $f(1) = f'(1) = 0$, relație care se poate verifica foarte ușor.

38. $f'(x) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix} +$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix}$$

iar $f'(1) = 0$ (deoarece scăzînd prima linie din a treia obținem liniile 2 și 3 egale).

$$f''(x) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 6x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix}$$

iar ceilalți 3 determinanți sînt nuli deoarece au cîte o linie zero, $f''(1) = 0$. Cum $f(1) = f'(1) = f''(1) = 0$ și $f'''(1) \neq 0$ înseamnă că $x = 1$ este rădăcină triplă.

39. Se demonstrează ușor că $\Delta' = 0$ pentru $\forall\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow \Delta$ este o constantă (conform unei consecințe a teoremei lui Lagrange) deci Δ nu depinde de x.

40. Cum $\Delta''(x) = 0$ pentru $\forall\, x \in \mathbf{R}$, înseamnă că $\exists \Delta_1, \Delta_2 \in \mathbf{R}$ astfel încît $\Delta(x) = \Delta_1 x + \Delta_2$ pentru $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

și $\Delta_2 = f(0) = \begin{vmatrix} a_1 & 0\ldots & 0 \\ 0 & a_2\ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0\ldots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \ldots a_n$

$$\Delta_1 = f'(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1\ldots & 1 \\ 0 & a_2\ldots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0\ldots & a_n \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_1 & 0\ldots & 0 \\ 0 & a_2\ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & 0\ldots & a_{n-1} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$= a_2a_3 \dots a_n + a_1a_3a_4 \dots a_n + \dots + a_1a_2 \dots a_{n-1} =$$

$$= a_1a_2 \dots a_n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \Rightarrow \Delta(x) = a_1a_2 \dots a_n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \cdot x + a_1a_2 \dots a_n.$$

41. a) $f(0) = 0$, $m = \inf_{x \geqslant 0} x^n = 0$, $M = \lim_{x \to \infty} x^n = \infty$, deci $M = \sup_{x \geqslant 0} x^n = +\infty$. Cum $m = 0 \in f(I)$, rezultă că $f(I) = [0, \infty)$.

b) f este continuă, avem: $\lim_{x \to \infty} x^{2n-1} = -\infty$,

$\lim_{x \to \infty} x^{2n-1} = +\infty$, deci $m = \inf_{x \in \mathbf{R}} x^{2n-1} = -\infty$,

$M = \sup_{x \in \mathbf{R}} x^{2n-1} = +\infty$, deci $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$.

c) f este continuă, avem: $a > 1 : \lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ și $\lim_{x \to +\infty} a^x = \infty$, deci $m = \inf_{x \to \infty} a^x = 0$, $M = \sup_{x \in \mathbf{R}} a^x = +\infty$. Cum a^x nu ia valoarea 0, rezultă că $f(\mathbf{R}) = (0, \infty)$. Cazul $0 < a < 1$ se demonstrează analog.

d) f este continuă, avem: $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$, deci $(-1, 1) \subset f(I)$, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, deci $-1 \in f(I)$ și $1 \in f(I)$, deci $f(I) = [-1, 1]$.

e) f este continuă, iar $f(I) = [-1, 1]$.

f) f este continuă, $\lim_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = -\infty$, $\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = +\infty$,

deci $m = \inf_{x \in I} \operatorname{tg} x = -\infty$, $M = \sup_{x \in I} \operatorname{tg} x = +\infty$,

deci $f(I) = \mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$.

g) f este continuă. Rezultă că $f(I)$ este un interval și se demonstrează analog punctului f) că $f(I) = \mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$.

42. i) $\begin{matrix} f(1) = -3 < 0 \\ f(2) = 25 > 0 \end{matrix}$ deci cum $c \in (1, 2)$ și $f(1) \cdot f(2) < 0 \Rightarrow f(c) = 0$.

ii) $\begin{matrix} f(1) = 1 > 0 \\ f(0) = -1 < 0 \end{matrix}$ deci cum $c \in (0, 1)$ și $f(0) \cdot f(1) < 0 \Rightarrow f(c) = 0$.

iii) $f(2) \cdot f(3) < 0 \Rightarrow m \in \left(\frac{11}{4}, \frac{24}{7}\right)$.

CAPITOLUL IV

TEOREME DE MEDIE: ROLLE, LAGRANGE, CAUCHY, L'HOSPITAL, TAYLOR, DARBOUX. APLICAȚII

PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

1. Se consideră funcția:

$$f(x) = \ln(1 + |x|) \text{ pentru } x \in [-1, 1]^3.$$

i) Să se studieze valabilitatea teoremei lui Rolle.

ii) Să se arate că are un extrem în intervalul $(-1, 1)$, iar în punctul de extrem derivata funcției nu se anulează.

2. Fie funcția $f(x) = (ax + b)^m (cx + d)^n$, $m > 1$, $n > 1$, $x \in \mathbf{R}$. Să se demonstreze că $\frac{mad + nbc}{ac(m + n)}$ este cuprins între $\frac{b}{a}$ și $\frac{d}{c}$.

3. Să se studieze valabilitatea teoremei lui Rolle pentru funcția:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x \text{ pentru } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \\ \operatorname{ctg} x \text{ pentru } x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

4. Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Rolle pentru funcțiile:

a) $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 \text{ pentru } x \in [-1, 0) \\ x + 1 \text{ pentru } x \in [0, 1] \end{cases}$

b) $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$, $f(x) = |\sin^3 x|$

c) $f : [-3, 3] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 7}$.

5. Fie funcția:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + mx + n & \text{pentru } x \in [-1, 0) \\ px^2 + 4x + 4 & \text{pentru } x \in [0, 1] \end{cases}$$

definită pe $[-1, 1]$, $m, n, p \in \mathbf{R}$. Să se determine parametrii m, n, p, astfel încît funției date să i se poată aplica teorema lui Rolle pe intervalul $[-1, 1]$.

6. Să se studieze valabilitatea teoremei lui Lagrange pentru funcția:

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{pentru } x \in [0, 1) \\ x^3 + 2 & \text{pentru } x \in (1, 2] \\ 3 & \text{pentru } x = 1 \end{cases}$$

7. a) Să se aplice teorema lui Lagrange funcției $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, în intervalul $(0, b)$ cu $0 < b < 1$.

b) Formula găsită introduce un număr $C(b) \in (0, 1)$. Să se calculeze $C(b)$ apoi $\lim\limits_{b \to 0} C(b)$.

8. Fie funcția:

$$f(x) = \ln(1 + hx), \quad h > 0, \quad x \in \left(-\frac{1}{h}, \infty\right).$$

Să se verifice valabilitatea teoremei lui Lagrange și să se determine valoarea punctului intermediar c.

9. Fie funcția $f(x) = \dfrac{x^2 + |x^2 + x - 2|}{x + |x + 1|}$.

Să se studieze valabilitatea teoremei creșterilor finite pe intervalul $[1, 2]$ și să se aplice efectiv această teoremă.

10. Teorema creșterilor finite se mai poate scrie:

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + ch), \quad \text{cu } c \in (0, 1).$$

Să se aplice această formulă funcțiilor:

$$f(x) = x^2, \quad f(x) = x^3, \quad f(x) = mx + n$$

și să se studieze valorile corespunzătoare punctului real c.

11. Să se studieze valabilitatea teoremei lui Cauchy și să se determine valoarea punctului intermediar c:

a) $f : [1, e] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln x$

$g : [1, e] \to \mathbf{R}$, $g(x) = \dfrac{e}{x}$

b) $f : [0, 3] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 1, & x \in (1, 3] \\ -x + \dfrac{4}{3}, & x \in [0, 1] \end{cases}$

$g : [0, 3] \to \mathbf{R}$, $g(x) = x$.

12. Fie funcția $f(x) = x - \cos x$; $x \in \mathbf{R}$.

i) Să se arate că f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

ii) Să se arate că ecuația $x - \cos x = 0$ are o singură rădăcină $x_0 \in \left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

iii) Aplicînd teorema creșterilor finite funcției f, în intervalul $\left[x_0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, să se arate că:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4} - x_0\right) f'(c) \quad \text{cu } c \in \left(x_0, \frac{\pi}{4}\right).$$

iv) Să se arate că $f'(c) > \dfrac{3}{2}$.

v) Să se arate că $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2}{3} \cdot f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) < x_0 < \dfrac{\pi}{4}$.

13. Se dă funcția:

$f(x) = e^{|x|}$, $x \in [-1, 1]$. Să se arate că:

funcția este continuă pe $[-1, 1]$; ia valori egale la capetele intervalului; are un extrem în interval și totuși derivata nu se anulează în $(-1, 1)$. Să se explice acest rezultat.

14. Fie funcțiile $f_i : [a, b] \to \mathbf{R}$, $i \in \{1, 2, 3\}$ care îndeplinesc condițiile:

a) f_i continuă pe $[a, b]$

b) f_i derivabilă pe (a, b)

$\Rightarrow \exists c \in (a, b)$ astfel încît:

$$\begin{vmatrix} f_1(c) & f_2(c) & f_3(c) \\ f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) \\ f_1(b) & f_2(b) & f_3(b) \end{vmatrix} = 0.$$

Generalizare

15. Fie $P(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + c$, $P \in \mathbf{R}[x]$.

i) Pentru $a = 3$ să se arate că nu toate rădăcinile ecuației $P(x) = 0$ sînt reale.

ii) Să se determine a, b, c astfel încît $P(x)$ împărțit prin $x - 2$ să dea restul 30, iar ecuația $P(x) = 0$ să admită ca rădăcină pe $x = -1 + i$.

16. Fie funcțiile $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ continue, derivabile și care pentru $\forall x \in [a, b]$ îndeplinesc condițiile:

$$g(x) \neq 0,\ g'(x) \neq 0 \text{ și } \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(b)}{g(b)}.$$

Să se arate că $\exists c \in (a, b)$ astfel încît $\dfrac{f(c)}{g(c)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

17. Se dă o funcție reală f de argument x cu $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ și un șir de diviziuni $[a + k, a + k + 1]$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Aplicînd teorema lui Lagrange să se arate că există un șir $x_k \to 0$ astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} f'(x_k) = -f(a)$.

18. Fie $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, ..., $a_n > 0$ și $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^x \geqslant n$ pentru $\forall x \in \mathbf{R}$. Să se arate că $\prod\limits_{k=1}^{n} a_k = 1$.

19. Fie numerele reale $a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Să se arate că ecuația

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = 0$$

admite cel puțin o rădăcină în intervalul $(0, 2\pi)$.

20. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$, distincte două cîte două, $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $P(x) = \prod\limits_{i=1}^{n} (x - a_i)$ și $f : \mathbf{R} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x - a_i}$.

i) Să se arate că f este indefinit derivabilă și că $f'(x) < 0$ pentru $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

ii) Să se arate că $f(x) = \dfrac{P'(x)}{P(x)}$ și că $P(x) \cdot P''(x) < [P'(x)]^2$ pentru $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

21. Să se arate că dacă:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i + 1} = 0 \text{ unde } a_i \text{ este real,}$$

atunci ecuația $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ admite cel puțin o rădăcină reală.

22. Se consideră ecuația:

$$f(x) = x^5 - 5a^4 x + 4a^3 = 0,\ a \in \mathbf{R}.$$

i) Să se discute natura rădăcinilor ecuației cu ajutorul șirului lui Rolle;

ii) Să se determine valoarea lui a știind că ecuația dată admite pe $x = -1$ ca rădăcină dublă.

23. Fie funcția

$$f(x) = 3x^4 - 20x^3 + 30x^2 + 60x - 72 \ln |x| + 1\tfrac{1}{2},\ x \neq 0.$$

Să se discute natura rădăcinilor ecuației cu ajutorul șirului lui Rolle.

24. Să se separe cu ajutorul șirului lui Rolle rădăcinile reale ale ecuației:

$$3x^4 - 4ax^3 - 6x^2 + 12ax + 7a^2 - 36 = 0$$

(unde a este un parametru real).

25. Să se discute ecuațiile și să se separe rădăcinile lor:

i) $\dfrac{1}{(x - a)^2} + \dfrac{1}{(x - b)^2} - \lambda = 0$, unde $\lambda \in \mathbf{R}$, $a, b \in \mathbf{R}$.

ii) $f(x) = x^4 + px^2 + q$; iii) $x(x + 1)^2 - m = 0$; $m \in \mathbf{R}$.

iv) $a^2x^3 - 3ax + 2(a^2 - b^2) = 0$, $a, b \in \mathbf{R}$.

26. Să se arate că funcțiile f și g diferă printr-o constantă:

i) $f:[-1,\ 1]\to\mathbf{R}$ $\quad f(x)=\arcsin x$

$g:[-1,\ 1]\to\mathbf{R}$ $\quad g(x)=-\arccos x$

ii) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ $\quad f(x)=\operatorname{arctg} x$

$g:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$ $\quad g(x)=-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

27. Aplicînd teorema creșterilor finite, să se arate că:

i) $\dfrac{b-a}{\sin^2 b}<\operatorname{ctg} a-\operatorname{ctg} b<\dfrac{b-a}{\sin^2 a}$

dacă $[a,\ b]\subseteq\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, $a<b$,

ii) $\dfrac{b-a}{\sin^2 a}<\operatorname{ctg} a-\operatorname{ctg} b<\dfrac{b-a}{\sin^2 b}$

dacă $[a,\ b]\subseteq\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$, $a<b$.

iii) $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$, $n\in\mathbf{N}\setminus\{0\}$

iv) $\ln x\leqslant\dfrac{x}{\mathrm{e}}$ pentru $\forall\, x\in(0,\ \infty)$.

28. Să se demonstreze următoarele inegalități:

a) $|\sin b-\sin a|\leqslant|b-a|$.

b) $\dfrac{b-a}{\cos^2 a}<\operatorname{tg} b-\operatorname{tg} a<\dfrac{b-a}{\cos^2 b}$, $0\leqslant a<b<\dfrac{\pi}{2}$.

c) $|\cos b-\cos a|\leqslant|b-a|$.

d) $\dfrac{a-b}{a}\leqslant\ln\dfrac{a}{b}\leqslant\dfrac{a-b}{b}$, $0<b\leqslant a$.

e) $\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}}\leqslant\dfrac{\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^b}{2}$, $a,b\in\mathbf{R}$.

f) $b^{h-1}<\dfrac{a^h-b^h}{h(a-b)}<a^{h-1}$, $a>b>0$, $h>1$.

g) $\dfrac{x}{1+x^2}<\operatorname{arctg} x$, pentru $x\in(0,\ \infty)$.

h) $\operatorname{tg} x>x+\dfrac{x^3}{3}$, pentru $x\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

i) $x\cos x<\sin x$, $x\in\left(0,\ \dfrac{5\pi}{4}\right)$.

j) $2\sin x<x^2\sin x+2x\cos x$, $x\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

k) $\arcsin x>x+\dfrac{x^3}{6}$, $x\in(0,\ 1)$.

Folosind *regula lui l'Hospital* să se calculeze următoarele limite:

29. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x}{x\mathrm{e}^{ax}-2ax}$. **30.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{3^{\sin^2 x}-3^{\sin x}}{x-\dfrac{\pi}{2}}$.

31. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^{3\sin^3 x}$. **32.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^{\operatorname{tg} x}$.

33. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{\sqrt{x}}$. **34.** $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

35. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x$. **36.** $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(\ln x\cdot\ln(\ln x))$.

37. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin(\sin x)-\sin^2 x}{x^6}$. **38.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x\sin x-x}{\sin(\sin x)}$.

39. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\dfrac{2}{3}\sin x-\dfrac{1}{3}\operatorname{tg} x}{x^5}$. **40.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^m}{\mathrm{e}^x}$.

41. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x^p-\ln a^p}{x-a}$. **42.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+\mathrm{e}^{-x}-2\cos x}{3x^2}$.

43. $\lim\limits_{x\to0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$. **44.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^x$.

45. $\lim_{x\to\infty}\left[x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}}\right]$. **46.** $\lim_{x\to 0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

47. $\lim_{x\to 0}(a^x-1)^x$, $a>1$. **48.** $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

49. $\lim_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$. **50.** $\lim_{x\to 0}\left[1+\sum_{k=1}^{n}\ln(1+kx)\right]^{\frac{1}{x}}$.

51. Folosind *formula de dezvoltare în serie Taylor* să se calculeze următoarele limite de funcții:

i) $\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$; ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$;

iii) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$; iv) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)-\sin 2x+2x^2}{x^3}$;

v) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^3}-1}{x^3}$; vi) $\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

52. Să se calculeze cu aproximație

i) $\sin 47°$, ii) $\sqrt{4{,}17}$, iii) $\sqrt[3]{29}$, iv) $\cos 56°$, v) $\ln 1{,}11$.

53. Demonstrați că pentru următoarele limite nu se poate aplica teorema lui l'Hospital.

i) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. ii) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=0$.

54. Fie dat un cerc de rază R și o tangentă fixă. La distanța x față de centrul cercului se duce o coardă paralelă cu tangenta, iar din extremitățile coardei se coboară perpendiculare pe tangentă. Să se determine x așa fel, ca aria dreptunghiului astfel format să fie egală cu numărul real dat $2k^2$.

55. Într-un cerc de rază R se înscrie un triunghi isoscel cu aria a^2. Să se determine lungimea bazei triunghiului. *Discuție.*

56. Să se înscrie într-o elipsă un triunghi de arie dată $\frac{b}{a}m^2$. Baza triunghiului este paralelă cu axa mică a elipsei, iar vîrful lui se află în una din extremitățile axei mari (a, b fiind lungimile semiaxelor elipsei, iar m un parametru real).

57. Într-o elipsă de ecuație $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ se duce o coardă MM' paralelă cu axa Ox, iar extremitățile M, M' se unesc cu vîrful B $(0, b)$. Să se determine poziția acestei corzi astfel încît aria triunghiului BMM' să fie egală cu un număr dat S. *Discuție.*

58. Într-un con circular drept cu raza R și înălțimea h să se înscrie un cilindru circular drept avînd volumul dat și egal cu $\frac{\pi h}{R}m^3$. Discuție după valorile reale ale lui m.

59. Aria totală și volumul unui cilindru circular drept sînt respectiv $3\pi a^2$ și $\frac{4}{3}\pi b^2$. Să se determine dimensiunile cilindrului.

60. Determinați un punct pe parabola $y=x^2$, cuprins între punctele $A(1, 1)$ și $B(3, 9)$, astfel ca tangenta în acest punct să fie paralelă cu coarda AB.

61. Demonstrați că aria segmentului circular, cu unghiul la centru α, de coardă $AB=b$ și de înălțime $CD=h$ este aproximativ egală cu $S\approx\frac{2}{3}bh$, cu o eroare relativ mică pentru $\alpha\to 0$.

62. Fie $f(x)=x+\alpha+\beta-3\sqrt[3]{\alpha\beta x}$, unde α, β sînt constante reale pozitive.

i) Să se arate că $f'(x)$ își schimbă semnul pe intervalul $(0, \infty)$, dar $f(x)$ păstrează același semn.

ii) Deduceți că media aritmetică a trei numere reale pozitive este mai mare decît media lor geometrică.

63. Fie un cerc de rază R și n un număr natural, cel puțin egal cu 3. Notăm cu p_n perimetrul poligonului regulat convex înscris în cerc și cu P_n cel al poligonului

regulat circumscris. Să se arate că $P_n + p_n > 4\pi R$ și că $\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} P_n = 2\pi R$. Să se arate că avem aproximarea $P_{96} \approx \frac{442}{71} R \Rightarrow 2\pi R \approx \frac{442}{71} R \Rightarrow \pi \approx \frac{221}{71}$ (această aproximare a numărului π se datorează lui Arhimede).

64. Fie $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, cu $f : [0, \infty] \to \mathbf{R}$.

i) Pentru orice $x > 1$, avem $f(x) < \frac{1}{2\sqrt{x}} < f(x-1)$.

ii) Fie $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$.

Să se deducă relația:

$$2\sqrt{n+1} - 2 < S_n < 2\sqrt{n}.$$

iii) Să se determine partea întreagă a numărului

$$N = \sum_{k=1}^{1\,000\,000} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

REZOLVĂRI ȘI RĂSPUNSURI

1. Reamintesc: *Teorema lui Rolle:*

Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, dacă sînt îndeplinite următoarele condiții:

a) f continuă pe $[a, b]$

b) f derivabilă pe (a, b)

c) $f(b) = f(a)$

atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încît $f'(c) = 0$.

i) Explicitînd funcția obținem:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+x) & \text{pentru } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \\ \ln(1-x) & \text{pentru } x \in [-1, 0) \end{cases}$$

Vom verifica condițiile teoremei lui Rolle:

a) f continuă pe $[-1, 1]$;

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \ln(1-x) = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \ln(1+x) = \ln 1 = 0; \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

Deci funcția este continuă în punctul 0. Cum funcția este continuă iar pe restricțiile $(0, 1]$, $[-1, 0)$ fiind funcție elementară, atunci f este continuă pe tot domeniul de definiție.

b) f derivabilă pe $(-1, 1)$;

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & \text{pentru } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \\ \frac{-1}{1-x} & \text{pentru } x \in (-1, 0) \end{cases}$$

Pentru ca funcția să fie derivabilă pe $(-1, 1)$, cum f este derivabilă pe restricții de interval, înseamnă că este suficient să demonstrăm derivabilitatea în punctul $x = 0$;

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{1}{1+x} = 1; \quad \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{-1}{1-x} = -1; \quad \lim_{x\to 0} f'(x) = 0.$$

Deci cum f nu este derivabilă în $x = 0$, înseamnă că teorema lui Rolle nu se poate aplica funcției în cauză, chiar dacă și $f(-1) = f(1) \Rightarrow \ln 2 = \ln 2$.

ii) În punctul de coordonate $(0, 0)$ graficul funcției admite un punct unghiular, cu semitangentele $y = x$ și $y = -x$.

2. $f'(x) = (ax+b)^{m-1}(cx+d)^{n-1}[(mac+nca)x + mad + ncb]$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = -\frac{b}{a} \to \\ x_2 = -\frac{d}{c} \to \end{array}\right\} \text{nu aparțin intervalului considerat}$$

$$x_3 = -\frac{mad + nbc}{ac(m+n)}$$

$$f(x) = 0 \text{ pentru } x_1 = -\frac{b}{a}$$

$$x_2 = -\frac{d}{c}$$

Conform unei consecințe a teoremei lui Rolle și anume: *Între două rădăcini ale funcției, există cel puțin o rădăcină a derivatei*, înseamnă că

$$\frac{b}{a} < \frac{mad + nbc}{ac(m+n)} < \frac{d}{c} \text{ sau}$$

$$\frac{d}{c} < \frac{mad + nbc}{ac(m+n)} < \frac{b}{a}$$

după cum $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$ sau $\frac{d}{c} < \frac{b}{a}$.

3. Funcția nu este derivabilă în $x = \frac{\pi}{4}$, deci nu se poate aplica teorema lui Rolle. În punctul de discontinuitate al derivatei, graficul funcției admite un punct unghiular.

4. a) Vom verifica condițiile teoremei lui Rolle:

i) f continuă pe $[-1, 1]$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x+1) = 1, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\leqslant 0}} (x^2+1) = 1$$

ii) f derivabilă pe $(-1, 1)$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{pentru } x \in (-1, 0] \\ 1 & \text{pentru } x \in (0, 1) \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\leqslant 0}} 2x = 0, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 1$$

Cum funcția nu este derivabilă, în punctul $x = 0$, înseamnă că teorema nu se poate aplica.

b) Teorema este aplicabilă și $c = 0$; c) Teorema este aplicabilă și $c = 0$.

5. i) Funcția trebuie să fie continuă pe $[-1, 1]$ deci și în punctul $x = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) \Rightarrow n = 4$$

ii) $f'(x) = \begin{cases} 2x + m & \text{pentru } x \in (-1, 0] \\ 2px + 4 & \text{pentru } x \in (0, 1) \end{cases}$

și funcția trebuie să fie derivabilă pe $(-1, 1)$ deci și în punctul $x = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x) = \lim_{x\to 0} f'(x) \Rightarrow m = 4$$

iii) Cum $f(-1) = f(1) \Rightarrow p = -7$ deci $m = n = 4$ și $p = -7$.

6. i) f este continuă pe $[0, 2]$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} 3x = 3; \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x^3+2) = 3; \quad \lim_{x\to 1} 3 = 3.$$

ii) f nu este derivabilă în punctul $x = 1$ deoarece

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{pentru } x \in (0, 1) \\ 3x^2 & \text{pentru } x \in (1, 2) \\ 0 & \text{pentru } x = 1 \end{cases}$$

și $f'_s(1) = 3$, $f'_d(1) = 3$, $f'(1) = 0$.

7. a) $f(x)$ este definită și continuă pe $[0, 1)$. $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ este definită pe $[0, 1)$. Deoarece $b \in (0, 1)$ rezultă că f este definită și continuă pe $[0, b]$ și derivabilă pe acest interval inclusiv 0 și b, putem aplica teorema lui Lagrange:

$$f(b) - f(0) = bf'(C(b)), \; C(b) \in (0, 1),$$

deci $\frac{1}{1-b} - 1 = b \cdot \frac{1}{[1-C(b)]^2}$ și cum $1 - b > 0$ și $1 - C(b) > 0$ deducem: $C(b) = 1 - \sqrt{1-b} < 1$.

b) $\lim_{b\to 0} C(b) = 0$.

8. Vom verifica condițiile teoremei lui Lagrange pe intervalul $[a, b] \subseteq \left(-\frac{1}{h}, \infty\right)$.

i) f continuă pe $[a, b]$ — deoarece este o funcție elementară.

ii) f derivabilă pe (a, b) — fiind funcție elementară.

$\Rightarrow \exists$ cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încît

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \Rightarrow$$

$$\frac{\ln(1+hb)-\ln(1+ha)}{b-a} = \frac{h}{1+ch} \Rightarrow$$

$$\varepsilon = \frac{1}{h}\left[\frac{h(b-a)}{\ln\frac{1+hb}{1+ha}} - 1\right].$$

9. Explicitînd funcțiile modul obținem:

$$f(x) = \begin{cases} -(2x^2+x-2), & x \in (-\infty, -2) \\ x-2, & x \in [-2, -1) \\ \dfrac{-x+2}{2x+1}, & x \in (-1, 1) \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\} \\ \dfrac{2x^2+x-2}{2x+1}, & x \in [1, \infty). \end{cases}$$

Funcția este continuă pe $[1, 2]$. Funcția este derivabilă pe $(1, 2)$, deci se poate aplica teorema lui Lagrange

$\Rightarrow \exists$ cel puțin un punct $c \in (1, 2)$ astfel încît

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = f'(c) \Rightarrow \frac{19}{15} = \frac{4c^2+4c+5}{4c^2+4c+1} \Rightarrow$$

$$c = \frac{-1+\sqrt{15}}{2} \in (1, 2).$$

Reamintesc: *Teorema lui Lagrange*

fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, dacă

i) f este continuă pe $[a, b]$

ii) f este derivabilă pe (a, b)

atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încît să avem formula lui Lagrange (numită și prima formulă de medie sau formulă a creșterilor finite):

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Teorema lui Cauchy

fie $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$, dacă

i) f, g sînt continue pe $[a, b]$

ii) f, g sînt derivabile pe (a, b)

iii) $g'(x) \neq 0$ pe (a, b)

atunci $g(b) \neq g(a)$ și există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încît să avem formula lui Cauchy (numită și a doua formulă de medie sau formulă a creșterilor finite).

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

10. a) $f(x) = x^2$, $(x+h)^2 - x^2 = h \cdot 2(x+ch) \Rightarrow c = \frac{1}{2}$.

b) $f(x) = x^3$, $(x+h)^3 - x^3 = h \cdot 3 \cdot (x+ch)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow c = \frac{\sqrt{x^2+hx+\frac{1}{3}h^2} - x}{h}.$$

c) $f(x) = mx+n$, $m(x+h)+n-mx-n = hm \Rightarrow$
$\Rightarrow mh = mh$, iar c este o cantitate care nu se determină.

11. a) i) f, g continue pe $[1, e]$ fiind funcții elementare.

ii) f, g derivabile pe $(1, e)$ fiind funcții elementare.

iii) $g'(x) = -\dfrac{e}{x^2} \neq 0$

atunci există cel puțin un punct $C \in (1, e)$ astfel încît $g(e) \neq g(1) \Rightarrow e \neq 1$

și $$\frac{f(e)-f(1)}{g(e)-g(1)} = \frac{f'(C)}{g'(C)} \Rightarrow \frac{1}{e-1} = \frac{C}{e} \Rightarrow C = \frac{e}{e-1}.$$

b) $c = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} + 1.$

12. i) $f'(x) = 1 + \sin x \geqslant 0 \Rightarrow f$ este crescătoare;

$$f'(x) = 0 \text{ pentru } x \in \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

ii) $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0.$

Cum funcția este continuă, strict crescătoare și își schimbă semnul la capetele intervalului, atunci conform unei consecințe a proprietății lui Darboux f se anulează numai o dată pentru $x_0 \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$.

iii) Cum f este continuă și derivabilă, atunci i se poate aplica teorema lui Lagrange:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f(x_0) = \left(\frac{\pi}{4} - x_0\right) \cdot f'(c), \; c \in \left(x_0, \frac{\pi}{4}\right),$$

dar $f(x_0) = 0$, deci obținem relația din enunț.

iv) Cum $\frac{\pi}{6} < x_0 < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{12} \cdot f'(c) > \left(\frac{\pi}{4} - x_0\right) f'(c) =$

$$= f\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow f'(c) > \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{12}} = 3 - \frac{6\sqrt{2}}{\pi} > 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

v) Prin minorare, deducem:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) > \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{4} - x_0\right), \text{ respectiv } \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right) < x_0 < \frac{\pi}{4}.$$

13. Explicitînd funcția obținem:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{pentru } x \in [-1, 0) \\ 1 & \text{pentru } x = 0 \\ e^{x} & \text{pentru } x \in (0, 1] \end{cases}$$

Teorema lui Rolle nu se poate aplica, deoarece funcția nu este derivabilă în $x = 0$.

În punctul $x = 0$ funcția admite un punct unghiular ($f'_s(0) = -1$, $f'_d(0) = 1$).

14. Funcțiile f_i îndeplinesc condițiile teoremei lui Lagrange, deci poate exista un punct $c \in (a, b)$ astfel încît

$$\frac{f_i(b) - f_i(a)}{b - a} = f_i(c), \; i \in \{1, 2, 3\}.$$

Înlocuind valorile $f_i(c)$ în determinant vom obține:

$$\begin{vmatrix} f_1(c) & f_2(c) & f_3(c) \\ f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) \\ f_1(b) & f_2(b) & f_3(b) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{f_1(b) - f_1(a)}{b - a} & \frac{f_2(b) - f_2(a)}{b - a} & \frac{f_3(b) - f_3(a)}{b - a} \\ f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) \\ f_1(b) & f_2(b) & f_3(b) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{b - a} \begin{vmatrix} f_1(b) - f_1(a) & f_2(b) - f_2(b) & f_3(b) - f_3(a) \\ f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) \\ f_1(b) & f_2(b) & f_3(b) \end{vmatrix} = 0.$$

(Dacă aplicăm proprietățile determinanților, vom obține o diferență de doi determinanți care au liniile proporționale, deci valoarea fiecăruia este zero).

Evident, că generalizarea acestei probleme se poate face pentru funcțiile f_i, $i \in \mathbb{N}$, alegînd un șir de puncte intermediare $c_i \in (a, b)$, $i \in \mathbb{N}$.

15. i) Se aplică șirul lui Rolle:

$$P'(x) = 4x^3 + 4x^2 + 6x + b,$$

$$P''(x) = 6(2x^2 + 2x + 1) > 0 \text{ pentru } \forall\, x \in \mathbb{R}$$

(deoarece $\Delta < 0$) $\Rightarrow P'(x)$ admite o singură rădăcină reală — fie x_0.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$P(x)$	$+$		$P(x_0)$		$+$

Dacă $P(x_0) > 0$ atunci neexistînd nici o schimbare de semn, P nu admite rădăcini reale.

Dacă $P(x_0) < 0$, există două schimbări de semn, deci P admite două rădăcini reale $x_1 \in (-\infty, x_0)$, $x_2 \in (x_0, \infty)$.

Altă demonstrație; aplicăm formulele lui F. Viète:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 -$$

$$- 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) =$$

$$= (-2)^2 - 2 \cdot 3 = -2.$$

Cum suma pătratelor rădăcinilor este negativă, atunci cum proprietatea este falsă pentru numerele reale, înseamnă că vor exista rădăcini complexe, care vor fi și conjugate deoarece coeficienții polinomului sînt reali.

ii) $\begin{cases} P(2) = 4a + 2b + c + 32 = 30 \\ P(-1 + i) = 8 - b + c + i(-2a + b + 4) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow a = \frac{9}{5},\ b = -\frac{2}{5},\ c = -\frac{42}{5}.$$

16. Fie funcția $h = \frac{f}{g}$, care îndeplinește condițiile teoremei lui Rolle, deci $\exists\, c \in (a, b)$ astfel încît $h'(c) = 0$, dar $h'(x) = \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$. Cum $h'(c) = 0$

$$\Rightarrow f'(c) \cdot g(c) - f(c) \cdot g'(c) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(c)}{g(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

17. Aplicăm *teorema lui Lagrange* pe intervalul $[a + k, a + k + 1]$ deci $\exists\, x_k \in (a + k,\ a + k + 1)$ astfel încît

$$f(a + k + 1) - f(a + k) = f'(x_k) \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} f'(x_k) = f(a + 1) -$$

$$- f(a) + f(a + 2) - f(a + 1) + \ldots + f(a + n + 1) -$$

$$- f(a + n) = f(a + n + 1) - f(a).$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f'(x_k) = -f(a) + \lim_{n\to\infty} f(a + n + 1) = -f(a).$$

18. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu $f(x) = a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x$.

Evident, $f(0) = n$ și conform ipotezei $f(x) \geqslant f(0)$ pentru $\forall\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow x = 0$ este un punct de minim al funcției f.

Conform *teoremei lui Fermat* avem: $f'(0) = 0$, dar $f'(x) = a_1^x \ln a_1 + a_2^x \ln a_2 + \ldots + a_n^x \ln a_n = 0$ pentru $\forall\, x \in \mathbf{R} \Rightarrow$

$$f'(0) = \sum_{k=1}^{n} \ln a_k = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) = 0 \Rightarrow \prod_{k=1}^{n} a_k = 1.$$

Reamintesc *teorema lui Fermat*: O funcție f derivabilă pe un interval $[a, b]$ are derivata nulă în orice punct de extrem $x_0 \in (a, b)$. Reciproca teoremei este falsă, punctele putînd fi de inflexiune.

19. Fie $f : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$ cu

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(a_k \cdot \sin kx - b_k \cdot \cos kx).$$

Cum f verifică condițiile *teoremei lui Rolle*, există cel puțin un punct $c \in (0, 2\pi)$ astfel încît $f'(c) = 0$ și c este o soluție a ecuației din enunț.

20. i) $f'(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{-1}{(x - a_i)^2}$

$$f''(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1 \cdot 2}{(x - a_i)^3},\quad f'''(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{-1 \cdot 2 \cdot 3}{(x - a_i)^4}, \ldots$$

$$\ldots, f^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x - a_i)^{n+1}}.$$

ii) $P'(x) = (x - a_2)(x - a_3) \ldots (x - a_n) +$

$+ (x - a_1)(x - a_3) \ldots (x - a_n) + \ldots + (x - a_1)(x - a_2) \ldots$

$$\ldots (x - a_{n-1}) = \frac{P(x)}{x - a_1} + \frac{P(x)}{x - a_2} + \ldots + \frac{P(x)}{x - a_n} =$$

$$= P(x) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - a_i} = P(x) \cdot f(x).$$

$$P''(x) = P'(x) \cdot f(x) + P(x) \cdot f'(x) \Rightarrow$$

$P(x) \cdot P''(x) = P(x) \cdot P'(x) \cdot f(x) + [P(x)]^2 \cdot f'(x) =$

$= [P'(x)]^2 + [P(x)]^2 \cdot f'(x) < [P'(x)]^2$, deoarece $f'(x) < 0$.

21. Fie $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin relația:

$$F(x) = \frac{a_n}{n + 1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \ldots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x.$$

Se observă că:

a) F este continuă pe $[0, 1]$; b) F este derivabilă pe $(0, 1)$; c) $F(0) = 0$, $F(1) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i + 1} = 0$ (din ipoteză),

și aplicînd funcției F, pe intervalul $[0, 1]$ teorema lui Lagrange rezultă că $\exists c \in (0, 1)$ astfel încît:

$$\frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = 0 = F'(c)$$

și derivata funcției considerate F este funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dată de:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Rezultă că $\exists c \in (0, 1)$ cu proprietatea $f(c) = 0$, deci ecuația din enunț are cel puțin o rădăcină reală.

22. i) Fie $f(x) = x^5 - 5a^4 x + 4a^3 = 0$

$f'(x) = 5x^4 - 5a^4 = 0 \Rightarrow x_1 = a,\ x_2 = -a$

$f(a) = -4a^5 + 4a^3$

$f(a) = 0 \Rightarrow a_1 = 0,\ a_2 = -1,\ a_3 = +1$

$f(-a) = 4a^5 + 4a^3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(-a) = 0,\ a_1 = 0.$

Formăm șirul lui Rolle pentru $a \in (-\infty, 0]$

a	$f(-\infty)$	$f(a)$	$f(-a)$	$f(+\infty)$	Numărul de rădăcini reale
$a \in (-\infty, -1)$	$-$	$+$	$-$	$+$	3 rădăcini reale
$a = -1$	$-$	0	$-$	$+$	3 rădăcini reale $x = -1$ rădăcină dublă
$a \in (-1, 0)$	$-$	$-$	$-$	$+$	rădăcină reală
$a = 0$	$-$	0	0	$+$	5 rădăcini reale egale; $x = 0$

Formăm șirul lui Rolle pentru $a \in (0, \infty)$

a	$f(-\infty)$	$f(-a)$	$f(a)$	$f(+\infty)$	Numărul de rădăcini reale
$a \in (0, 1)$	$-$	$+$	$+$	$+$	rădăcină reală
$a = 1$	$-$	$+$	0	$+$	3 rădăcini reale $x = 1$ rădăcină dublă
$a \in (1, \infty)$	$-$	$+$	$-$	$+$	3 rădăcini reale

ii) $\begin{cases} f(-1) = 0 \Rightarrow 5a^4 + 4a^3 - 1 = 0 \\ f'(-1) = 0 \Rightarrow 5 - 5a^4 = 0 \\ f''(-1) \neq 0 \Rightarrow -20 \neq 0, \text{ evident.} \end{cases} \Rightarrow a = -1$

23. Vom discuta natura rădăcinilor pe $(-\infty, 0)$ și $(0, \infty)$, $x \neq 0$.

a) $x \in (-\infty, 0)$;

$f(x) = 3x^4 - 20x^3 + 30x^2 + 60x - 72 \ln(-x) + 1$

$f'(x) = 12x^3 - 60x^2 + 60x + 60 - \frac{72}{x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow$

$x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3.$

Evident că pentru $x \in (-\infty, 0)$, $f'(x) = 0$ pentru $x = -1$.

Șirul lui Rolle: $\underset{+}{f(-\infty)} \quad \underset{-}{f(-1)} \quad \underset{+}{f(-0)}$.

Ecuația admite două rădăcini reale.

b) $x \in (0, \infty)$; Evident că $f(x), f'(x)$ vor avea aceeași formă ca în cazul a). Deci:

$f(1) = 74 > 0$

$f(2) = 129 - 72 \ln 2 > 0$

$f(3) = 154 - 72 \ln 2 > 0$

Formăm șirul lui Rolle

$$\underset{+}{f(+0)} \quad \underset{+}{f(1)} \quad \underset{+}{f(2)} \quad \underset{+}{f(3)} \quad \underset{+}{f(+\infty)},$$

deci ecuația $f(x) = 0$ nu are nici o rădăcină reală.

24. Prin derivare obținem:

$12x^3 - 12ax^2 - 12x + 12a = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1,\ x_3 = a$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty,$

$f(-1) = 7a^2 - 8a - 39,\ f(-1) = 0 \Rightarrow a_1 = 3,\ a_2 = -\frac{13}{7},$

$f(1) = 7a^2 + 8a - 39,\ f(1) = 0 \Rightarrow a_1' = -3,\ a_2' = \frac{13}{7},$

$f(a) = -a^4 + 13a^2 - 36,\ f(a) = 0 \Rightarrow a_1'' = -3,\ a_2'' = -2,$
$a_3'' = 2,\ a_4'' = 3.$

Cazul I. $a \in (-\infty, -1)$

x	$-\infty$	a	-1	1	$+\infty$	Discuție
a \ $f(x)$	$+\infty$	$f(a)$	$f(-1)$	$f(1)$	$+\infty$	
$a \in (-\infty, -3)$	+	−	+	+	+	$x_1 \in (-\infty, a)$ $x_2 \in (a, -1)$ x_3, x_4 complexe conjugate
$a = -3$	+	0	+	0	+	$x_1 = x_2 = a$ $x_3 = x_4 = 1$
$a \in (-3, -2)$	+	+	+	−	+	$x_1 \in (-1, 1)$ $x_2 \in (1, \infty)$ x_3, x_4 complexe conjugate
$a = -2$	+	0	+	−	+	$x_1 = x_2 = a$ $x_3 \in (-1, 1)$ $x_4 \in (1, \infty)$
$a \in \left(-2, -\frac{13}{7}\right)$	+	−	+	−	+	$x_1 \in (-\infty, a)$ $x_2 \in (a, -1)$ $x_3 \in (-1, 1)$ $x_4 \in (1, \infty)$
$a = -\frac{13}{7}$	+	−	0	−	+	$x_1 = x_2 = -1$ $x_3 \in (-\infty, a)$ $x_4 \in (1, \infty)$
$a \in \left(-\frac{13}{7}, -1\right)$	+	−	−	−	+	$x_1 \in (-\infty, a)$ $x_2 \in (1, \infty)$ x_3, x_4 complexe conjugate

Cazul II. $a = -1$

x	$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$	Rădăcinile ecuației
$f(x)$	+	−24	−40	+	$x_1 \in (-\infty, -1)$ $x_2 \in (1, \infty)$ x_3, x_4 complexe conjugate

Cazul III. $a \in (-1, 1)$

x	$-\infty$	-1	a	1	$+\infty$	Discuție
$f(x)$	+	$f(-1)$	$f(a)$	$f(1)$	+	Rădăcinile ecuației
$a \in (-1, 1)$	+	−	−	−	+	$x_1 \in (-\infty, -1)$ $x_2 \in (1, \infty)$ x_3, x_4 complexe conjugate

Cazul IV. $a = 1$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	Rădăcinile ecuației
$f(x)$	+	−40	−24	+	$x_1 \in (-\infty, -1)$ $x_2 \in (1, \infty)$ x_3, x_4 complexe conjugate

Cazul V. $a \in (1, \infty)$

x	$-\infty$	-1	1	a	$+\infty$	Discuție
a \ $f(x)$	$+$	$f(-1)$	$f(1)$	$f(a)$	$+$	Rădăcinile ecuației
$a \in \left(1, \frac{13}{7}\right)$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$x_1 \in (-\infty, -1)$ $x_2 \in (a, \infty)$ x_3, x_4 complexe conjugate
$a = \frac{13}{7}$	$+$	$-$	0	$-$	$+$	$x_1 = x_2 = 1$ $x_3 \in (-\infty, -1)$ $x_4 \in (a, \infty)$
$a \in \left(\frac{13}{7}, 2\right)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$x_1 \in (-\infty, -1)$ $x_2 \in (-1, 1)$ $x_3 \in (1, a)$ $x_4 \in (a, \infty)$
$a = 2$	$+$	$-$	$+$	0	$+$	$x_1 = x_2 = a$ $x_3 \in (-\infty, -1)$ $x_4 \in (-1, 1)$
$a \in (2, 3)$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$x_1 \in (-\infty, -1)$ $x_2 \in (-1, 1)$ x_3, x_4 complexe conjugate
$a = 3$	$+$	0	$+$	0	$+$	$x_1 = x_2 = -1$ $x_3 = x_4 = a$
$a \in (3, \infty)$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$x_1 \in (1, a)$ $x_2 \in (a, \infty)$ x_3, x_4 complexe conjugate

25. i) Funcția este continuă pe $\mathbf{R} \setminus \{a, b\}$.

$$f'(x) = -2\left[\frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(x-b)^3}\right] =$$

$$= -4 \cdot \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)[2x^2 - (a+b)x + a^2 + b^2]}{[(x-a)(x-b)]^3}$$

$$f''(x) = 6\left[\frac{1}{(x-a)^4} + \frac{1}{(x-b)^4}\right] > 0. \quad f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{a+b}{2} \text{ și } x_{2,3} \text{ complexe conjugate.}$$

Fie $a > 0$, $b > 0$, $a < b$:

λ	$-\infty$		a		$\frac{a+b}{2}$		b		$+\infty$	Discuție
λ \ $f(x)$	$-\lambda$		$\frac{8}{(a-b)^2} - \lambda$				$-\lambda$			
$\lambda \leqslant 0$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	4 rădăcini complexe conjugate două câte două
$0 < \lambda < \frac{8}{(a-b)^2}$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	2 rădăcini reale $x_1 \in (-\infty, a)$, $x_2 \in (b, \infty)$
$\lambda = \frac{8}{(a-b)^2}$	$-$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	4 rădăcini reale $x_1 = x_2 = \frac{a+b}{2}$; $x_3 \in (-\infty, a)$, $x_4 \in (b, \infty)$
$\lambda > \frac{8}{(a-b)^2}$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	4 rădăcini reale $x_1 \in (-\infty, a)$, $x_2 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$; $x_3 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$; $x_4 \in (b, \infty)$

Analog se vor analiza și cazurile: $a > 0$, $b < 0$; $a < 0$, $b > 0$; $a < 0$, $b < 0$.

Tabelul se poate obține și dacă intersectăm graficul funcției $f(x) = \frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(x-b)^2}$ cu dreapta variabilă $y = \lambda$.

ii) $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{-p}{2}}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{\frac{-p}{2}}$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{-\frac{p}{2}}$	0	$\sqrt{-\frac{p}{2}}$	$+\infty$	Discuție
$f(x)$	$-\infty$	$q-\frac{p^2}{4}$	q	$q-\frac{p^2}{4}$	$+\infty$	
$p>0$, $q<0$	$+$	$-$		$+$		2 rădăcini reale
$p>0$, $q>0$	$+$	$+$		$+$		4 rădăcini complexe conjugate
$q<0$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	2 rădăcini reale
$p<0$, $\begin{cases} q>0 \\ q-\frac{p^2}{4}>0 \end{cases}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	4 rădăcini complexe conjugate
$\begin{cases} q>0 \\ q-\frac{p^2}{4}<0 \end{cases}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	4 rădăcini reale

Observație. Tabelul se poate trasa și după valorile parametrului q pentru: $q \in (-\infty, 0)$, $q = 0$, $q \in \left(0, \frac{p^2}{4}\right)$, $q = \frac{p^2}{4}$, $q \in \left(\frac{p^2}{4}, \infty\right)$, iar pentru fiecare variantă în parte vom analiza subcazurile: $p < 0$, $p = 0$, $p > 0$.

iii) $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = -1$.

$f(-1) = -m$, $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{27m+4}{27}$.

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$	Discuție
m \ $f(x)$	$-$	$-m$	$-\frac{27m+4}{27}$	$+$	
$m \in \left(-\infty, -\frac{4}{27}\right)$	$-$	$+$	$+$	$+$	o rădăcină reală $x_1 \in (-\infty, -1)$
$m = -\frac{4}{27}$	$-$	$+$	0	$+$	$x_1 \in (-\infty, -1)$, $x_2 = x_3 = -\frac{1}{3}$
$m \in \left(-\frac{4}{27}, 0\right)$	$-$	$+$	$-$	$+$	3 rădăcini reale
$m = 0$	$-$	0	$-$	$+$	$x_1 = x_2 = -1$, $x_3 \in \left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$
$m \in (0, \infty)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$x_1 \in \left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$

iv) Tabloul discuției cu ajutorul șirului lui Rolle este:

$f'(x) = 3a^3x^2 - 3a = 0 \Rightarrow a^2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{a}$

$f\left(\frac{1}{a}\right) = 2(a^2 - b^2 - 1)$; $f\left(-\frac{1}{a}\right) = 2(a^2 - b^2 + 1)$.

Fie $a > 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$	$+\infty$	Discuție
$f(x)/f'(x)$	$-\infty$	$2(a^2-b^2+1)$	$2(a^2-b^2-1)$	$+\infty$	
$a^2-b^2<-1$	−	−	−	+	1 rădăcină reală 2 rădăcini complexe conjugate
$a^2-b^2=-1$	−	0	−	+	$x_1=x_2=-\frac{1}{a}$, $x_3>\frac{1}{a}$
$-1<a^2-b^2<1$	−	+	−	+	3 rădăcini reale
$a^2-b^2=1$	−	+	0	+	$x_1=x_2=\frac{1}{a}$, $x_3<-\frac{1}{a}$
$a^2-b^2>1$	−	+	+	+	1 rădăcină reală 2 rădăcini complexe conjugate

Analog se va analiza și cazul $a < 0$.

26. i) Fie $h : [-1, 1] \to \mathbf{R}$

$$h(x) = \arcsin x + \arccos x$$

$$h'(x) = 0 \text{ deci } h(x) = C,\ x \in (-1, 1),$$

iar constanta C se determină dînd lui x o valoare particulară din intervalul considerat, de exemplu $x = 0$. Atunci $h(0) = \frac{\pi}{2} = C$ se verifică egalitatea și în punctele $x = \pm 1$, deci constanta corespunzătoare este $\frac{\pi}{2}$.

ii) Fie $h : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$.

$$h(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \Rightarrow h'(x) = 0$$

deci $h(x) = \begin{cases} C_1 \text{ pentru } x \in (-\infty, 0) \\ C_2 \text{ pentru } x \in (0, \infty) \end{cases}$

iar constantele se determină ca în cazul punctului precedent, deci

$$C_1 = -\frac{\pi}{2},\ C_2 = \frac{\pi}{2}.$$

27. Fie $f(x) = \operatorname{ctg} x$. Funcția verifică condițiile teoremei lui Lagrange pe orice interval $[a, b]$, deoarece este o funcție elementară, deci:

i) $[a, b] \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \exists\, c \in (a, b)$ astfel încît

$$\frac{\operatorname{ctg} b - \operatorname{ctg} a}{b - a} = -\frac{1}{\sin^2 c}.$$

Cum $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$, funcția $\sin x$ fiind o funcție monoton crescătoare pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, rezultă:

$$\sin a < \sin c < \sin b \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sin^2 a} > \frac{1}{\sin^2 c} > \frac{1}{\sin^2 b} \text{ și}$$

înlocuind valoarea $\frac{1}{\sin^2 c}$ obținem:

$$\frac{1}{\sin^2 b} < \frac{\operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} b}{b - a} < \frac{1}{\sin^2 a} \Rightarrow$$

$$\frac{b - a}{\sin^2 b} < \operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} b < \frac{b - a}{\sin^2 a}.$$

ii) Dacă $[a, b] \subset \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \frac{\pi}{2} < a < c < b < \pi$ și funcția $\sin x$ este o funcție monoton descrescătoare pe intervalul $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, rezultă:

$$\sin^2 b < \sin^2 c < \sin^2 a \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sin^2 a} < \frac{1}{\sin^2 c} < \frac{1}{\sin^2 b} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sin^2 a} < \frac{\operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} b}{b - a} < \frac{1}{\sin^2 b} \Rightarrow$$

$$\frac{b - a}{\sin^2 a} < \operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} b < \frac{b - a}{\sin^2 b}.$$

iii) Vom aplica teorema lui Lagrange funcției $f(x) = \ln x$ pentru $x \in [n, n+1] \Rightarrow \ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{c}$, $c \in (n, n+1)$ deci $n < c < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}$.

iv) Vom aplica teorema lui Lagrange funcției $f(z) = \ln z$ pentru $z \in (e, x) \Rightarrow \frac{\ln x - \ln e}{x - e} = \frac{1}{c}$, $c \in (e, x) \Rightarrow e < c < x \Rightarrow \frac{1}{e} > \frac{1}{c} > \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{\ln x - 1}{x - e} < \frac{1}{e} \Rightarrow \frac{x-e}{x} < \ln x - 1 < \frac{x-e}{e}$ și adunînd constanta 1 în dubla inegalitate vom obține:

$$\frac{2x - e}{x} < \ln x < \frac{x}{e}.$$

Egalitatea se realizează pentru $x = e$.

28. a) Vom aplica teorema lui Lagrange:
fie $f(x) = \sin x$, $x \in [a, b]$;
— f este continuă pe $[a, b]$ fiind funcție elementară;
— f este derivabilă pe (a, b) fiind funcție elementară;
atunci $\exists\, c \in (a, b)$ astfel încît $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ deci $\sin b - \sin a = (b - a)\cos c$; cum $|\cos c| \leqslant 1$ și $|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\operatorname{tg} x|$ pentru $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, rezultă: $|\sin b - \sin a| \leqslant |b - a|$.

b) Fie $f(x) = \operatorname{tg} x$ pentru $x \in [a, b]$; $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$; cum $a < c < b$ atunci $\cos a > \cos c > \cos b$ deoarece funcția cos este descrescătoare pe $[a, b]$ și

$$\frac{1}{\cos a} < \frac{1}{\cos c} < \frac{1}{\cos b} \qquad (1)$$

iar din formula lui Lagrange avem:

$$\frac{\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a}{b - a} = \frac{1}{\cos^2 c}$$

și înlocuind în (1) expresia lui $\frac{1}{\cos^2 c}$ obținem:

$$\frac{1}{\cos^2 a} < \frac{\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a}{b - a} < \frac{1}{\cos^2 b}.$$

c) $|\cos b - \cos a| = 2\left|\sin\frac{a+b}{2}\right| \cdot \left|-\sin\frac{b-a}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{b-a}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{b-a}{2}\right| = |b - a|$.

d) Fie $f(x) = \ln x$ pentru $x \in [b, a]$. Aplicînd teorema lui Lagrange, obținem $b < c < a \Rightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{c} > \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{b} > \frac{\ln a - \ln b}{a - b} > \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$.

e) Se poate folosi și inegalitatea mediilor:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \text{ unde } a_k > 0,\ k \in \mathbf{N}.$$

f) Fie cazul $1 < b < a$. Considerăm funcția $f(x) = x^k$ pentru $x \in [b, a]$. Aplicînd teorema lui Lagrange, obținem $b < c < a \Rightarrow k \cdot b^{k-1} < k \cdot c^{k-1} < k \cdot a^{k-1} \Rightarrow kb^{k-1} < \frac{a^k - b^k}{a - b} < k \cdot a^{k-1}$. Analog se va analiza cazul $0 < b < a < 1$.

g) Fie $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2} - \operatorname{arctg} x,\ f'(x) = -\frac{2x^2}{(1 + x^2)^2} < 0$$

deci f este descrescătoare pentru $x > 0$. Deoarece $f(0) = 0$ și $f(x)$ este descrescătoare și continuă pentru $x > 0$ rezultă că $f(x) < f(0) = 0 \Rightarrow f(x) < 0$ pentru $x > 0$, deci inegalitatea este evidentă (cf. unei consecințe a teoremei Lagrange).

h) Fie $f:\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$ cu $f(x) = \operatorname{tg} x - x - \frac{x^3}{3}$;

$$f'(x) = \frac{\sin x + x\cos x}{\cos^2 x} \cdot (\sin x - x\cos x).$$

Fie $g(x) = \sin x - x\cos x$ cu $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

$g'(x) = x \sin x > 0$, deci funcția g este crescătoare.

Cum $g(0) = 0$ rezultă că $g(x) > 0$ deci $f'(x) > 0$.

Cum $f(0) = 0$ rezultă că $f(x) > 0$, deci inegalitatea este evidentă.

Analog se vor demonstra și celelalte inegalități. În demonstrațiile precedente s-a ținut cont de o consecință a teoremei lui Lagrange și anume:

fie $f:(a, \infty) \to \mathbf{R}$ și $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = 0$.

Dacă $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ crescătoare și cum $x > a$ înseamnă că $f(x) > f(a) = 0$ deci $f(x) > 0$. Dacă $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ descrescătoare și cum $x > a$ înseamnă că $f(x) < f(a) = 0$ deci $f(x) < 0$.

Analog pentru $f:(-\infty, a) \to \mathbf{R}$.

29. Reamintesc *teorema lui l'Hospital* pentru cazurile „$\frac{0}{0}$“, „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$“. Fie $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ și $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, cu $f, g: I \to \mathbf{R}$, $x_0 \in I$ dacă 1°. f, g sînt derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$; 2°. $g'(x) \neq 0$ pentru $\forall x \neq x_0$ din I; 3°. există $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbf{R}}$.

atunci $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Pentru cazul „$0 \cdot \infty$“: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ și $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ și

$f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ sau $f(x)\cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ deci cazul „$0 \cdot \infty$“ se reduce la unul din cazurile „$\frac{0}{0}$“ sau „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$“.

Pentru cazul „$\infty - \infty$“, $f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}$,

caz care se reduce la „$\frac{0}{0}$“.

Pentru cazurile „0^0“, „1^∞“, „∞^0“ avem $f^g = e^{\ln f^g} = e^{g\cdot \ln f}$, care cazuri se reduc la cazul „$0 \cdot \infty$“.

Deci $L = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin x\cos x}{e^{ax} + axe^{ax} - 2a} =$

$$= 2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{(1+ax)e^{ax} - 2a} = \begin{cases} 2 \text{ pentru } a = \frac{1}{2} \\ 0 \text{ pentru } a = \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

30. Cazul de nedeterminare „$\frac{0}{0}$“.

$$L = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x\cos x\cdot 3^{\sin^2 x}\cdot \ln 3 - \cos x\cdot 3^{\sin x}\cdot \ln 3}{1} =$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \cos x\cdot \ln 3(2\sin x\cdot 3^{\sin^2 x} - 3^{\sin x}) = 0.$$

31. Cazul de nedeterminare „0^0“

$$L = e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x^{3\sin^2 x}} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{3\sin^2 x}{\frac{1}{\ln x}}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{6\sin x\cdot\cos x}{-\frac{1}{x\ln^2 x}}} = e^0 = 1.$$

32. Cazul de nedeterminare „0^0“

$$L = e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\operatorname{tg} x\cdot \ln x)} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}} =$$

$$= e^{-\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x}} = e^0 = 1.$$

33. Cazul „$\frac{0}{0}$". $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{\sqrt{x}} =$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{1}{x}\cdot(1+x)^{\frac{1}{x}-1} - \frac{1}{x^2}(1+x)\ln(1+x)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}\right] =$$

$$= 2e \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x\sqrt{x}(1+x)} = 2e \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x\sqrt{x}} =$$

$$= 2e \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1-\ln(1+x)-1}{\frac{3}{2}\sqrt{x}} = -\frac{4}{3}e \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} =$$

$$= -\frac{4}{3}e \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = -\frac{8}{3}e \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sqrt{x}}{1+x} = 0.$$

34. Cazul „1^{∞}" $L = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\ln\frac{\arcsin x}{x}\right)} =$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\arcsin x}{x}}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x}{x\arcsin x \cdot 2x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x}{2x^2\arcsin x}} = e^{\frac{1}{6}},$$

unde în calcule s-a aplicat de 3 ori teorema lui l'Hospital.

35. e^{2a}. **36.** $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left[-\dfrac{\ln\left(\frac{1}{\ln x}\right)}{\frac{1}{\ln x}}\right] = 0.$

37. $L = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)+x-2\sin x}{x^5} - \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-\sin x}{x^3}\right)^2$;

aplicînd regula lui l'Hospital, obținem $L = \frac{1}{18}$.

38. $L = 0$. **39.** Aplicînd de cinci ori teorema lui l'Hospital, găsim limita egală cu 0. **40.** Dacă $m > 0$ și întreg se aplică de m ori teorema lui l'Hospital și se determină $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^m}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{m!}{e^x} = 0$, dacă $m < 0$ atunci limita este 0.

41. $\frac{p}{a}$. **42.** $\frac{2}{3}$.

43. Cazul „$\infty - \infty$"

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{tg} x}{x\operatorname{tg} x}$$

obținem cazul „$\frac{0}{0}$". Aplicînd o dată teorema lui l'Hospital vom determina limita:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{tg} x}{x\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x + x(1+\operatorname{tg}^2 x)} = 0.$$

44. Cazul „0^0".

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(-x)} = e^0 = 1.$$

45. 1. **46.** $e^{-\frac{1}{2}}$. **47.** 1. **48.** e^{-1}. **49.** e^2.

50. $L = \lim\limits_{x\to 0}\left[1+\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+kx)\right]^{\frac{1}{x}} =$

$$= \lim_{x\to 0}\left\{\left[1+\sum_{k=1}^{n}\ln(1+kx)\right]^{\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+kx)}}\right\}^{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+kx)}{x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+kx)^{\frac{1}{x}}} = e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+kx)^{\frac{1}{x}}} =$$

$$= e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln e^{k}} = e^{\sum\limits_{k=1}^{n}k} = e^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

51. Reamintesc formula lui Taylor de dezvoltare în serie:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + R_n(x),$$

unde $R_n(x) = \dfrac{(x-a)^n}{n!}g(x)$ cu $\lim\limits_{x\to a}g(x) = 0$ este restul de ordinul n al formulei lui Taylor și se demonstrează că dacă f este derivabilă de $n+1$ ori, au loc egalități: $R_n(x) = \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]$ numit restul în forma lui Lagrange sau $R_n(x) = \dfrac{(x-a)^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n\cdot f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]$ numit restul în forma lui Cauchy, iar $\theta \in (0, 1)$.

i) Vom obține $\sin x = \sin a + \dfrac{x-a}{1!}\cos a -$

$$-\frac{(x-a)^2}{2!}\sin[a+b(x-a)] \text{ unde } 0<b<1.$$

Deci $\dfrac{\sin x - \sin a}{x-a} = \cos a - \dfrac{x-a}{2!}\sin[a+b(x-a)]$

și trecînd la limită în egalitate obținem:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \cos a.$$

ii) $\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \dfrac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}\cos^{(5)}\left[bx+5\frac{\pi}{2}\right]}{x^4} +$

$$+\frac{-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{3x^4}{4!}-\frac{x^5}{5!}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(5)}\cdot(bx)}{x^4} =$$

$$= \frac{1}{4!}-\frac{3}{4!}+\frac{x}{5!}\left[\cos^{(5)}\left(bx+5\frac{\pi}{2}\right)-\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(5)}\cdot(bx)\right];$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \frac{1}{4!}-\frac{3}{4!} = -\frac{1}{12}.$$

iii) $\sqrt{1+x^2}-1 = 1+\dfrac{x^2}{2!}+R(x)$ cu

$$R(x) = \frac{x^3}{3!}\left[-3bx(1+b^2x^2)^{-\frac{5}{2}}\right],\ 0<b<1 \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} = \frac{1}{2!}+\frac{x^2}{3!}\cdot\left[-3b(1+b^2x^2)^{-\frac{5}{2}}\right].$$

Deci $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

iv) 4. v) $\dfrac{1}{3}$. vi) $\dfrac{1}{2}$.

52. Fie $f:[a, b]\to\mathbf{R}$, $x_0\in(a, b)$, f derivabilă în x_0. Putem aproxima conform formulei lui Taylor funcția $f(x)$ în jurul punctului x_0:

$$f(x)\approx f(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}f'(x_0)$$

relație numită și aproximarea liniară de ordinul unu a funcției f în jurul punctului x_0 sau

$$f(x)\approx f(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}\cdot f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}\cdot f''(x_0)$$

numită aproximarea liniară de ordinul doi a funcției f.

i) fie $f:\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

$$f'(x_0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x \approx \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Pentru $x = 47° = 45° + 2° \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{90} \Rightarrow$

$$\sin 47° \approx \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\pi}{90} \approx 0{,}7417.$$

ii) $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) \approx f(4) + f'(4)(x - 4)$

$$f(4{,}17) = \sqrt{4{,}17} \approx f(4) + \frac{1}{4}(4{,}17 - 4) \approx 2{,}0425.$$

iii) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f(x) \approx f(27) + f'(27)(x - 27)$

$$f(29) = \sqrt[3]{29} \approx f(27) + f'(27) \cdot 2 \approx 3{,}074.$$

v) $f(x) = \ln x$, $f(x) \approx f(1) + f'(1)(x - 1)$

$$f(1{,}11) = \ln 1{,}11 \approx f(1) + f'(1) \cdot 0{,}11 = 0{,}11.$$

53. i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$, iar rezultatul este corect, dar aplicarea teoremei este incorectă deoarece pentru a demonstra că $(\sin)'(x) = \cos x$ a fost necesară tocmai limita de mai sus.

54. În problemele **54—59** vom folosi șirul lui Rolle:

Aria dreptunghiului $= 2\sqrt{R^2 - x^2}\,(R - x) = 2k^2 \Rightarrow$ $x^4 - 2Rx^3 + 2R^3x - R^4 + k^4 = 0$. Fie $f(x) = x^4 - 2Rx^3 + 2R^3x - R^4 + k^4$ și aplicînd șirul lui Rolle obținem:

$$f'(x) = 4x^3 - 6Rx^2 + 2R^3 = 4(x - R)^2\left(x + \frac{R}{2}\right).$$

$$f(R) = k^4 > 0,\ f\left(-\frac{R}{2}\right) = -\frac{27}{16}R^4 + k^4.$$

Dacă: $f\left(-\frac{R}{2}\right) > 0$ există două soluții reale;

$$f\left(-\frac{R}{2}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{3}{2}k;$$

$$f\left(-\frac{R}{2}\right) < 0 \text{ nici o soluție reală.}$$

55. Fie x — baza triunghiului, $AA' = h$ — înălțimea triunghiului, A'' punctul unde înălțimea intersectează a doua oară cercul circumscris. $BA^2 = AA' \cdot A'A'' \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2 = 4h(2R - h)$, $x^4 - 16a^2Rx + 16a^4 = 0$.
Dacă $4a^2 < 3R\sqrt[3]{4a^2R} \Rightarrow$ două rădăcini reale pozitive.
Dacă $a = \frac{1}{2}R\sqrt[4]{27} \Rightarrow$ o rădăcină reală $x = R\sqrt{3}$.

56. Fie x distanța de la centrul elipsei la baza triunghiului

$$S = \frac{b}{a}(a - x)\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow (x < a) \Rightarrow x^4 - 2ax^3 + 2a^2x +$$

$$+ m^4 - a^4 = 0 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow x_1 = -a,\ x_2 = x_3 = a;$$

$$m^2 < a^2 \Rightarrow x_1 > 0,\ x_2 < 0,\ x_1, x_2 \in (-a, a);$$

$$a^2 < m^2 < \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 \Rightarrow x_1,\ x_2 \in (-a, a);$$

$$m^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{a}{2}.$$

deci, dacă $m^2 < \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ există două triunghiuri de aria $\frac{b}{a}m^2$, dacă $m = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ există un triunghi, dacă $m^2 > \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ nu există nici un triunghi.

57. Fie $y = \lambda$ ordonata corzii,

$$f(\lambda) = \frac{a}{b}(b + \lambda)\sqrt{b^2 - \lambda^2},\ \lambda \in [-b, b]$$

$$A(-b, 0),\ B(b, 0)$$

$$M\left(-\frac{a}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{4}ab\right)$$

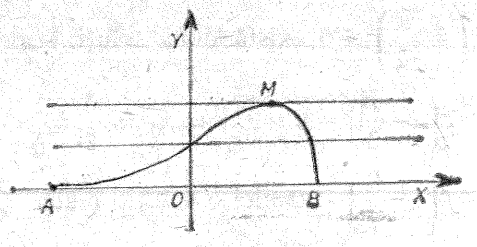


Fig. IV.57

iar numărul de soluții reale se determină intersectînd graficul funcției cu paralela variabilă $y = \lambda$, dusă la axa Ox:

λ	Numărul de rădăcini reale
$\lambda \in \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4} ab\right)$	$x_1 \in (-b, 0),\ x_2 \in (b, 0)$
$\lambda = \frac{3\sqrt{3}}{4} ab$	$x_1 = x_2 = -\frac{a}{2}$
$\lambda \in \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} ab, \infty\right)$	nici o rădăcină reală

58. Fie x — raza cilindrului, y — înălțimea cilindrului.

$$\frac{x}{h-y} = \frac{R}{h} \Rightarrow y = h\left(1 - \frac{x}{R}\right) \Rightarrow$$

$$V = \pi x^2 y = \frac{\pi h}{R} m^3$$

$$f(x) = x^3 - Rx^2 + m^3 = 0,\ m > 0;$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{2}{3} R.$$

m	Discuție
$m \in \left(0, \frac{R\sqrt[3]{4}}{3}\right)$	două soluții distincte
$m = \frac{R\sqrt[3]{4}}{3}$	soluție confundată
$m > \frac{R\sqrt[3]{4}}{3}$	nu există soluții reale.

59. Fie x — raza, y — înălțimea $\Rightarrow 3x^3 - 6a^2x + 4b^3 = 0$

dacă $b^3 < a^3\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow$ două soluții.

dacă $b^3 = a^3\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow$ o soluție.

60. (2, 4). **61.** Figura IV.61. $S = \frac{R^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)$ reprezintă aria segmentului circular.

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(S - \frac{2}{3} bh\right) =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{R^2}{2}(\alpha - \sin\alpha) - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{3} \cdot R\sin\frac{\alpha}{2} \cdot h\right] = 0.$$

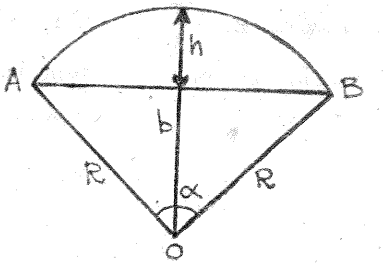


Fig. IV.61

62. $f'(x) = \frac{(x - \sqrt{\alpha\beta})(x + \sqrt{\alpha\beta})}{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{\alpha\beta x^2} + \sqrt[3]{\alpha^2\beta^2})}$

$$f''(x) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\alpha\beta} \cdot x\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} > 0.$$

63. Figura IV.63. $\mu(\widehat{AOB}) = \frac{2\pi}{n}$; $\mu(\widehat{MOB}) = \frac{\pi}{n}$;

$MB = R\sin\frac{\pi}{n}$, deci $l_n = 2R\sin\frac{\pi}{n} \Rightarrow p_n = 2n \cdot R\sin\frac{\pi}{n}$.

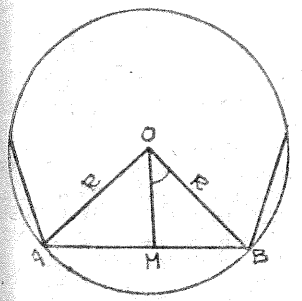


Fig. IV.63 a

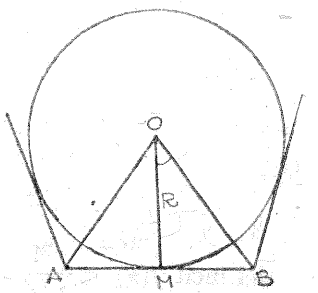


Fig. IV.63 b

$$\mu(\widehat{AOB}) = \frac{2\pi}{n}\ ;\ \mu(\widehat{MOB}) = \frac{\pi}{n}\ ;\ MB = R\operatorname{tg}\frac{\pi}{n},$$

deci

$$L_n = 2R\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} \Rightarrow P_n = 2nR\operatorname{tg}\frac{\pi}{n};\ 2nR\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} + 2nR\sin\frac{\pi}{n} > 4\pi R \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} + \sin\frac{\pi}{n} > 2\frac{\pi}{n}.$$

Notăm: $x = \frac{\pi}{3}$ și cum $n \geqslant 3 \Rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{3}$, deci vom asocia acestei relații funcția:

$$f(x) = \operatorname{tg} x + \sin x - 2x$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x - 2 = \frac{\cos^3 x - 2\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{(\cos x - 1)\cdot(\cos^2 x - \cos x - 1)}{\cos^2 x} > 0.$$

deci conform unei proprietăți a teoremei lui Lagrange, cum f' este derivabilă atunci f este monoton crescătoare și cum $f(0) = 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ deci $\operatorname{tg} x + \sin x - 2x > 0$ ceea ce trebuia de demonstrat.

64. i) Se aplică teorema lui Lagrange funcției $g(t) = \sqrt{t}$ pentru $t \in [x,\ x+1] \Rightarrow \exists$ cel puțin un punct $c \in (x,\ x+1)$ astfel încît $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$, dar

$$x < c < x+1 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} > \frac{1}{2\sqrt{c}} > \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} > f(x) > \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \Rightarrow f(x) < \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ și } \frac{1}{2\sqrt{x+1}} < f(x)$$

relație în care putem efectua translația: $x + 1 = y \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{y}} < f(y-1)$ deci putem determina un x convenabil astfel încît $f(x) < \frac{1}{2\sqrt{x}} < f(x-1)$.

Evident, mai putem demonstra:

$$2\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x} = \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$2\sqrt{x} - 2\sqrt{x-1} = \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} > \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

ii) $f(1) < \frac{1}{2} < f(0)$

$f(2) < \frac{1}{2\sqrt{2}} < f(1)$

$f(3) < \frac{1}{2\sqrt{3}} < f(2)$

$f(4) < \frac{1}{2\sqrt{4}} < f(3)$

.....

$f(n) < \frac{1}{2\sqrt{n}} < f(n-1)$

și însumînd cele n duble inegalități obținem

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) < \frac{1}{2}\cdot S_n < \sum_{i=0}^{n-1} f(i) \qquad (1)$$

dar $\sum_{i=1}^{n} f(i) = \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n+1} - 1,$

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(i) = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \sqrt{n}$$

și înlocuind în relația (1) obținem:

$$\sqrt{n+1} - 1 < \frac{1}{2}\cdot S_n < \sqrt{n} \text{ adică}$$

$$2(\sqrt{n+1} - 1) < S_n < 2\sqrt{n}.$$

iii) Folosind inegalitatea i) obținem:

$$N > 1 + 2[(\sqrt{3} - 2) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \ldots +$$

$$+ (\sqrt{1\,000\,001} - \sqrt{1\,000\,000})] = 1 + 2(\sqrt{1\,000\,001} -$$

$$- \sqrt{2}) > 1 + 2(1\,001 - \sqrt{2}) > 1 + 2\,000 - 3 = 1\,998.$$

$$N < 1 + 2[(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \ldots +$$

$$+ (\sqrt{1\,000\,000} - \sqrt{999\,999})] = 1 + 2(\sqrt{1\,000\,000} - 1) =$$

$$= 1 + 2(1\,000 - 1) = 1\,999 \Rightarrow 1\,998 < N < 1\,999$$

$$\Rightarrow [N] = 1\,998.$$

Unde, conform definiției:

$$[x] = \begin{cases} n \text{ pentru } n \leqslant x < n+1 \\ -n-1 \text{ pentru } -n-1 \leqslant x < -n, \end{cases} \quad n \in \mathbf{N},$$

și $[x] \leqslant x < [x] + 1$.

CAPITOLUL V

GRAFICE DE FUNCȚII

PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

Studiați variația următoarelor funcții și trasați graficul lor.

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$.

2. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 4x - 3}$.

3. $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 3}{x^2 + 1}$.

4. $f(x) = \dfrac{15x^2 - 13x - 20}{8x^2 + 10x - 7}$.

5. $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

6. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4}{(x-2)^2\,(x+1)}$.

7. $f(x) = \dfrac{x^4 - x^2 + 2}{x^4 + 2x^2 + 1}$.

8. Să se studieze funcția:

$$f(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

și să se construiască graficul său. Se va construi, de asemenea, pe același sistem cartezian, graficul funcției $f(x) = \sin x$. Să se compare cele două grafice, dacă $x \in [0, \pi]$.

9. a) $f(x) = \sqrt{x(x+2)^2}$.

b) $f(x) = \sqrt{x(x-2)^2}$.

(Fac. de matematică)

10. a) $f(x) = (x-2)^2(x+3)(x-4)$;

b) $f(x) = (3x-1)(x+1)^2(x-2)^2$.

11. $f(x) = x - \sqrt{9 + 6x - 3x^2}$.

12. a) $f(x) = \sqrt{x + 4 - 4\sqrt{x}} + \sqrt{x + 9 - 6\sqrt{x}}$.

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}}{\sqrt{2x + \sqrt{4x - 1}} + \sqrt{2x - \sqrt{4x - 1}}}$.

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} - \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}}}{\sqrt{x + 2 + 4\sqrt{x - 2}} + \sqrt{x - 1 + 2\sqrt{x - 2}}}$.

13. $f(x) = \dfrac{3x + |x^2 - 4|}{|x - 2|}$.

(Institutul Politehnic)

14. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$. **15.** $f(x) = x\sqrt{\dfrac{a - x}{a + x}}$, $a \in \mathbf{R}$.

16. $f(x) = x\sqrt{\dfrac{|x| - 1}{|x|}}$.

17. $f(x) = \dfrac{ax}{ax^2 + 1}$, $a > 0$, (serpentina lui Newton).

18. $f(x) = \dfrac{2(x - 1)^2}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}$.

19. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} \pm \sqrt{a^2 - x^2}$ (cardioida).

20. $f(x) = c_1\sqrt{a^2 + x^2} + c_2|b - x|$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $b > 0$.

(Fac. de matematică)

21. $f(x) = x^x$, pentru $x > 0$. **22.** $f(x) = |x + 1|e^{-|x-1|}$.

23. $f(x) = \dfrac{1 - \cos^2 x}{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}$.

24. $f(x) = \dfrac{1 - \sin x}{1 - \cos x}$.

25. $f(x) = \sin x - \cos x + \sqrt{\dfrac{2}{3}} \sin x \cos x$.

26. $f(x) = \dfrac{1 + \sin^2 x}{1 - \sin x}$.

27. $f(x) = \sqrt{|\cos x| - |\sin x|}$, $x \in D \subset [0, 2\pi]$.

28. $f(x) = \dfrac{\cos 3x}{1 + \cos 2x}$.

29. $f(x) = \dfrac{1 + \sin x}{\sin x(1 - \sin x)}$. **30.** $f(x) = \dfrac{\cos x + \sin x - 1}{\cos x - \sin x + 2}$.

31. $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$, $x \in \mathbf{R}$.

32. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{2 \ln|x| - 1}{\ln|x| + 1}$.

33. $f(x) = \arcsin \dfrac{2 \ln|x| - 1}{\ln|x| + 1}$.

34. $f(x) = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{2(x^2 + 2x + 2)}}$.

35. $f(x) = \arcsin x - x\sqrt{1 - x^2}$.

36. $f(x) = \arcsin \dfrac{x - 1}{\sqrt{2x^2 - 10x + 17}}$.

37. $f(x) = \arcsin(3x^4 - 6x^2 + 2)$.

38. $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$. **39.** $f(x) = \dfrac{1}{x} \sin x$.

40. $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$. **41.** $f(x) = e^{-x} \sin x$.

42. $f(x) = e^{-x^2} \sin x$. **43.** $f(x) = \cos x \cdot e^{\sin^2 x}$.

44. $f(x) = (\sin x + \cos x)e^{\sin x - \cos x}$.

45. Se consideră funcțiile:

sh: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, bijectivă și impară, numită *sinus hiperbolic*.
ch: $\mathbf{R} \to [1, \infty)$, surjectivă și pară, numită *cosinus hiperbolic*
th: $\mathbf{R} \to [-1, 1]$, bijectivă și impară, numită *tangentă hiperbolică*.

cth: $\mathbf{R} \to \mathbf{R} \setminus [-1, 1]$, surjectivă și impară, numită *cotangentă hiperbolică*, definite prin:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

i) Să se demonstreze relațiile:

1. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

2. $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \cdot \operatorname{ch} x$.

3. $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$.

4. $\operatorname{th}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \cdot \operatorname{th} y}$.

5. $\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \dfrac{x \pm y}{2} \cdot \operatorname{ch} \dfrac{x \mp y}{2}$.

6. $\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \dfrac{x + y}{2} \cdot \operatorname{sh} \dfrac{x - y}{2}$.

7. $\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \dfrac{x + y}{2} \cdot \operatorname{ch} \dfrac{x - y}{2}$.

8. $\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y = \dfrac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y}$.

9. $\operatorname{sh} \dfrac{x}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{2}}$ 10. $\operatorname{ch} \dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{\operatorname{ch} x + 1}{2}}$

11. $\operatorname{th} \dfrac{x}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}}$.

(semnul + se alege pentru $x > 0$, semnul − se alege pentru $x < 0$).

12. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

ii) Să se reprezinte grafic funcțiile hiperbolice.

iii) Să se determine funcțiile hiperbolice inverse și să se reprezinte grafic.

46. Se consideră funcția

$$f(x) = \sqrt{\frac{1 - 2x^2}{x^2 + 4x + 4}}.$$

a) Să se traseze graficul funcției $f(x)$;

b) Să se traseze graficul funcției $y = f^2(x)$.

47. Să se rezolve grafic inegalitățile:

a) $\dfrac{x}{x+2} > \dfrac{1}{x+1}$. b) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+2} > \dfrac{1}{x-2}$.

c) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} < \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$ d) $x < \sqrt{x^2 - x}$.

e) $\sqrt[3]{x^3 + 3x + 2} < \sqrt{x^2 + 2x + 3}$.

f) $\log x > 2\dfrac{x-1}{x+1}$ pentru $x > 1$.

48. Să se studieze funcțiile:

$$Y = \ln(1 + x), \quad Z = \frac{x}{1 + \dfrac{x}{2}}; \quad U = \frac{x}{1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{12}}.$$

și să se reprezinte graficele lor.

Cu ajutorul acestor grafice, să se studieze funcțiile:

$$A = Y - Z, \quad B = Y - U \quad (x > -1)$$

și să se reprezinte graficele lor.

Să se demonstreze că A este o funcție crescătoare cu graficul tangent axei Ox, în origine, iar B are un maxim pentru $x = 0$ și un minim pentru $x = 24$.

Să se deducă următoarele inegalități:

a) $\ln(1 + x) < \dfrac{x}{1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{12}} < \dfrac{x}{1 + \dfrac{x}{2}}$ pentru

$-1 < x < 0$.

b) $\dfrac{x}{1+\dfrac{x}{2}} < \ln(1+x) < \dfrac{x}{1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{12}}$ pentru

$0 < x < 3+\sqrt{21}$.

c) $\dfrac{x}{1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{12}} < \dfrac{x}{1+\dfrac{x}{2}} < \ln(1+x)$ pentru

$x > 3+\sqrt{21}$.

49. Se dă funcția

$$f(x) = |x| \cdot e^{\frac{1}{x-2}}.$$

a) Să se studieze și să se traseze graficul funcției $y = f(x)$.

b) Folosind graficul, să se determine numărul de rădăcini reale ale ecuației:

$f(x) - \lambda = 0$, unde λ este un parametru real.

(Institutul Politehnic)

50. Să se reprezinte grafic funcția:

$$f(x) = \frac{\ln|x| - 1}{x^2}$$

și să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuației $\ln|x| - 1 = \lambda x^2$, λ este parametru real.

51. a) Să se traseze graficul funcției:

$$f(x) = \frac{\lg|x| + 1}{x \lg e}.$$

b) Ținînd seama de reprezentarea grafică a funcției $f(x)$, să se stabilească numărul soluțiilor reale ale ecuației:

$$\frac{\lg|x| + 1}{x \cdot \lg e} + x^3 = 0.$$

52. Luînd în considerație graficele funcțiilor

$$f : \mathbf{R}\setminus\{1\} \to \mathbf{R},\ f(x) = x\sqrt{\frac{1}{|x-1|}}.$$

$$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ g(x) = 1 - x.$$

să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuației:

$$x\sqrt{\frac{1}{|x-1|}} = 1 - x.$$

53. Avînd în vedere graficul funcției

$$f : \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R},\ f(x) = \frac{|2x^2 - |x-1| - 2|}{x}.$$

să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuației

$$f(x) = \lambda,\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

54. Se consideră funcția $f(x) = x^{2n} - 2x^n$ unde n este un număr natural. Se cere:

a) Să se studieze semnul funcției după valorile lui n.

b) Să se determine a, astfel ca $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - a}{(x-1)^2}$ să existe, să fie finită și să se calculeze valoarea limitei.

c) Să se reprezinte grafic funcția $f(x)$ pentru $n = 3$.

(Institutul Politehnic)

55. Să se studieze curba generată de următoarele ecuații parametrice:

$$x = \frac{2+t^2}{1+t^2};\quad y = t - \frac{t}{1+t^2}.$$

56. Să se studieze și să se traseze graficul următoarelor funcții implicite:

a) $x^2y^2 + y - 1 = 0$. b) $x^2y^2 = (y+1)^2(4-y^2)$.

c) $x^2(y-2a) + 2y(y-a)^2 = 0$. d) $8a^2y^2 = x^2(a^2 - 2x^2)$.

57. i) Să se reprezinte grafic funcția $f(x) = mx + x^2 \ln x$, $m \in \mathbf{R}$, pentru $x \in (0, 1]$.

ii) Să se determine locul geometric al punctelor de extrem ale funcției $f(x)$ și să se reprezinte grafic locul geometric determinat.

58. i) Să se studieze variația funcției

$$f_a(x) = \frac{xe^x}{e^x - a},\ a \neq 0,$$

considerînd cazurile $a < 0$, $a \in (0, 1)$, $a = 1$, $a > 1$.

ii) Să se arate că pentru oricare din curbele reprezentative $f_a(x)$, avem o asimptotă (D) fixă, neparalelă cu Oy.
Să se precizeze poziția acestei asimptote față de curbele $f_a(x)$.

iii) Să se verifice că punctele de pe curbele $f_a(x)$ în care se pot duce tangente paralele cu Ox sînt situate pe o dreaptă (D_1) care nu depinde de a.

iv) Să se discute existența punctelor de pe curbele $f_a(x)$ în care se pot duce tangente paralele cu (D) și să se arate că aceste puncte aparțin unei alte drepte (D_2).

v) Să se arate că abscisele punctelor aparțin curbelor $f_a(x)$ pentru care $f_a''(x) = 0$ sînt rădăcinile nenule ale ecuației $e^x(2 - x) - a(2 + x) = 0$.

vi) Să se discute această ecuație.

vii) Să se verifice dacă punctele deinflexiune ale curbelor $f_a(x)$ sînt situate pe o aceeași dreaptă (D_2), $(a \neq 1)$.

viii) Să se traseze graficele curbelor $f_a(x)$ după valorile parametrului real a.

59. Să se studieze și să se reprezinte grafic funcția $f(x) = x \cdot \ln(ax) + x^2$, $a \in \mathbf{R}$.

60. Să se studieze variația funcției:

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^m},$$

după diversele valori ale parametrului real m.

61. a) Să se arate că ecuația: $x^{2p+1} + x + 2 = 0$ are o singură rădăcină reală, a cărei valoare se cere.

b) Să se determine polinomul $P(x)$, astfel ca

$$P(x) - P'(x) = x^{2p+1} + x + 2.$$

c) Să se studieze funcția: $f(x) = P(x) \cdot e^{-x}$ și să se reprezinte grafic.

62. Se consideră funcția: $f(x, m, n) = \dfrac{x^m}{1 - x^n}$ unde m, n sînt două numere naturale.

a) Să se reprezinte graficele funcției după diferitele valori ale numerelor m și n.

b) Să se deducă numărul de rădăcini reale ale ecuației:

$$x^m + a(x^n - 1) = 0,$$

a fiind un parametru real.

c) Să se determine numărul n, în funcție de p, astfel ca limita produsului:

$$\lim_{x \to \infty} \prod_{k=1}^{p} f(x, k(k+1), n)$$

să fie finită și diferită de zero.

REZOLVĂRI ȘI RĂSPUNSURI

Generalități

Pentru a putea trasa graficul unei funcții care admite derivată de ordinul doi în toate punctele, se procedează în felul următor:

1. *Domeniul de definiție:*
— în cazul expresiilor raționale, numitorul funcției trebuie să fie diferit de zero;
— cantitatea de sub un radical cu indice par trebuie să fie cel puțin zero;
— baza unei exponențiale trebuie să fie strict pozitivă;
— funcțiile arcsin și arccos trebuie să fie definite pe $[-1, 1]$.
— numărul, căruia i se aplică logaritmul, este strict pozitiv, iar baza logaritmului este strict pozitivă și diferită de 1.

2. *Explicitarea funcțiilor*, modul, maxim, minim, signatură, treapta lui Heaviside, partea întreagă și partea zecimală (evident dacă funcția f le conține).

3. *Determinarea parității și a imparității funcției:* dacă funcția este pară, $f(x) = f(-x)$, atunci graficul funcției este simetric față de ordonată, dacă funcția este impară, $f(x) = -f(-x)$, atunci graficul funcției este simetric față de

originea axelor; deci este îndeajuns ca trasarea graficului să fie efectuată pe semiaxa Ox pozitivă, apoi să se simetrizeze.

4 *Determinarea perioadei T a funcției trigonometrice și trasarea graficului pe intervalul* $[0, T]$ intersectat cu domeniul de definiție, apoi extensia sistemului (a detaliului de grafic) pe toată abscisa.

5. *Intersecția cu axele de coordonate:*

a) $y = 0 \Rightarrow f(x) = 0$, iar dacă soluțiile ecuației $f(x) = 0$ există, atunci aceasta reprezintă abscisele punctelor în care graficul intrsectează axa Ox.

$x = 0 \Rightarrow y = f(0) \Rightarrow$ punctul în care graficul taie ordonata.

b) Dacă domeniul de definiție este nemajorat, atunci se cercetează $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, iar dacă domeniul de definiție este neminorat, atunci se cercetează $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

6. *Asimptote:*

a) *Verticale.* Trebuie căutate în punctele de discontinuitate ale funcției, adică punctele în care funcția f nu este definită.

Observație: dacă dreapta $x = x_0$ este asimptotă verticală la graficul funcției f, atunci distanța dintre grafic și asimptotă, măsurată pe orizontală, descrește necontenit cînd punctul de pe grafic se depărtează necontenit;

b) *Oblice.* Se definesc pentru funcțiile definite pe mulțimi nemărginite, chiar dacă funcțiile sînt mărginite. Spunem că dreapta $y = mx + n$ este asimptotă oblică la ramura $+\infty$ a graficului, dacă:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx - n] = 0.$$

Dacă mulțimea pe care este definită funcția este nemărginită la dreapta, atunci $+\infty$ este un punct de acumulare al mulțimii domeniului de definiție.

Dacă mulțimea domeniului de definiție este nemărginită la stînga, atunci $-\infty$ este un punct de acumulare al mulțimii E.

Spunem că o dreaptă $y = m_1x + n_1$ este asimptotă oblică la ramura spre $-\infty$ a graficului, dacă:

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - m_1x - n_1] = 0.$$

Dacă, dreapta $y = mx + n$ este asimptotă la $\pm\infty$, coeficientul unghiular m și ordonata la origine n verifică egalitățile:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad n = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx].$$

Observații:

i) dacă există $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ și este finită, dar $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx)$ nu există sau este infinită, graficul funcției nu are asimptotă oblică la $\pm\infty$.

ii) dacă $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ nu există sau este infinită, graficul funcției nu are asimptotă la $\pm\infty$.

c) *Orizontale.* Dacă există $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = a$ și este finită, atunci dreapta $y = a$ este asimptotă la $\pm\infty$, paralelă cu axa Ox.

Observații:

i) Dacă graficul admite asimptotă orizontală, atunci nu admite asimptotă oblică spre $+\infty$ sau $-\infty$ și reciproc.

ii) În cazul funcțiilor periodice, un grafic poate admite o infinitate de asimptote verticale (sau puncte critice);

iii) Pot să existe asimptote orizontale spre $\pm\infty$ și oblice spre $\mp\infty$.

7. *Studiul primei derivate*

a) Se determină mulțimea E' inclusă în domeniul de definiție, pe care funcția f este derivabilă și apoi se calculează $f'(x)$;

b) Se rezolvă ecuația $f'(x) = 0$, ale cărei rădăcini sînt, eventual, puncte de extrem ale funcției (sau puncte critice).

c) Se determină intervalele pe care derivata întîi păstrează același semn și se determină semnul derivatei întîi pe aceste intervale:

Dacă $f' > 0$ pe E', atunci f este strict crescătoare.

Dacă $f' < 0$ pe E', atunci f este strict descrescătoare. (Consecințe ale teoremei lui Lagrange.)

Dacă $f' \neq 0$ pe E', atunci f' are același semn pe întregul interval.

Dacă funcția nu este derivabilă într-un punct x_0, atunci se vor obține punctele:

— dacă funcția f este continuă și are în x_0 derivate laterale diferite și $f_d(x_0) = +\infty$, $f_s(x_0) = -\infty$ sau invers, atunci cele două semitangente sînt suprapuse și în acest caz $M_0(x_0, f(x_0))$ se numește punct de întoarcere al graficului

— dacă funcția f este continuă și are în x_0 derivate laterale diferite și cel puțin una din ele finite, deci funcția nu este derivabilă și cele două semitangente nu sînt nici în prelungire nici suprapuse. În acest caz $M_0(x_0, f(x_0))$ se numește punct unghiular al graficului.

Observație. Punctele de întoarcere sau unghiulare se pot obține fie din funcțiile definite pe mai multe intervale, fie în cadrul funcțiilor care generează modulul după prima derivare.

8. *Studiul derivatei a doua:*

Definiție. Dacă derivata f' este derivabilă în x_0, se spune că funcția f este derivabilă de două ori în punctul x_0.

a) Se determină mulțimea $E'' \subseteq E'$ pe care funcția este derivabilă de două ori;

b) Se calculează f'' și se rezolvă ecuația $f''(x) = 0$, iar rădăcinile ecuației pot fi puncte de inflexiune;

c) Se determină intervalele pe care derivata a doua păstrează același semn.

Definiții:

i) f este convexă pe intervalul $I \subseteq E''$ dacă tangenta dusă în orice punct al graficului se află sub grafic.

ii) f este concavă pe intervalul I, dacă tangenta dusă în orice punct al graficului se află deasupra graficului.

— Dacă $f'' > 0$, atunci f este convexă pe I.

— Dacă $f'' < 0$, atunci f este concavă pe I.

Definiție. Se spune că punctul $x_0 \in I$ este un punct de inflexiune al funcției f, dacă funcția are derivată (finită sau infinită) în x_0 și dacă funcția este convexă de o parte a lui x_0 și concavă de cealaltă parte a lui x_0, iar tangenta dusă la grafic în punctul x_0 traversează graficul funcției.

Propoziție:

i) Dacă într-un punct interior $a \in I$, avem:

$$f'(a) = 0,\ f''(a) = 0,\ f'''(a) \neq 0,$$

atunci a este un punct de inflexiune al funcției f (deci nu este un punct de extrem)

ii) Fie f o funcție derivabilă de două ori în punctul $a \in I$, astfel încît $f'(a) = 0$ și $f''(a) \neq 0$. Dacă:

$f''(a) < 0$, atunci a este punct de maxim,

$f''(a) > 0$, atunci a este punct de minim.

9. *Trasarea tabloului de variație* — tablou în care se trec pentru sistematizare rezultatele obținute la punctele precedente:

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	
$f''(x)$	

10. *Trasarea graficului funcției* — conform rezultatelor sistematizate în tabloul de variație — într-un sistem de axe carteziene

1. i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R} \setminus \{\pm 1\}$.

ii) Funcție fără paritate, deci graficul funcției nu are proprietăți de simetrie.

iii) Asimptote: $x = \pm 1$ verticale.

$y = 1$ orizontală.

iv) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = -\frac{x^2 + 4x + 1}{(x^2 - 1)^2}.$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{3}$ puncte de extrem.

v)

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		-1		$-2+\sqrt{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		0	$+$	$+$		0	$-$	$-$		$-$
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\searrow$	1

vi) Vezi graficul V.1.

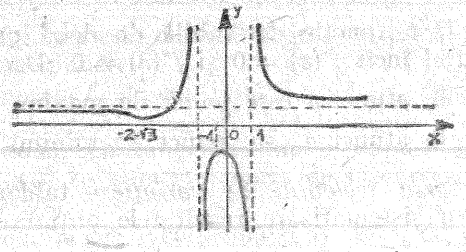


Fig. V.1

2. i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R} \setminus \{2 \pm \sqrt{7}\}$.

ii) Funcție fără paritate.

iii) Intersecția cu axele: $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{8}$.

iv) Asimptote: $x = 2 \pm \sqrt{7}$ verticale.

$y = 1$ orizontală.

v) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \frac{-4(4x^2 + 2x - 1)}{(x^2 - 4x - 3)^2}; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}.$$

vi) Studiul derivatei a II-a:

$$f''(x) = \frac{8(x + 1)(4x^2 - x + 7)}{(x^2 - 4x - 3)^3}.$$

vii) Tabloul de variație:

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		$2-\sqrt{7}$		0		$-1+\sqrt{2}$		$2+\sqrt{7}$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		0		$+$		$\nexists$		$+$		0		$-$		$-$
$f(x)$	1	$\searrow$	$0{,}54$	$\nearrow$	$+\infty$		$-\infty$	$\nearrow$	$-0{,}26$	$\searrow$		$\searrow$	$-\infty$	$\searrow$	1
$f''(x)$	$-$		$-$		$-$		$\nexists$		$-$		$-$		$-$		$+$

viii) Vezi graficul V.2.

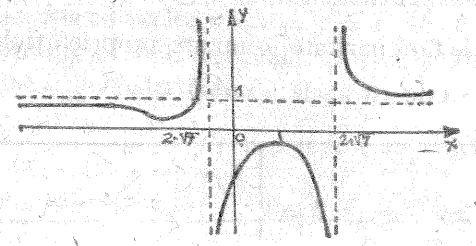


Fig. V.2

3. i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R}$.

ii) Funcție fără paritate, deci nu are proprietăți de simetrie.

ii) Intersecția cu axele: $x = 0 \Rightarrow y = -3$

$$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

iv) Asimptote: $y = 2$ — orizontală.

v) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 10x - 1}{(x^2 + 1)^2}; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = -5 \pm \sqrt{26}.$$

vi) Tabloul de variație:

x	$-\infty$		$-5-\sqrt{26}$		0		$-5+\sqrt{26}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		0		$-$		0		$+$
$f(x)$	2	$\nearrow$	$2{,}15$	$\searrow$	-3	$\searrow$	$-3{,}15$	$\nearrow$	2

vii) Vezi graficul V.3.

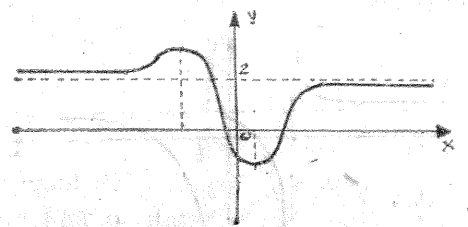


Fig. V.3

4. i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right\}$.

ii) Funcție fără paritate — nu are proprietăți de simetrie.

iii) Intersecția cu axele: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{20}{7}$.

$$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{5} \\ x = \frac{5}{3}. \end{cases}$$

iv) Asimptote: $x = -\frac{7}{4}$, $x = \frac{1}{2}$, verticale;

$y = \frac{15}{8}$ orizontale.

v) Studiul derivatei I:

$$f'(x) = \frac{254x^2 + 110x + 291}{(8x^2 + 10x - 7)^2}; \quad f'(x) > 0.$$

vi) Tabloul de variație:

x	$-\infty$		$-\frac{7}{4}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$\frac{15}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$ / $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ / $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{15}{8}$

vii) Vezi graficul V.4.

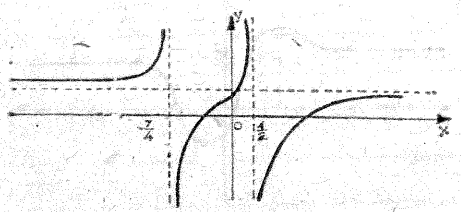


Fig. V.4

5. i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

ii) Funcție fără paritate.

iii) Intersecția cu axele: $x = 0 \Rightarrow y = 1$; $y = 0 \Rightarrow x = -1$.

iv) Asimptote: $x = 1$, verticală; $y = x + 5$, oblică.

v) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x \in \{-1, 5\}.$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f'(x) = +\infty; \qquad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f'(x) = -\infty.$$

deci punct de întoarcere.

vi) Studiul derivatei a doua:

$$f''(x) = \frac{24(x+1)}{(x-1)^4}; \quad f''(x) = 0 \Rightarrow x = -1.$$

vii) Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-1		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ / $-\infty$	$\searrow$	$\frac{27}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$		$+$	

viii) Vezi graficul V.5.

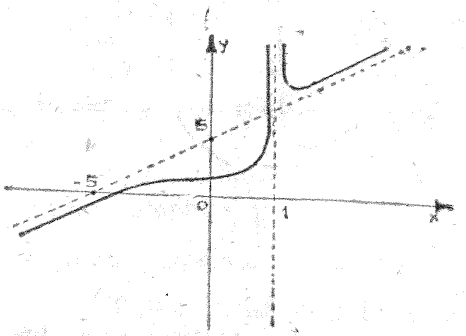


Fig. V.5

6. i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 2\}$.

ii) Funcție fără paritate.

iii) Intersecția cu axele: $y = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$x = 0 \Rightarrow y = -1$.

iv) Asimptote: $x = 2$, $x = -1$ (verticale);
$y = 0$, orizontală.

v) Studiul primei derivate:

$f'(x) = \frac{-3x^2(x+2)}{(x-2)^3(x+1)^2}$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x \in \{-2, 0\}$ eventuale puncte de extrem (numite și *puncte critice*).

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f'(x) = -\infty \quad \lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f'(x) = +\infty.$$

Deci în $x = 2$ apare un punct de întoarcere.

vi) Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$		$+$	$-$	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ / $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	0

vii) Vezi graficul V.6

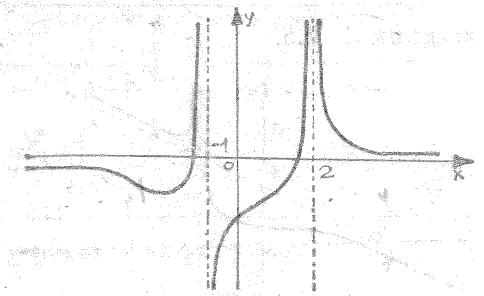


Fig. V.6

7. i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R}$.

ii) Funcție pară, deci graficul este simetric față de ordonată.

iii) Nu are puncte de intersecție cu axa Ox, iar $f(0) = 2$.

iv) Asimptote: $y = 1$, orizontală.

v) Studiul primei derivate:

$f'(x) = \frac{2x(3x^2-5)}{(x^2+1)^3}$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$;

vi) Tabloul de variație:

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{5}{3}}$		0		$\sqrt{\frac{5}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{7}{16}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{7}{16}$	$\nearrow$	1

vii) Vezi graficul V.7.

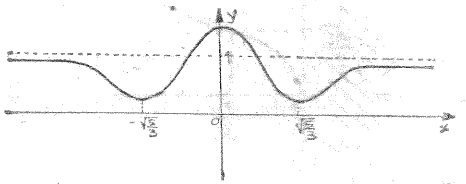


Fig. V.7

8. $f(x)$ are o singură rădăcină reală

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6 \pm 2\sqrt{3}} \approx \pm 3{,}07;\ \pm 1{,}59$

$f\left(\sqrt{6-2\sqrt{3}}\right) = -f\left(-\sqrt{6-2\sqrt{3}}\right) \approx 1{,}003$

$f\left(\sqrt{6+2\sqrt{3}}\right) = -f\left(-\sqrt{6+2\sqrt{3}}\right) \approx 0{,}519.$

Pe intervalul $(-3, 3)$, graficul funcției aproximează sinusoida.

9. a) i) Domeniul de definiție: $x \in [0, \infty)$.

ii) Nu admite asimptote.

iii) Studiul primei derivate $f'(x) = \frac{(x+2)(3x+2)}{2\sqrt{x(x+2)^2}} =$

$= \frac{3x+2}{2\sqrt{x}} > 0.$

iv) Studiul derivatei a doua: $f''(x) = \frac{3x-2}{4x^{3/2}}$.

v) Tabloul de variație:

x	0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{8\sqrt{6}}{9}$	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$

vi) Vezi graficul V.9.

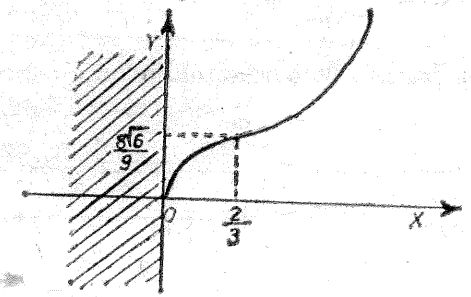


Fig. V.9

10. a) i) $x \in \mathbf{R}$.

ii) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = (x-2)(4x^2 - 7x - 22);$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \frac{7 \pm 20}{8}.$$

iii) Studiul derivatei a doua:

$$f''(x) = 12x^2 - 30x - 8.$$

iv) Trasarea tabloului de variație:

x	$-\infty$		$-\frac{13}{8}$		2		$\frac{27}{8}$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-101	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{15}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

v) Vezi graficul V.10a.

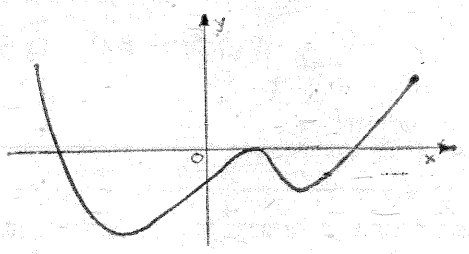


Fig. V.10 a

b) i) $x \in \mathbf{R}$.

ii) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = (x+1)(x-2)(15x^2 - 13x - 4);$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1,\ x = 2,\ x = 1{,}11,\ x = -0{,}24.$

iii) Trasarea tabloului de variație:

x	$-\infty$		-1		$-0{,}24$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-4{,}97$	$\nearrow$	8	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

iv) Vezi graficul V.10b.

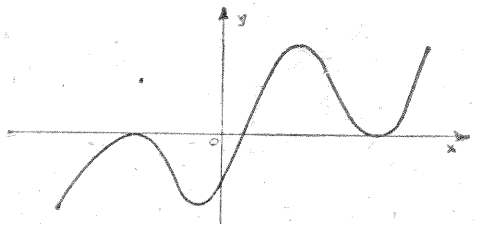


Fig. V.10b

11. i) Domeniul de definiție: $x \in [-1, 3]$

ii) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = 1 + \frac{3(x-1)}{\sqrt{9 + 6x - 3x^2}},\quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

iii) Studiul derivatei a doua:

$$f''(x) = \frac{8}{(9 + 6x - 3x^2)^{3/2}} [9 + 6x - 3x^2 + (x - 1)^2] > 0.$$

iv) Tabloul de variație:

x	-1			0			8
$f'(x)$	|	$-$	$-$	0	$+$	$+$	|
$f(x)$	-1	$\searrow$		-3	$\nearrow$		8
$f''(x)$	|	$+$		$+$	$+$		|

v) Vezi graficul V.11.

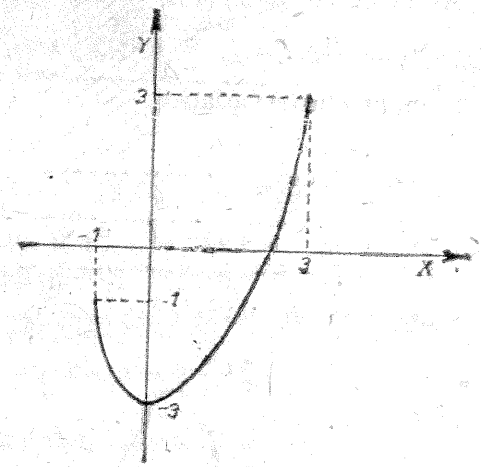


Fig. V.11

12. a) $f(x) = |\sqrt{x} - 2| + |\sqrt{x} - 3|$ pentru $x \in [0, \infty)$

$$f(x) = \begin{cases} 5 - 2\sqrt{x} & \text{pentru } x \in [0, 4] \\ 1 & \text{pentru } x \in (4, 9] \\ 2\sqrt{x} - 5 & \text{pentru } x \in (9, \infty) \end{cases}$$

i) Domeniul de definiție: $x \in [0, \infty)$

ii) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{pentru } x \in (0, 4] \\ 0 & \text{pentru } x \in (4, 9] \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{pentru } x \in (9, \infty) \end{cases}$$

în punctele (4, 1), (9, 1) graficul funcției admite puncte unghiulare.

iii) Studiul derivatei a doua:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} & \text{pentru } x \in (0, 4] \\ 0 & \text{pentru } x \in (4, 9] \\ -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}} & \text{pentru } x \in (9, \infty) \end{cases}$$

iv) Tabloul de variație:

x	0			4			9			$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$+$	$+$	
$f(x)$	5	$\searrow$		1	$\to$	1		$\nearrow$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	$+$	0	0			$-$	$-$	

v) Vezi graficul V.12.

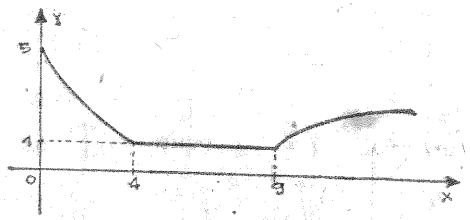


Fig. V.12

b) Domeniul de definiție este: $x \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-\frac{1}{2}+\sqrt{2}\sqrt{x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}+\sqrt{x-\frac{1}{2}-\sqrt{2}\sqrt{x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}}{\sqrt{2}\sqrt{x-\frac{1}{4}+\sqrt{x-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}}+\sqrt{2}\sqrt{x-\frac{1}{4}-\sqrt{x-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{x-\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}}{\sqrt{2}\sqrt{\left(\sqrt{x-\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{2}\sqrt{\left(\sqrt{x-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\left|\sqrt{x-\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right|+\left|\sqrt{x-\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right|}{\left|\sqrt{x-\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right|+\left|\sqrt{x-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right|}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{x-\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{x-\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x-\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}+\sqrt{x-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}} & \text{pentru } x\in[1,\infty)\cap\left[\frac{1}{2},\infty\right)\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{x-\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{x-\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x-\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}+\sqrt{x-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}} & \text{pentru } x\in\left[\frac{1}{2},1\right)\cap\left[\frac{1}{2},\infty\right)\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{x-\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{x-\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x-\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}-\sqrt{x-\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}} & \text{pentru } x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cap\left[\frac{1}{2},\infty\right)\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{4x-1}} & \text{pentru } x\in[1,\infty)\\ \dfrac{1}{\sqrt{4x-1}} & \text{pentru } x\in\left[\frac{1}{2},1\right).\end{cases}$$

c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1-4\sqrt{x-1}+4}-\sqrt{x-1-6\sqrt{x-1}+9}}{\sqrt{x-2+4\sqrt{x-2}+4}+\sqrt{x-2+2\sqrt{x-2}+1}}=$

$$=\frac{\sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2}-\sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2}}{\sqrt{(\sqrt{x-2}+2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-2}+1)^2}}=$$

$$=\frac{|\sqrt{x-1}-2|-|\sqrt{x-1}-3|}{|\sqrt{x-2}+2|+|\sqrt{x-2}+1|}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x-1}-2-\sqrt{x-1}+3}{\sqrt{x-2}+2+\sqrt{x-2}+1} & \text{pentru } x\in[10,\infty)\cap[2,\infty)\\ \dfrac{\sqrt{x-1}-2+\sqrt{x-1}-3}{\sqrt{x-2}+2+\sqrt{x-2}+1} & \text{pentru } x\in[5,10)\cap[2,\infty)\\ \dfrac{-\sqrt{x-1}+2+\sqrt{x-1}-3}{\sqrt{x-2}+2+\sqrt{x-2}+1} & \text{pentru } x\in(-\infty,5)\cap[2,\infty)\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}+3} & \text{pentru } x\in[10,\infty)\\ \dfrac{2\sqrt{x-1}-5}{2\sqrt{x-2}+3} & \text{pentru } x\in[5,10)\\ -\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}+3} & \text{pentru } x\in[2,5)\end{cases}$$

13. i) Explicitînd funcțiile modul vom obține:

$$|x^2-4|=\begin{cases}x^2-4 & \text{pentru } x\in(-\infty,-2]\cup[2,\infty)\\ -x^2+4 & \text{pentru } x\in(-2,2)\end{cases}$$

$$|x-2|=\begin{cases}x-2 & \text{pentru } x\in(2,\infty)\\ -x+2 & \text{pentru } x\in(-\infty,2).\end{cases}$$

obținem:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x-4}{2-x} & \text{pentru } x\leqslant -2\\[2mm] \dfrac{x^2-3x-4}{2-x} & \text{pentru } x\in(-2,\ 2)\\[2mm] \dfrac{x^2+3x-4}{x-2} & \text{pentru } x>2\end{cases}$$

ii) Asimptote: $x=2$ verticală

$$\left.\begin{aligned} y&=-x-5\\ y&=x+5\end{aligned}\right\}\ \text{oblice}$$

iii) $$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-x^2+4x+2}{(2-x)^2} & \text{pentru } x\leqslant -2\\[2mm] \dfrac{x^2-4x+10}{(2-x)^2} & \text{pentru } x\in(-2,\ 2)\\[2mm] \dfrac{x^2-4x-2}{(x-2)^2} & \text{pentru } x>2\end{cases}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=2+\sqrt{6}.$$

În punctul $x=2$, graficul admite punct de întoarcere, deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f'(x)=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f'(x)=+\infty$.

În punctul $x=-2$, graficul admite punct unghiular, deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f'(x)=\dfrac{11}{8}$, $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f'(x)=-\dfrac{5}{8}$.

iv) Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-2		2		$2+\sqrt{6}$		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$+$	$+$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	$11{,}8$	$\nearrow$	$+\infty$

v) Trasarea graficului. Vezi graficul V.13.

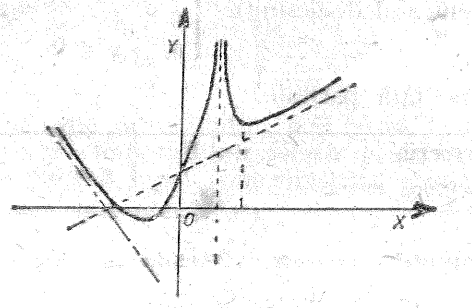


Fig. V.13

14. i) Domeniul de definiție: $\begin{cases}\dfrac{x-1}{x+1}\geqslant 0\\ x+1\neq 0\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow x\in\mathbf{R}\setminus(-1,\ 1]$.

ii) Funcție fără paritate.

iii) Intersecția cu axele: $y=0\Rightarrow x=1$.

iv) Asimptote: $x=-1$ (verticală), $y=1$ (orizontală).

v) Studiul derivatei I:

$$f'(x)=\frac{1}{(x+1)^{\frac{3}{2}}\,(x-1)^{\frac{1}{2}}}.$$

vi) Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$\nexists$	$+$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

vii) Vezi graficul V.14.

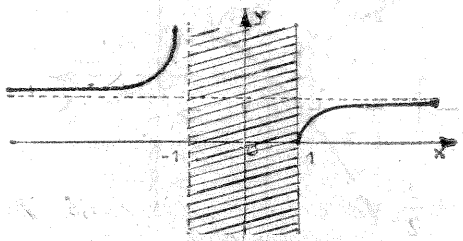


Fig. V.14

15. i) Domeniul de definiție: $\begin{cases} \dfrac{a-x}{a+x} \geqslant 0 \\ a+x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-a, a]$.

ii) Funcție fără paritate.

iii) Intersecția cu axele: $y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases}$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

iv) Asimptote: $x = -a$, verticală.

v) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \frac{a^2 - ax - x^2}{\sqrt{(a-x)(a+x)^3}}; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) \\ x = -\dfrac{a}{2}(\sqrt{5} - 1). \end{cases}$$

vi) Tabloul de variație:

x	$-\infty$		$-a$		$\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$		a		$+\infty$
$f'(x)$				$+$	0	$-$			
$f(x)$			$-\infty$	$\nearrow$	$0{,}3a$	$\searrow$	0		
$f''(x)$				$-$		$-$			

vii) Vezi graficul V.15

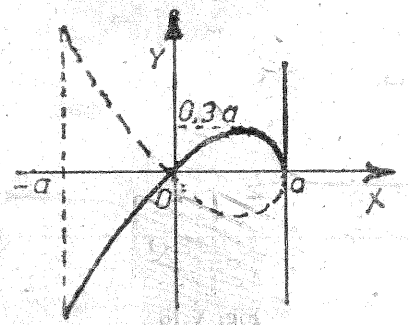


Fig. V.15

Observație:

Curba trasată cu linie punctată are funcția:

$$f(x) = -x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

16. i) Domeniul de definiție: $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

ii) Funcția este impară: $f(x) = -f(-x)$ deci o vom studia pe mulțimea $[1, \infty)$, apoi vom simetriza graficul obținut față de originea axelor.

iii) Asimptote: $y = x - \frac{1}{2}$; pentru $x \to +\infty$.

iv) Studiul primei derivate:

$f'(x) = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x(x-1)}} > 0$; $f'_d(1) = +\infty$, deci tangenta la curbă în punctul $x = 1$ este perpendiculară pe Ox.

v) Studiul derivatei a doua: $f''(x) = \dfrac{-1}{4[x(x-1)]^{3/2}} < 0$.

vi) Tabloul de variație:

x	1				$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\nearrow$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	

vii) Vezi graficul V.16.

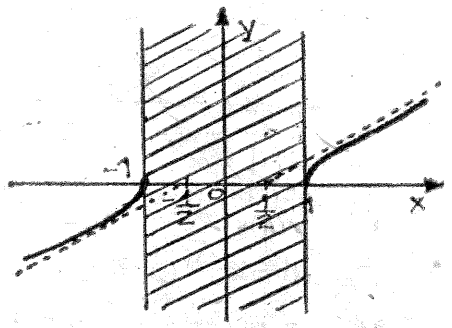


Fig. V.16

17. i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R}$.

ii) Asimptote: $y = 0$ (orizontală).

iii) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = a\frac{-ax^2+1}{(ax^2+1)^2};\ f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{a}}.$$

iv) Studiul derivatei a doua:

$$f''(x) = \frac{2a^2x(a^2x^4 - 2ax^2 - 3)}{(ax^2+1)^4};\ f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,$$

$$x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{3}{a}}.$$

v) Tabloul de variație:

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{3}{a}}$	$-\frac{1}{\sqrt{a}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{a}}$	$\sqrt{\frac{3}{a}}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+\ 0$	$-$	$-$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{a}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{a}}{2}$	$\searrow$	0
$f''(x)$	$-$	0	$+\ +$	0	$-\ -$	0	$+$

vi) Vezi graficul V.17.

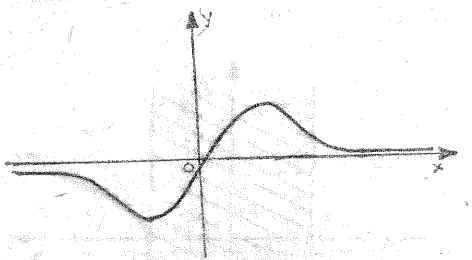


Fig. V.17

18. Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R}$.

Asimptote oblice: $y = x - \frac{9}{4}$, $y = -x + \frac{9}{4}$.

Maxim în $\left(-\frac{3}{4}, \frac{7\sqrt{7}}{4}\right)$, minim în $\left(-1, \frac{8}{\sqrt{3}}\right)$ și $(1, 0)$.

Vezi graficul V.18.

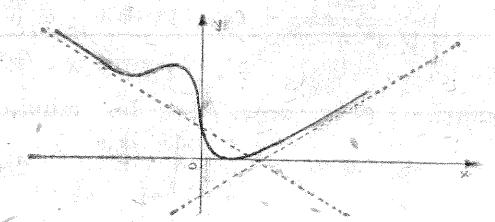


Fig. V.18

19. Domeniul de definiție: $x \in [-a, a]$.

Funcția este pară, deci simetrică față de ordonată. (Vezi graficul V.19).

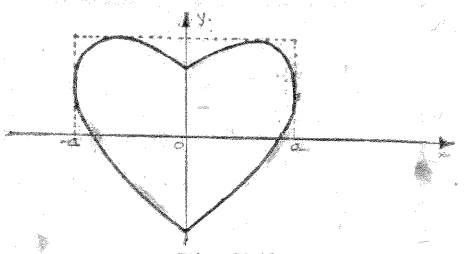


Fig. V.19

20. i) Cum $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, atunci f nu se anulează pentru nici o valoare a lui x, deci graficul nu intersectează axa Ox.

Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R}$.

ii) Asimptote oblice:

$$y = (c_1 + c_2)x - c_2b \quad \text{(pentru } x \to +\infty\text{)}$$
$$y = -(c_1 + c_2)x + c_2b \quad \text{(pentru } x \to -\infty\text{)}$$

iii) Explicitarea funcției:

$$f(x) = \begin{cases} c_1\sqrt{a^2+x^2} + c_2(b-x) & \text{pentru } x \in (-\infty, b) \\ c_1\sqrt{a^2+x^2} + c_2(x-b) & \text{pentru } x \in (b, \infty) \\ c_1\sqrt{a^2+b^2} & \text{pentru } x = b \end{cases}$$

iv) Studiul primei derivate

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{c_1 x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - c_2 & \text{pentru } x \in (-\infty, b) \\ \dfrac{c_1 x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + c_2 & \text{pentru } x \in (b, \infty) \\ 0 & \text{pentru } x = b \end{cases}$$

$f'(x) = 0$ pentru $x \in (b, \infty)$; $f'(x)$ nu admite soluții; pentru $x \in (-\infty, b) \Rightarrow x = \pm \sqrt{\dfrac{c_2^2 a^2}{c_1^2 - c_2^2}}$, deci: dacă $c_1 \leqslant c_2$, nu admite soluții; dacă $c_1 > c_2$ și $\dfrac{c_2 |a|}{\sqrt{c_1^2 - c_2^2}} < b$, derivata se anulează pentru $x = \dfrac{c_2 |a|}{\sqrt{c_1^2 - c_2^2}}$; dacă $c_1 > c_2$ și $\dfrac{c_2 |a|}{\sqrt{c_1^2 - c_2^2}} > b$ derivata nu se anulează.

v) Studiul derivatei a II-a:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{c_1 a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} & \text{pentru } x \in \mathbf{R} \setminus \{b\} \\ 0 & \text{pentru } x = b \end{cases}$$

1° Dacă $0 < c_1 < c_2$

x	$-\infty$		0		b		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$c_1\lvert a\rvert + c_2\lvert b\rvert$	$\searrow$	$c_1\sqrt{a^2+b^2}$	$\nearrow$	$+\infty$

2° Dacă: $0 < c_2 < c_1$ și $\dfrac{c_2 |a|}{\sqrt{c_1^2 - c_2^2}} < b$

x	$-\infty$		0		$\dfrac{c_2\lvert a\rvert}{\sqrt{c_1^2-c_2^2}}$		b		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$c_1\lvert a\rvert + c_2\lvert b\rvert$	$\searrow$		$\nearrow$	$c_1\sqrt{a^2+b^2}$	$\nearrow$	$+\infty$

3° Dacă $c_1 > c_2$ și $\dfrac{c_1 |a|}{\sqrt{c_1^2 - c_2^2}} > b$ atunci tabloul de variație este analog celui studiat în primul caz.

vi) Vezi graficul V.20.

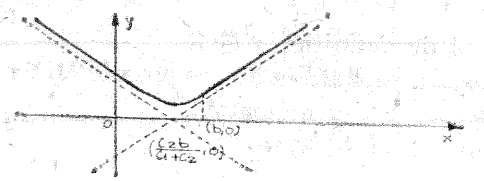


Fig. V.20

21. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{x \ln x} = e^0 = 1$. $\lim\limits_{x\to\infty} x^x = +\infty$.

i) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = x^x(1 + \ln x);\ f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{e} \approx 0{,}37.$$

ii) Studiul derivatei a doua:

$$f''(x) = x^x \cdot \frac{x(1 + \ln x)^2 + 1}{x} > 0.$$

iii) Tabloul de variație:

x	0		$\dfrac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	1	$\searrow$	$f\left(\dfrac{1}{e}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	

iv) Vezi graficul V.21.

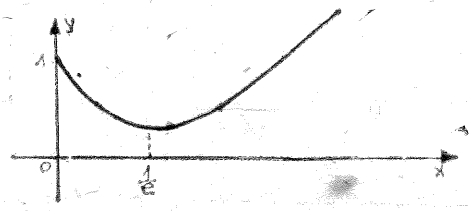


Fig. V.21

22. Explicitînd funcția obținem:

$$f(x)=\begin{cases}-(x+1)\,e^{x-1} & \text{pentru } x\in(-\infty,-1)\\ (x+1)\,e^{x-1} & \text{pentru } x\in(-1,\ 1)\\ (x+1)\,e^{1-x} & \text{pentru } x\in[1,\ \infty)\end{cases}$$

i) Domeniul de definiție: $x\in\mathbf{R}$

ii) Funcție fără paritate — nu are proprietăți de simetrie.

iii) Asimptote: $y=0$ orizontală.

iv) Studiul primei derivate:

$$f'(x)=\begin{cases}-(x+2)\,e^{x-1} & \text{pentru } x\in(-\infty,\ -1],\\ (x+2)\,e^{x-1} & \text{pentru } x\in(-1,\ 1)\\ -x\cdot e^{1-x} & \text{pentru } x\in[1,\ \infty)\end{cases}$$

$f'(x)=0\Rightarrow x\in(-\infty,\ -1]$

$x+2=0\Rightarrow x=-2$, punct de extrem.

Pe celelalte intervale $f'(x)\neq 0$.

Acum, vom studia derivabilitatea funcției în punctele:

$$x=-1,\ x=1$$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x\leqslant -1}}[-(x+2)\,e^{x-1}]=-\frac{1}{e^2}\ ;\ \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}(x+2)e^{x-1}=\frac{1}{e^2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(x+2)\,e^{x-1}=3 \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ x\geqslant 1}}[-x\cdot e^{1-x}]=-1.$$

deci în punctele de coordonate:

$$(-1,\ f(-1))\equiv(-1,\ 0)\ \text{și}\ (1,\ f(1))\equiv(1,\ 2)$$

f nu este derivabilă, iar graficul funcției va admite puncte unghiulare.

Tangentele la grafic în aceste puncte sînt:

$$\text{în } (-1,\ 0):\begin{cases}y=-\dfrac{1}{e^2}\,(x+1)\\ y=\dfrac{1}{e^2}\,(x+1)\end{cases}$$

$$\text{în } (1,\ 2):\begin{cases}y-2=3(x-1)\\ y-2=-1(x-1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x-y-1=0\\ x+y-3=0\end{cases}$$

v) Studiul derivatei a II-a:

$$f''(x)=\begin{cases}-(x+3)\,e^{1-x} & \text{pentru } x\in(-\infty,\ -1]\\ (x+3)\,e^{x-1} & \text{pentru } x\in(-1,\ 1)\\ (x-1)\,e^{1-x} & \text{pentru } x\in[1,\ \infty)\end{cases}$$

iar $f''(x)$ nu există în punctele $x=\pm 1$.

$f''(x)=0\Rightarrow x=-3$, iar $f(-3)=2e^{-4}$.

vi) Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-3	-2		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	0	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		e^{-3}	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	

vii) Trasarea graficului: (Vezi graficul V.22).

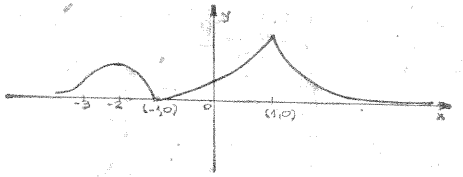


Fig. V.22

23. Aplicînd formulele trigonometrice uzuale vom obține:

$$f(x)=\frac{\sin^2 x}{\cos 2x}$$

i) Domeniul de definiție: $x\in\mathbf{R}\setminus\left\{\pm\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\,\middle|\,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

ii) f este pară deci graficul este simetric față de Oy.

iii) f este periodică, de perioadă π, deci vom studia funcția pe $\left[0,\ \dfrac{\pi}{4}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{4},\ \pi\right]$.

iv) Asimptote: $x=\dfrac{\pi}{4}$, $x=\dfrac{3\pi}{4}$ — verticale.

v) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \frac{\pi}{2},\ x = \pi.$$

vi) Studiul derivatei a doua:

$$f''(x) = \frac{1 + 2\sin^2 2x}{(\cos 2x)^3}.$$

vii) Tabloul de variație:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	0
				$-\infty$			$-\infty$		
$f''(x)$		$+$			$-$			$+$	

viii) Trasarea detaliului de grafic: (Vezi graficul V.23 a).

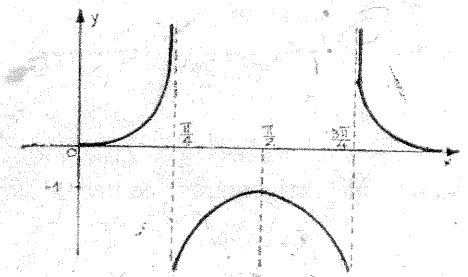


Fig. V.23 a

ix) Extensia detaliului de grafic pe toată axa reală: (Vezi graficul V.23 b).

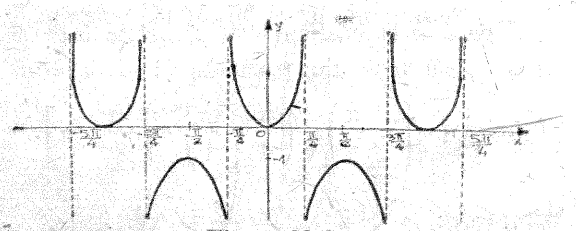


Fig. V.23 b

24. i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

ii) f este periodică de perioadă 2π.

iii) Asimptote $x = 0$, $x = 2\pi$ (verticale).

iv) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \frac{1 - \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{(1 - \cos x)^2};\ f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$

v) Studiul derivatei a doua:

$$f''(x) = \frac{\sin^2 x + \frac{1}{2}(\sin x + \cos x - 1)^2}{(1 - \cos x)^3} > 0.$$

vi) Tabloul de variație:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		2π
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

vii) Trasarea unui detaliu de grafic: (Vezi graficul V.24a)

viii) Extensia detaliului de grafic pe toată axa reală: (Vezi graficul V.24 b).

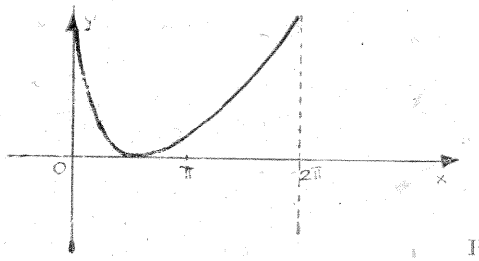


Fig. V.24a

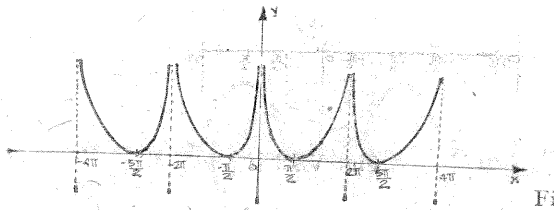


Fig. V.24b

25. i) Funcția este periodică de perioadă 2π.

$$\sin x - \cos x = \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\cos 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Vom face substituția $x - \frac{\pi}{4} = \alpha$, deci funcția va deveni:

$$y = \sqrt{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{6}}{6}\cos 2\alpha = \sqrt{2}\sin\alpha +$$

$$+ \frac{\sqrt{6}}{6}(1 - 2\sin^2\alpha) = -\frac{\sqrt{6}}{6}(2\sin^2\alpha - 2\sqrt{3}\sin\alpha - 1).$$

$$y = 0 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{5}}{2}, \text{ dar } \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{2} \notin [-1, 1].$$

ii) Studiul primei derivate:

$$y' = -\frac{\sqrt{6}}{6}(4\sin\alpha\cos\alpha - 2\sqrt{3}\cos\alpha) =$$

$$= -\frac{\sqrt{6}}{6} \cdot 2\cos\alpha(2\sin\alpha - \sqrt{3}).$$

$$y' = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ și } \alpha_2 = -\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi,\ x_2 = -\frac{\pi}{12} + (2k+1)\pi \text{ unde } k \in \mathbf{Z} \text{ și}$$

$$\text{pentru } \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow y' > 0,$$

$$\text{pentru } \alpha \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y' < 0,$$

$$\text{pentru } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow y' > 0,$$

$$\text{pentru } \alpha \in \left(\pi - \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow y' < 0,$$

$$\text{pentru } \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow y' > 0.$$

iii) Trasarea tablolului de variație:

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{12}$	x_1	$\frac{7\pi}{4}$	x_2	$2\pi + \frac{\pi}{4}$
α	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	α_1	$\frac{3\pi}{2}$	α_2	2π
y'	$\sqrt{2}+$	0 −	0 +	0	−	0	+	$\sqrt{2}$
y	$\frac{\sqrt{6}}{6}$ ↗	$\frac{5\sqrt{6}}{12}$ ↘	$\frac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}$ ↗	$\frac{5\sqrt{6}}{12}$ ↘	0 ↘	$-\frac{2\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}}$ ↗	0 ↗	$\frac{\sqrt{6}}{6}$

iv) Trasarea unui detaliu de grafic (vezi graficul V.25 iv)

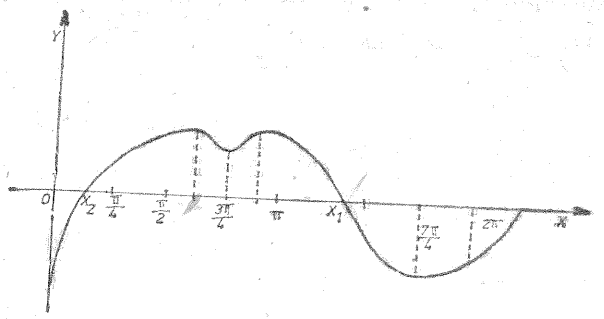


Fig. V.25 iv

v) Extensia detaliului de grafic pe toată axa reală (vezi graficul V.25 v)

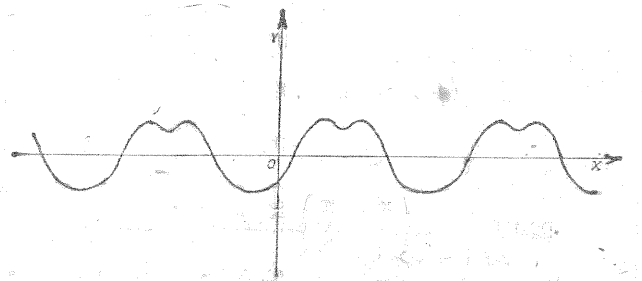


Fig. V.25 v

26. i) Domeniul de definiție:

$$x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ (-1)^k \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

ii) Funcție fără paritate — nu are proprietăți de simetrie.

iii) Cum $f(x) > 0$ pentru $\forall\, x \in$ domeniului de definiție, graficul funcției este situat deasupra axei Ox.

iv) Determinarea perioadei T:

$$f(x+T) = f(x) \Rightarrow \frac{1+\sin^2(x+T)}{1-\sin(x+T)} = \frac{1+\sin^2 x}{1-\sin x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z},$$

iar perioada principală este 2π. Deci graficul funcției îl vom trasa pe intervalul $[0,\ 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, apoi îl vom extinde pe toată axa reală purtînd „șablonul" de grafic atît în partea dreaptă, cît și în partea stîngă a detaliului de grafic.

v) Asimptotă verticală: $x = \frac{\pi}{2}$.

vi) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \frac{\cos x\,(-\sin^2 x + 2\sin x + 1)}{(1-\sin x)^2}$$

Determinarea punctelor critice:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ sau } x = \frac{3\pi}{2}.$$

sau $\sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = 1 - \sqrt{2}$, iar pe intervalul $[0,\ 2\pi]$ există două unghiuri $\alpha_1,\ \alpha_2$ al căror sinus este egal cu $1-\sqrt{2}$ și $\alpha_1 \in \left(\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right)$, $\alpha_2 \in \left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$. În punctul $x = \frac{\pi}{2}$ graficul admite un punct de întoarcere.

vii) Trasarea tabloului de variație:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		α_1		$\frac{3\pi}{2}$		α_2		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$	$\mid +\infty$		$\searrow$	1	$\searrow$	$0{,}82$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$0{,}82$	$\nearrow$ 1

viii) Trasarea unui detaliu de grafic: se observă cum coeficientul unghiular al tangentei în punctele în care ea intersectează dreapta $y = 1$ este: $y' = 1$ pentru $x \in \{0,\ \pi,\ 2\pi\}$ și că dreapta $x = \frac{3\pi}{2}$ este o axă de simetrie a graficului pe intervalul $\left(\frac{\pi}{2},\ 2\pi + \frac{\pi}{2}\right)$. (Vezi graficul V.26)

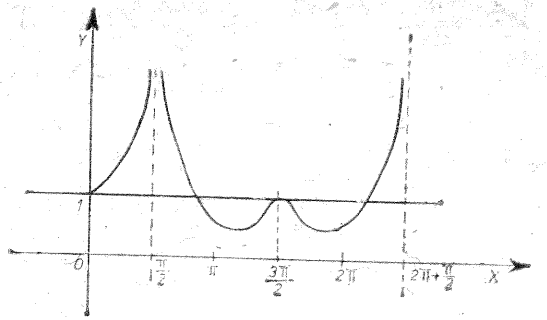


Fig. V.26

ix) Extensia detaliului de grafic pe toată axa reală (Vezi graficul V.26i).

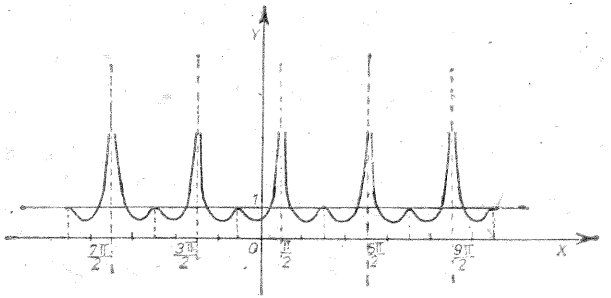


Fig. V.26 i

27. Funcția este periodică, de perioadă principală 2π și este o funcție pară, deci are graficul simetric față de ordonată.

$$D = \{x \in [0,\ 2\pi] \mid |\cos x| \geqslant |\sin x|\} =$$

$$= \{x \in [0,\ 2\pi] \mid |\operatorname{tg} x| \leqslant 1\} =$$

$$= \left[0,\ \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4},\ 2\pi\right].$$

Deci explicitînd funcția obținem:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\cos x - \sin x} & \text{pentru } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ \sqrt{-\cos x - \sin x} & \text{pentru } x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right] \\ \sqrt{\sin x - \cos x} & \text{pentru } x \in \left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right] \\ \sqrt{\cos x + \sin x} & \text{pentru } x \in \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]. \end{cases}$$

Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-\sin x + \cos x}{2\sqrt{\cos x - \sin x}} & \text{pentru } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ \dfrac{\sin x - \cos x}{2\sqrt{-\cos x - \sin x}} & \text{pentru } x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right] \\ \dfrac{\sin x + \cos x}{2\sqrt{\sin x - \cos x}} & \text{pentru } x \in \left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right] \\ \dfrac{\cos x - \sin x}{2\sqrt{\cos x + \sin x}} & \text{pentru } x \in \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]. \end{cases}$$

În punctul $x = \pi$, funcția nu este derivabilă:

$$\lim_{\substack{x \to \pi \\ x < \pi}} \frac{\sin x - \cos x}{2\sqrt{-\cos x - \sin x}} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{\substack{x \to \pi \\ x > \pi}} \frac{\sin x + \cos x}{2\sqrt{\sin x - \cos x}} = -\frac{1}{2}.$$

Deci în punctul $(\pi, f(\pi)) = (\pi, 1)$ graficul admite un punct unghiular.

$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{4} \\ x < \frac{\pi}{4}}} \left(-\frac{\sin x + \cos x}{2\sqrt{\cos x - \sin x}} \right) = -\infty.$$

$$\lim_{\substack{x \to \frac{7\pi}{4} \\ x > \frac{7\pi}{4}}} \frac{\cos x - \sin x}{2\sqrt{\cos x + \sin x}} = +\infty.$$

Trasarea tabloului de variație:

x	0		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$		π		$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$		2π
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-$	$-\infty$	$\|\|$	$+$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-$	$\|\|$	$+\infty$	$+\frac{1}{2}$
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\|\|$	0 $\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\|\|$	0	$\nearrow$ 1

Trasarea unui detaliu de grafic (Vezi graficul V.27 i).

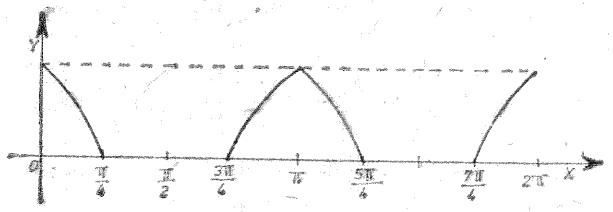


Fig. V.27 i

Extensia detaliului de grafic pe toată axa reală (Vezi graficul V. 27 ii).

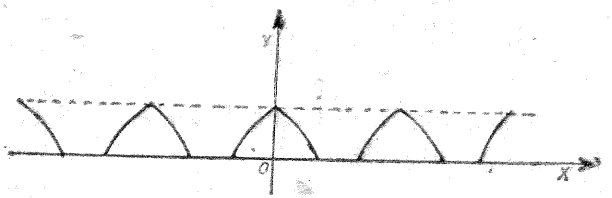


Fig V. 27 ii

28. Mai putem scrie:

$$f(x) = \frac{4\cos^2 x - 3}{2\cos x}.$$

i) Domeniul de definiție:

$$\cos x \neq 0 \Rightarrow x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

ii) Funcția este pară, deci graficul este simetric față de ordonată:

$$f(-x) = \frac{4\cos^2(-x) - 3}{2\cos(-x)} = \frac{4\cos^2 x - 3}{2\cos x} = f(x).$$

iii) Determinarea perioadei T:

$$f(x + T) = f(x) \Rightarrow T = 2\pi.$$

(De fapt perioada generală a funcției se determină intersectând perioadele generale ale funcțiilor componente, adică rezolvînd ecuația diofantică de gradul unu obținută:

$$\cos 3x \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{3} k_1;\ \cos 2x \Rightarrow T_2 = k_2\pi,$$

$$k_1, k_2 \in \mathbf{Z},\ \text{deci}\ \frac{2k_1\pi}{3} = k_2\pi \Rightarrow \frac{2}{3}k_1 = k_2,$$

deci perioada generală este determinată de soluțiile ecuației diofantice $\frac{2}{3}k_1 = k_2$ ($k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$), adică $T_1 \cap T_2 \Rightarrow T = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, iar pentru $k = 1$ determinăm perioada principală a funcției.)

Deci graficul îl vom trasa pentru:

$$x \in [0,\ 2\pi] \cap \left(\mathbf{R} \setminus \left\{\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}\right) \Rightarrow x \in [0,\ 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right\},$$

apoi detaliul de grafic îl vom extinde pe toată axa reală.

iv) Intersecția cu axele:

$$y = 0 \Rightarrow x \in \{30°,\ 150°,\ 210°,\ 330°\};\ x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}.$$

v) Asimptotele verticale: $x = 90°$, $x = 270°$.

vi) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \frac{-\sin x(4\cos^2 x + 3)}{2\cos^2 x};$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x \in \{0°,\ 180°,\ 360°\}.$$

vii) Tabloul de variație:

x	$0°$		$90°$		$180°$		$270°$		$360°$
$f'(x)$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	0
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$+\infty$ / $-\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ / $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

viii) Trasarea unui detaliu de grafic: (Vezi graficul V.28a).

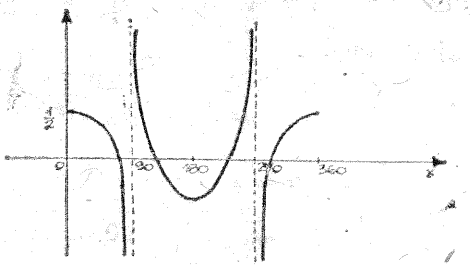


Fig. V.28 a

ix) Extensia detaliului de grafic pe toată axa reală (Vezi graficul V.28 b).

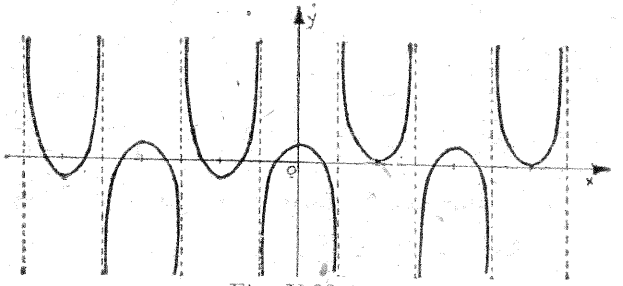


Fig. V.28 b

29. i) Domeniul de definiție:

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi; \\ 1 - \sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq (-1)^k \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in \mathbf{R} \setminus \left(\{k\pi\} \cup \left\{(-1)^k \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}\right).$$

ii) Funcție fără paritate.

iii) Determinarea perioadei T:

$$f(x+T)=f(x)\Rightarrow T=2\pi,$$

deci graficul îl vom trasa pe intervalul $[0,\ 2\pi]\cap$ domeniul de definiție $\Rightarrow x\in[0,\ 2\pi]\setminus\left\{0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ 2\pi\right\}$.

iv) Intersecția cu axele: $y=0\Rightarrow x=\frac{3\pi}{2}$.

v) Asimptote: $x\in\left\{0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ 2\pi\right\}$ verticale.

vi) Studiul primei derivate:

$$f'(x)=\frac{\cos x\,(\sin^2 x+2\sin x-1)}{\sin^2 x(1-\sin x)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}\cos x=0\Rightarrow x=\dfrac{3\pi}{2}\\ \sin^2 x+2\sin x-1=0\Rightarrow\sin x=\sqrt{2}-1\Rightarrow\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=24^\circ 28'\\ x=155^\circ 32'\end{cases}$$

vii) Tabloul de variație:

x	0		$24^\circ 28'$		90°		$155^\circ 32'$		180°	270°	360°
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2}$	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2}$	$\nearrow$	$+\infty$	0	$-\infty$

viii) Trasarea unui detaliu de grafic: (Vezi graficul V. 29a).

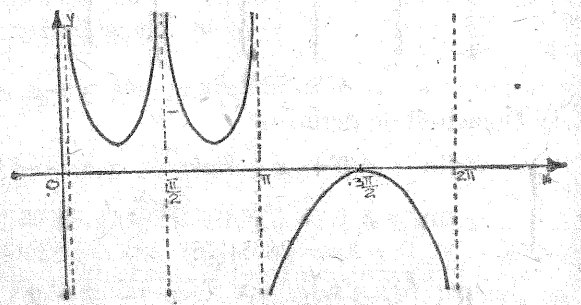


Fig. V.29 a

ix) Extensia detaliului de grafic pe toată axa reală! (Vezi graficul V.29b).

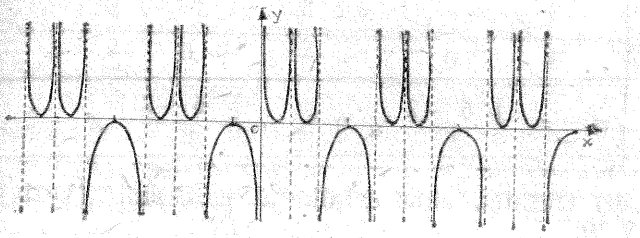


Fig. V.29 b

30. Efectuăm substituțiile:

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \text{unde } t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Funcția devine: $y=2\cdot\dfrac{-t(t-1)}{t^2-2t+3}$.

i) Domeniul de definiție: $t\in\mathbf{R}$.

ii) Funcție fără paritate.

iii) Intersecția cu axele: $t=0\Rightarrow y=0$

$$y=0\Rightarrow\begin{cases}t=0\\ t=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_k=2k\pi\\ x_k=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ \text{unde } k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

iv) Determinarea perioadei funcției în x: $f(x+T)=f(x)\Rightarrow T=2\pi$ deci trasarea graficului o vom face pe intervalul: $x\in[0,\ 2\pi]$.

v) Asimptote: nu admite.

vi) Studiul primei derivate:

$$y'=\frac{2(t^2-6t+3)}{(t^2-2t+3)^2};\ y'=0\Rightarrow t_{1,2}=3\pm\sqrt{6}\Rightarrow$$

$$\operatorname{tg}\frac{x_1}{2}=3-\sqrt{6}\Rightarrow\frac{x_1}{2}=28^\circ 51'16''\Rightarrow x_1=57^\circ 42'32''$$

$$\operatorname{tg}\frac{x_2}{2}=3+\sqrt{6}\Rightarrow\frac{x_2}{2}=79^\circ 36'3''\Rightarrow x_2=159^\circ 12'6''.$$

vii) Tabloul de variație:

x	0		x_1		$\frac{\pi}{2}$		x_2		π		2π
y'		$+$	0	$-$			0		$+$	$+$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{6}-2}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{6}+2}{2}$	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	0

viii) Trasarea unui detaliu al graficului: (Vezi graficul V.30).

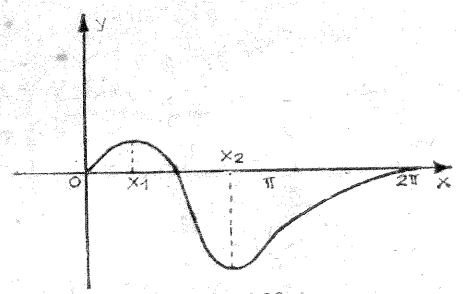


Fig. V.30

Pentru trasarea completă a graficului purtăm șablonul obținut pentru intervalul $[0, 2\pi]$ pe toată axa Ox.

31. i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R}$.

ii) Funcție fără paritate.

iii) Funcție periodică de pericadă 2π, deci graficul va fi trasat pe intervalul $[0, 2\pi]$, sub forma unui șablon, apoi acest detaliu se va extinde pe toată axa reală.

iv) Intersecția cu axele:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \sin x + \cos x = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3\pi}{4},\ x_2 = \frac{7\pi}{4}.$$

$$f(0) = 1.$$

v) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = 3 \sin x \cdot \cos x\,(\sin x - \cos x).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x \in \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}.$$

(unde $\sin x - \cos x = \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$

$$= 2 \sin \frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2} \cos \frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2} = \sqrt{2} \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\Big).$$

vi) Tabloul de variație:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$f'(x)$	0 $-$	0 $+$	0	$-$ $-$	0	$+$	0 $-$	0 $+$	$+$ 0
$f(x)$	$1 \searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \nearrow$	$1 \searrow$	$0 \searrow$	$-1 \nearrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \searrow$	$-1 \nearrow$	$0 \nearrow$	1

vii) Trasarea detaliului de grafic: (Vezi graficul V.31 a).

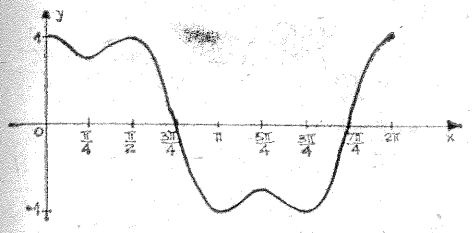


Fig. V.31 a

viii) Extensia șablonului pe toată axa reală: (Vezi graficul V.31 b).

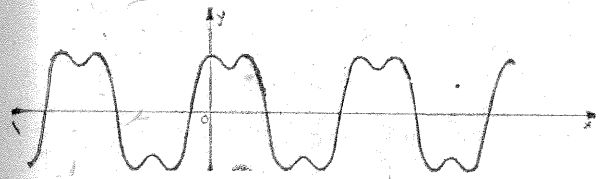


Fig. V.31 b

32. i) Domeniul de definiție: $\begin{cases} \ln|x| + 1 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ln e|x| \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e|x| \neq 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| \neq \frac{1}{e} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$x \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{e}, 0, \frac{1}{e}\right\}.$$

ii) Funcția este pară, deci graficul funcției este simetric față de ordonată.

iii) Intersecția cu axele de coordonate:

$$2 \ln |x| - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{e}.$$

iv) Limita la capetele intervalelor: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \operatorname{arctg} 2$

$$\lim_{\substack{x \to -\frac{1}{e} \\ x < -\frac{1}{e}}} f(x) = -\frac{\pi}{2}; \qquad \lim_{\substack{x \to -\frac{1}{e} \\ x > -\frac{1}{e}}} f(x) = \frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ x > \frac{1}{e}}} f(x) = -\frac{\pi}{2}; \qquad \lim_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ x < \frac{1}{e}}} f(x) = \frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \operatorname{arctg} 2.$$

v) Graficul funcției admite asimptotă orizontală:

$y = \operatorname{arctg} 2$; asimptote verticale: $x = \pm \frac{1}{e}$.

vi) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \frac{8}{x[(2 \ln |x| - 1)^2 + (\ln |x| + 1)^2]} \neq 0.$$

Dar $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x) = +\infty$ și $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f'(x) = -\infty$, deci în punctul $x = 0$ graficul funcției admite un punct de întoarcere.

vii) Studiul derivatei a doua:

$$f''(x) = -\frac{3}{x^2} \cdot \frac{\ln |x| (5 \ln |x| + 8)}{[(2 \ln |x| - 1)^2 + (\ln |x| + 1)^2]^2}.$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1, \; x_{3,4} = \pm \frac{1}{e^{\frac{8}{5}}};$$

deci punctele de inflexiune au coordonatele:

$$\left(-1, -\frac{\pi}{4}\right), \left(1, -\frac{\pi}{4}\right), \left(-e^{-\frac{8}{5}}, \operatorname{arctg} 7\right), \left(e^{-\frac{8}{5}}, \operatorname{arctg} 7\right).$$

viii) Tabloul de variație:

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{e}$	$-e^{-\frac{8}{5}}$	0	$e^{-\frac{8}{5}}$	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$\|$	$+$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\operatorname{arctg} 2$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow \operatorname{arctg} 2 \nearrow$		$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow \operatorname{arctg} 2$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+ \; 0 \; -$

ix) Trasarea detaliului de grafic pentru $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

(Vezi graficul V.32).

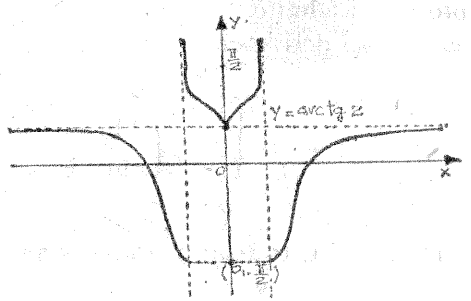


Fig. V.32

x) Cum funcția arctg este periodică pe ordonată, cu perioada π, atunci putem prelungi graficul funcției pe toată axa Oy.

33. i) Domeniul de definiție:

$$\begin{cases} \dfrac{2 \ln |x| - 1}{\ln |x| + 1} \leqslant 1 \\ \dfrac{2 \ln |x| - 1}{\ln |x| + 1} \geqslant -1 \Rightarrow x \in [-e^2, -1) \cup (1, e^2]. \\ \ln |x| + 1 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

ii) Cum $f(x) = f(-x)$, funcția este pară, deci graficul este simetric față de ordonată.

iii) Intersecția cu axele carteziene:

$$2 \ln |x| - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{e}.$$

iv) Limita la capetele intervalelor:

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = \arcsin \frac{-1}{1} = \arcsin (-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \arcsin \frac{-1}{1} = \arcsin (-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\lim_{\substack{x \to e^2 \\ x \leqslant e^2}} f(x) = \arcsin \frac{3}{3} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\lim_{\substack{x \to -e^2 \\ x \geqslant -e^2}} f(x) = \arcsin \frac{3}{3} = \frac{\pi}{2}.$$

v) Asimptote: nu admite.

vi) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \frac{3}{x(\ln |x| + 1)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{2 \ln |x| - 1}{\ln |x| + 1}\right)^2}} =$$

$$= \frac{3}{x(\ln |x| + 1) \sqrt{3 \cdot \ln |x| \cdot (2 - \ln |x|)}}.$$

vii) $f''(x) = \frac{9}{\sqrt{3 \ln |x| \cdot (2 - \ln |x|)}} [\ln^3 |x| + \ln^2 |x| - 4 \ln |x| - 1]$.

Pentru determinarea semnului derivatei a doua, vom aplica șirul lui Rolle: fie $g(a) = a^3 + a^2 - 4a - 1 = 0$,

$$g'(a) = 3a^2 + 2a - 4, \quad g'(a) = 0 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g\left(\frac{-1 + \sqrt{13}}{3}\right) = \frac{-26\sqrt{13} + 11}{27} < 0,$$

$$g\left(\frac{-1 - \sqrt{13}}{3}\right) = \frac{26\sqrt{13} + 11}{27} > 0.$$

a	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{13}}{3}$	$\frac{-1+\sqrt{13}}{3}$	∞
g'/g	$-$	$+$	$-$	$+$

Deci f'' va admite două rădăcini convenabile:

$$\ln |x| = a \Rightarrow x = \pm e^a = \pm e^{\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1'' \in \left(e^{\frac{-1+\sqrt{13}}{3}}, e^2\right), \quad x_2'' \in \left(-e^2, -e^{\frac{-1+\sqrt{13}}{3}}\right).$$

vii) Trasarea tabloului de variație:

x	$-e^2$	$-e^{\frac{1}{2}}$	$-e^{\frac{-1+\sqrt{13}}{3}}$	-1	1	$e^{\frac{1}{2}}$	$e^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}}$	e^2
$f'(x)$	$-$	$-$				$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$		$\frac{\pi}{2}$

viii) Trasarea graficului funcției pe codomeniul:

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

(Vezi graficul V.33 a)

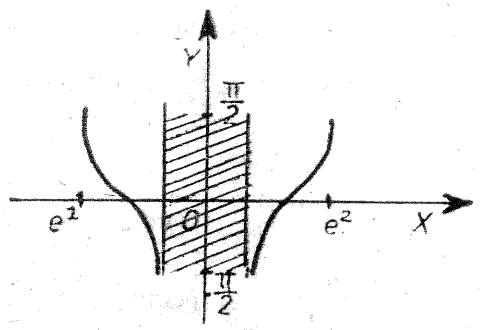


Fig. V.33 a

ix) Trasarea graficului extins: (Vezi graficul V.33 b).

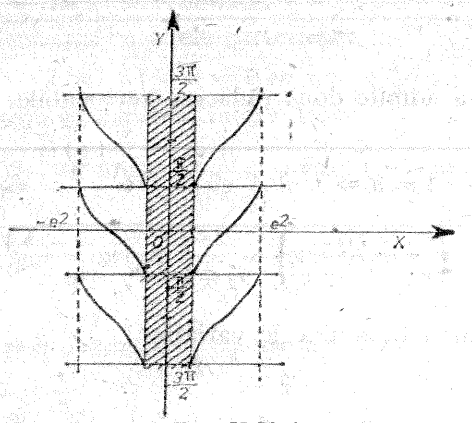


Fig. V.33 b

34. i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R}$.

ii) Asimptote: $y = \pm \frac{\pi}{4}$ (orizontale).

iii) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x^2+2x+2} & \text{pentru } x < -2 \\ \dfrac{1}{x^2+2x+2} & \text{pentru } x \geqslant -2 \end{cases}$$

În $x = -2$, funcția nu este derivabilă și va admite un punct unghiular, $f(-2) = \arcsin(-1) = \left\{(-1)^k \frac{3\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$.

iv) Studiul derivatei a doua:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x+1)}{(x^2+2x+2)^2} & \text{pentru } x < -2 \\ \dfrac{-2(x+1)}{(x^2+2x+2)^2} & \text{pentru } x \geqslant -2 \end{cases}$$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -1$.

v) Trasarea tabloului de variație:

x	$-\infty$				-2		-1			$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\frac{\pi}{4}$	$\searrow$			$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$-\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$		$\frac{\pi}{4}$
$f''(x)$	$-$				$+$		0	$-$	$-$	

vi) Trasarea unui detaliu de grafic (Vezi graficul V.34 a.).

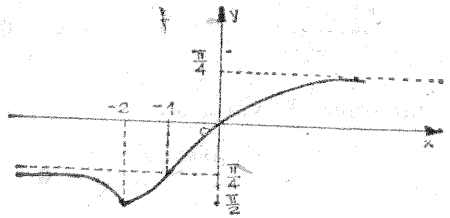


Fig. V.34 a

vii) Extensia detaliului de grafic pe toată ordonata (Vezi graficul V.34 b).

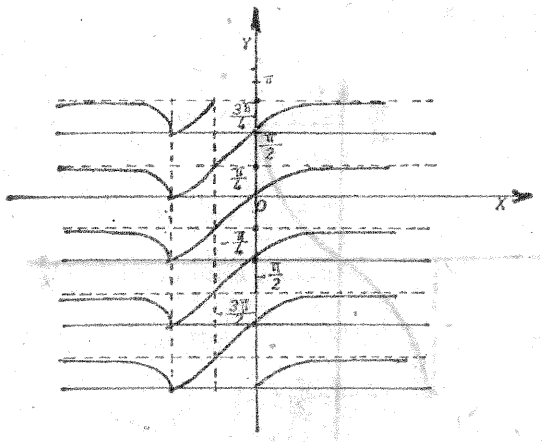


Fig. V.34 b

35. i) Domeniul de definiție: $x \in [-1, 1]$.

ii) Funcția este impară: $f(x) = -f(-x)$;

$$f(-1) = -\frac{\pi}{2}, \quad f(1) = \frac{\pi}{2}, \quad f(0) = 0.$$

iii) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}} > 0.$$

iv) Studiul derivatei a doua:

$$f''(x) = \frac{2x(2-x^2)}{(1-x^2)^{3/2}}; \quad f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

v) Trasarea tabloului de variație:

x	-1		0		1
$f'(x)$		$+$		$+$ $+$	
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$ $+$	

vi) Vezi graficul V.35.

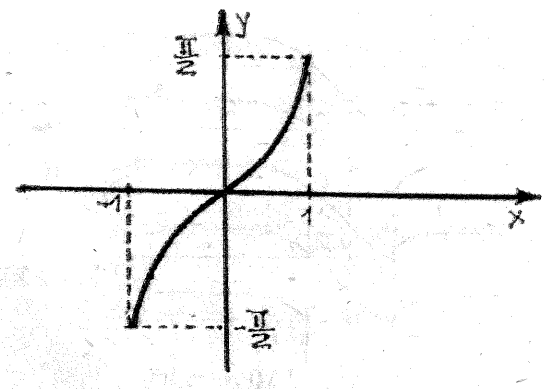


Fig. V.35

36. i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R}$

ii) $f'(x) = \dfrac{-3\,|x-4|}{(x-4)(2x^2-10x+17)} =$

$$= \begin{cases} \dfrac{-3}{2x^2-10x+17} & \text{pentru } x \in [4, \infty) \\ \dfrac{3}{2x^2-10x+17} & \text{pentru } x \in (-\infty, 4) \end{cases}$$

În punctul $x = 4$, f nu este derivabilă:

$$\lim_{\substack{x\to 4 \\ x<4}} \frac{3}{2x^2-10x+17} = \frac{1}{3}, \quad \lim_{\substack{x\to 4 \\ x>4}} \frac{-3}{2x^2-10x+17} = -\frac{1}{3};$$

deci în punctele de coordonate $(4, f(4)) \equiv (4, \arcsin 1)$ graficul admite puncte unghiulare.

Tangentele la grafic în aceste puncte sînt:

$$y - \arcsin 1 = \frac{1}{3}(x-4)$$

$$y - \arcsin 1 = -\frac{1}{3}(x-4), \text{ iar}$$

$$\arcsin 1 = \left\{(-1)^k \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

iii) $f''(x) = \begin{cases} \dfrac{6(2x-5)}{(2x^2-10x+17)^2} & \text{pentru } x \in [4, \infty) \\ -\dfrac{6(2x-5)}{(2x^2-10x+17)^2} & \text{pentru } x \in (-\infty, 4), \end{cases}$

iar graficul funcției va admite puncte de inflexiune în $x = \frac{5}{2}$, $f\left(\frac{5}{2}\right) = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \left\{(-1)^k \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$.

iv) Graficul va admite asimptote orizontale:

$$y = \lim_{x\to\infty} f(x) = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \left\{(-1)^k \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

$$y = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left\{(-1)^k \frac{5\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

v) Trasarea tabloului de variație:

x	$-\infty$		$5/2$		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$		$-$	$-$
$f(x)$	$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\nearrow$	$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\nearrow$	$\arcsin 1$	$\searrow$	$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$+$	$+$

vi) Trasarea unui detaliu de grafic (Vezi graficul V.36 a)

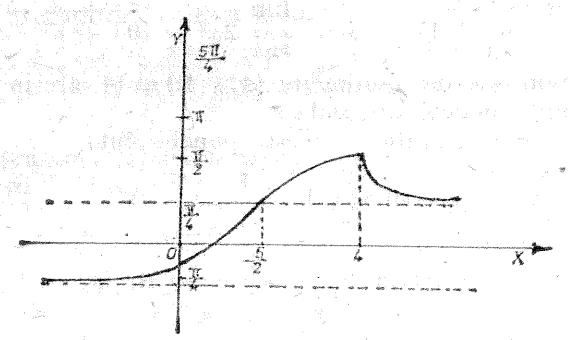


Fig. V.36 a

vii) Extensia detaliului de grafic pe toată ordonata (Vezi graficul V.36 b).

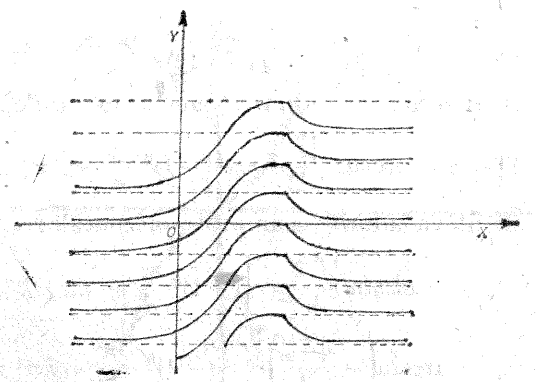


Fig. V.36 b

37. i) Domeniul de definiție:

$$-1 \leqslant 3x^4 - 6x^2 + 2 \leqslant 1 \Rightarrow$$

$$x \in \left[-\sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{3}}, -\sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{3}}\right] \cup$$

$$\cup \left[\sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{3}}, \sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{3}}\right].$$

ii) Cum $f(x) = f(-x)$, funcția este pară, deci graficul este simetric față de ordonată.

iii) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \frac{12x(x^2-1)}{\sqrt{3}\,|x^2-1|\sqrt{-3x^4+6x^2-1}} =$$

$$= \begin{cases} \frac{4\sqrt{3}}{3} \dfrac{x}{\sqrt{-3x^4+6x^2-1}} & \text{pentru} \\ & x \in \left[-\sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{3}}, -1\right] \cup \left[1, \sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{3}}\right] \\ -\frac{4\sqrt{3}}{3} \dfrac{x}{\sqrt{-3x^4+6x^2-1}} & \text{pentru} \\ & x \in \left(-1, -\sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{3}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{3}}, 1\right) \end{cases}$$

$f'(x) \neq 0$. În punctele de coordonate $(-1, f(-1)) = (-1, \arcsin(-1))$ și în $(1, f(1)) = (1, \arcsin(-1))$ graficul admite puncte unghiulare.

iv) Studiul derivatei a doua: $f''(x) =$

$$= \begin{cases} \frac{4\sqrt{3}}{3} \dfrac{3x^4-1}{(-3x^4+6x^2-1)^{\frac{5}{2}}} & \text{pentru } x \in \left[-\sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{3}}, -1\right] \cup \\ & \cup \left[1, \sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{3}}\right] \\ -\frac{4\sqrt{3}}{2} \dfrac{3x^4-1}{(-3x^4+6x^2-1)^{\frac{5}{2}}} & \text{pentru } x \in \left(-1, -\sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{3}}\right] \cup \\ & \cup \left[\sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{3}}, 1\right) \end{cases}$$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$; În punctele de coordonate

$$\left(\sqrt[4]{\frac{1}{3}}, f\left(\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)\right) = \left(\sqrt[4]{\frac{1}{3}}, \arcsin\left(3 - 2\sqrt{3}\right)\right)$$

și

$$\left(-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}, f\left(-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)\right) = \left(-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}, \arcsin\left(3 - 2\sqrt{3}\right)\right)$$

graficul funcției admite puncte de inflexiune.

v) Trasarea tabloului de variație:

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{3}}$	-1	$-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{3}}$	$\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{6}}$	$\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$	1	$\sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\vert$	$-$			$-$	$\vert$	$+$	
$f(x)$		arcsin 1	↘ arcsin(−1)	arcsin 1		arcsin 1	↘ arcsin(−1)	arcsin 1	↗	
$f''(x)$		$+$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	$+$

vi) Trasarea unui detaliu de grafic: (vezi graficul V. 37 a)

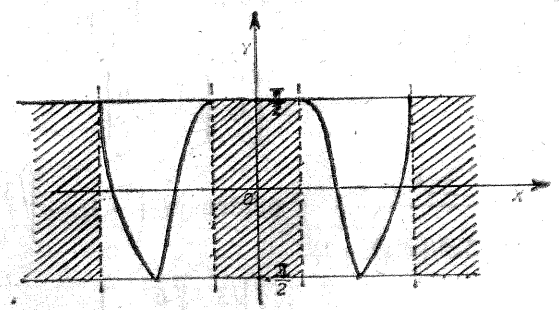


Fig. V.37 a

vii) Extensia detaliului de grafic pe toată ordonata (Vezi graficul V.37 b).

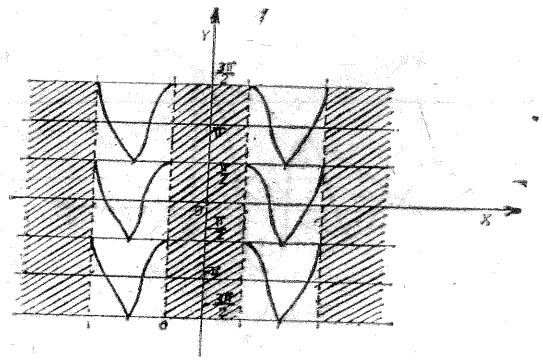


Fig. V.37 b

38. Dacă $f(x) = g(x) \cdot \sin x$ sau $f(x) = g(x) \cdot \cos x$ unde $g(x)$ este ecuația amplitudinii variabile (adică curbele $\sin x$ sau $\cos x$ vor oscila între curbele $y = \pm g(x)$ deoarece

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \cdot |\, g(x) \Rightarrow -g(x) \leqslant g(x) \sin x \leqslant g(x),$$

analog pentru $\cos x$).

Pentru a determina punctele de tangență între curbele $g(x)$ și $g(x) \sin x$ sau $g(x)$ și $g(x) \cos x$ vom proceda astfel:

$$f'(x) = g'(x) \sin x + g(x) \cos x,$$

iar tangenta comună celor două curbe f și g va fi

$$\begin{cases} y - f(x_k) = f'(x_k)(x - x_k) \\ y - g(x_k) = g'(x_k)(x - x_k) \end{cases}$$

și prin identificare vom obține:

$$\begin{cases} f(x_k) = g(x_k) \\ f'(x_k) = g'(x_k) \end{cases}$$

ceea ce este echivalent cu

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Rightarrow x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Funcția este continuă în origine, curba oscilează între dreptele $y = \pm x$. Funcția este pară deci graficul ei este simetric față de ordonată. (Vezi graficul V.38).

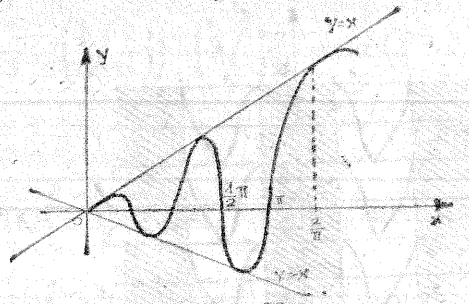


Fig. V.38

39. $y' = -\frac{1}{x^2}\sin x + \frac{1}{x}\cos x$.

$$y'' = \frac{1}{x}\left(\frac{2}{x} - 1\right)\sin x - \frac{2}{x^2}\cos x.$$

x	0			π			2π
y'		−	−		−	0	+
y	1	↘		0	↘	↗	0
y''		−	−	|	+	+	+

Funcția este pară.
Vezi graficul V.39.

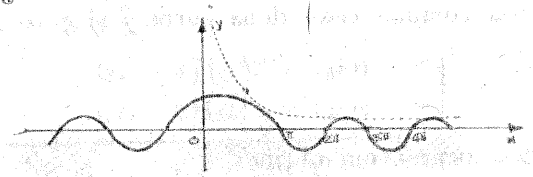


Fig. V.39

40. Curba este continuă în origine și oscilează între curbele $y = \pm x^2$.

Deci, generalizînd, această curbă face parte din categoria curbelor de forma $y = x^n \cdot \sin\frac{1}{x}$, iar curbele între care oscilează sînt $f(x) = \pm x^n$.

Graficul funcției este prezentat în figura V.40

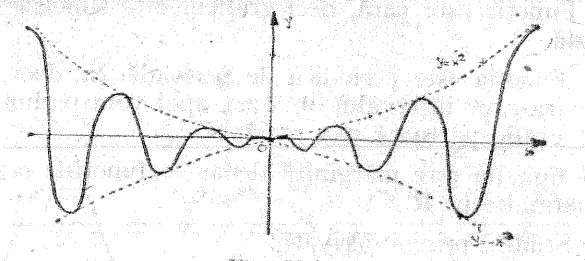


Fig. V.40

41. Curba oscilează între curbele $g(x) = \pm e^x$. Punctele de tangență ale curbei au abscisele în $x_k = \frac{\pi}{2} \pm k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

$$f'(x) = e^{-x}(-\sin x + \cos x) \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$x_k = \operatorname{arctg} 1 + k\pi = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Vezi graficul V.41.

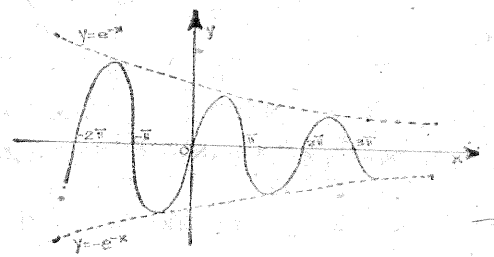


Fig. V.41

42. Vezi graficul V.42.

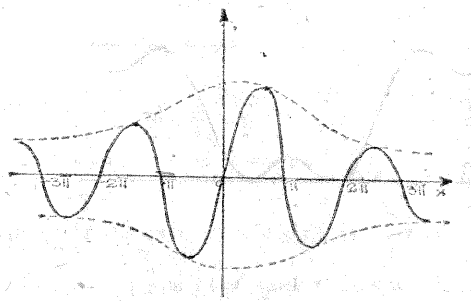


Fig. V.42.

43. i) Domeniul de definiție este **R.**

ii) Funcția este pară, deci graficul este simetric față de ordonată.

iii) Funcția este periodică de perioadă 2π, deci graficul îl vom trasa pe intervalul $[0, 2\pi]$, apoi vom prelungi detaliul de grafic pe toată axa reală.

iv) Funcția este mărginită deoarece funcțiile sin și cos sînt mărginite pe **R.**

v) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \sin x(2\cos^2 x - 1)e^{\sin^2 x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x \in \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi\right\}.$$

Cum funcția este definită pe toată axa reală, graficul său admite tangentă în fiecare punct al său.

vi) Trasarea tabloului de variație:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$f'(x)$	0 +	0	−	0	+ 0 −	0	+	0	− 0
$f(x)$	1 ↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{1}{2}}$ ↘	0 ↘	$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{1}{2}}$ ↗	-1 ↘	$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{1}{2}}$ ↗	0 ↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{1}{2}}$ ↘	1

vii) Trasarea unui detaliu de grafic (Vezi graficul V.43 a):

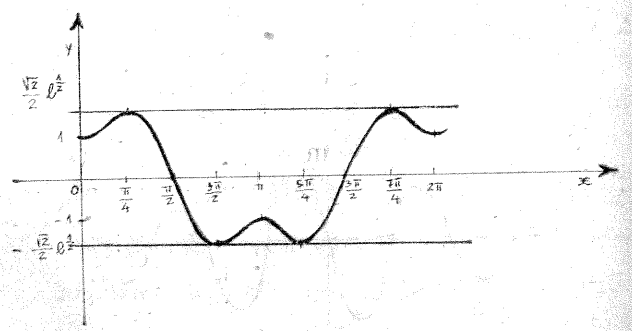


Fig. V.43 a

viii) Extensia detaliului de grafic pe toată axa reală: (Vezi graficul V.43 b):

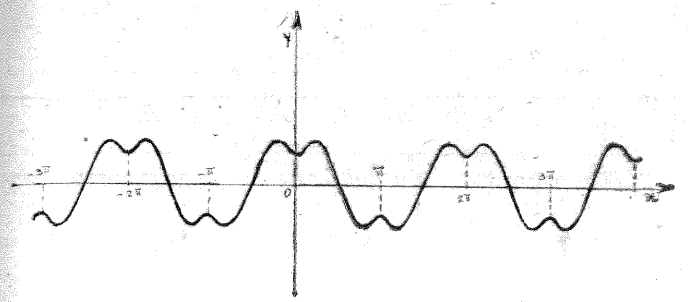


Fig. V.43 b

Observație: graficul funcției nu admite tangente cu panta mai mare decît e, deoarece: $|f'(x)| = |\sin x(2\cos^2 x - 1) \cdot e^{\sin^2 x}| = |\sin x| \cdot |2\cos^2 x - 1| \cdot e^{\sin^2 x}$

și

$$|\sin x| \leqslant 1,\ |2\cos^2 x - 1| \leqslant 1,\ e^{\sin^2 x} \leqslant e,$$

deci $|f'(x)| \leqslant e$ pentru $\forall x \in \mathbf{R}$, deci $-e \leqslant f'(x) \leqslant e$.

44. i) Domeniul de definiție este **R.**

ii) Funcția este periodică de perioadă 2π, deci graficul funcției îl vom trasa pe intervalul $[0, 2\pi]$.

iii) Studiul primei derivate.

$$f'(x) = (1 + \cos x - \sin x + 2\sin x\cos x)e^{\sin x - \cos x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x(1 + 2\sin x) = \sin x - 1$$

și ridicînd la pătrat obținem:

$$(1 - \sin x)(1 + \sin x)(1 + 2\sin x)^2 = (1 - \sin x)(1 - \sin x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$(1 + \sin x)(1 + 4\sin x + 4\sin^2 x) = 1 - \sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sin x(2\sin^2 x + 4\sin x + 3) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi.$$

iv) Trasarea tabloului de variație:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π		$\frac{5\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$			0		$+$		$+$		$+$
$f(x)$	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$

v) Trasarea unui detaliu de grafic (Vezi graficul V.44 a).

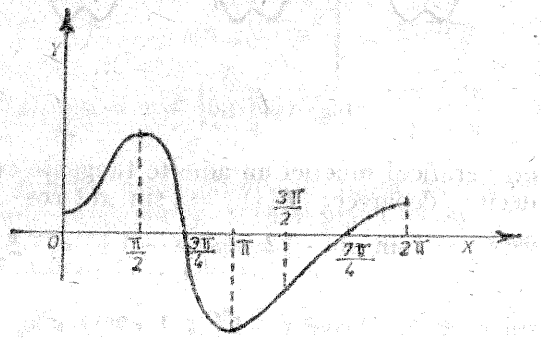


Fig. V.44 a

vi) Extensia detaliului de grafic pe toată axa reală (Vezi graficul V. 44 b).

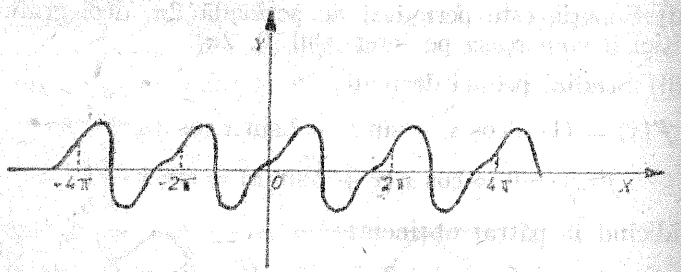


Fig. V.44 b

Observație: Derivata funcției este o funcție mărginită pe $\mathbf{R}$ deoarece funcțiile $g(x) = 1 + \cos x - \sin x + 2 \sin x \cdot \cos x$ și $h(x) = \sin x - \cos x$ sînt mărginite pe $\mathbf{R}$: $|g(x)| \leqslant 1 + |\sin x| + |\cos x| + |\sin 2x| \leqslant 4$ și $|h(x)| \leqslant |\sin x| + |\cos x| < 2$, deci pentru $\forall x \in \mathbf{R}$. $|f'(x)| < 4e^2$, iar inegalitatea este strictă.

45. i) Relațiile se demonstrează, substituind funcțiile hiperbolice prin forma lor echivalentă exponențială. Vezi graficele prezentate în fig. V. 45 ii

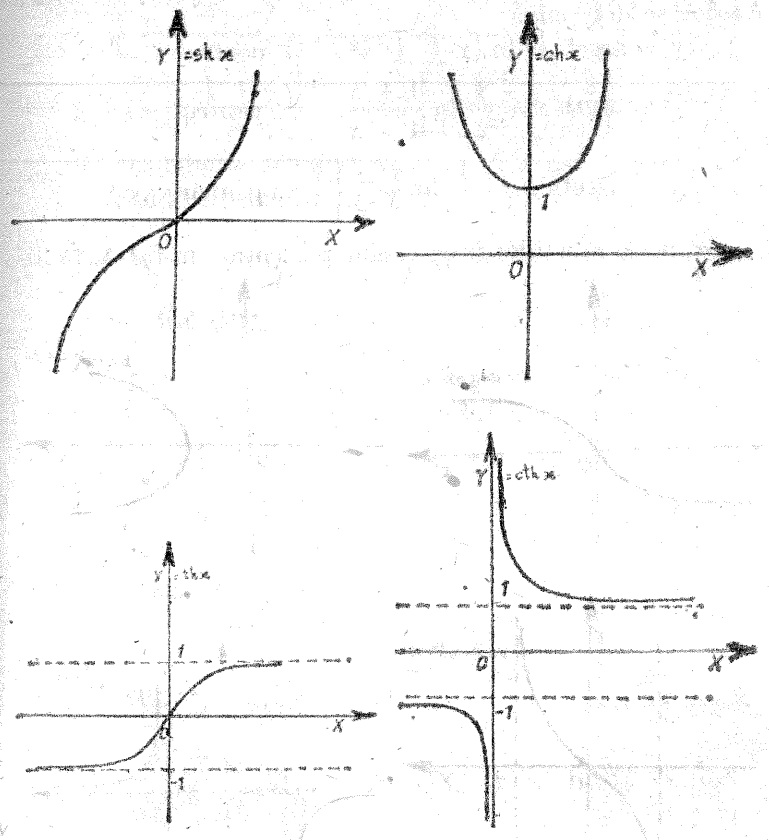


Fig. V.45 ii

iii) Dacă $x = \text{sh } y \Leftrightarrow y = \text{argsh } x$ (argument sinus hiperbolic)

Dacă $x = \text{ch } y \Leftrightarrow y = \text{argch } x$ (argument cosinus hiperbolic)

Dacă $x = \text{th } y \Leftrightarrow y = \text{argth } x$ (argument tangentă hiperbolică)

Dacă $x = \text{cth } y \Leftrightarrow y = \text{argcth } x$ (argument cotangentă hiperbolică).

Cum $x = \operatorname{sh} y \Rightarrow x = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2} \Rightarrow (e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^y = x \pm \sqrt{x^2+1} \Rightarrow y = \operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

Analog se determină:

$$y = \operatorname{argch} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}) \quad \text{pentru } x \geqslant 1$$

$$y = \operatorname{argth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad \text{pentru } |x| < 1$$

$$y = \operatorname{argcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \quad \text{pentru } |x| > 1.$$

Graficele funcțiilor inverse sînt prezentate în fig. V.45.iii.

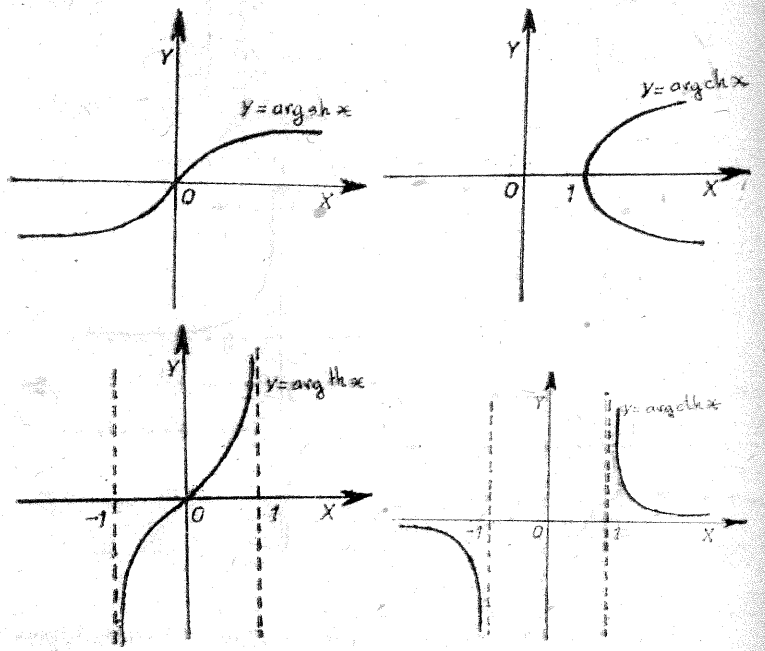


Fig. V.45. iii

46. a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-2x^2}}{|x+2|}$.

i) Domeniul de definiție:

$$\begin{cases} 1 - 2x^2 \geqslant 0 \\ x + 2 \neq 0 \end{cases}, \quad x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

ii) Explicitarea funcției:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-2x^2}}{x+2}, & x \in (-2, \infty) \cap \left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ -\dfrac{\sqrt{1-2x^2}}{x+2}, & x \in (-\infty, -2) \cap \left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] \end{cases} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-2x^2}}{x+2}, \quad x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

iii) Nu admite asimptote.

iv) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = -\frac{4x+1}{(x+2)^2\sqrt{1-2x^2}}; \; f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{4}.$$

v) Studiul derivatei a doua:

$$f''(x) = -\frac{2(8x^3+3x^2+3)}{(x+2)^3(1-2x^2)^{\frac{3}{2}}} < 0, \text{ deoarece}$$

$$3 - 2\sqrt{2} < 8x^3 + 3x^2 + 3 <$$

$$< \frac{4\sqrt{2}+9}{2} \text{ și } \frac{4-\sqrt{2}}{2} < x + 2 < \frac{4+\sqrt{2}}{2}$$

vi) Tabloul de variație:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	▨	▨	+	+	0	−	−	−	▨
$f(x)$	▨	▨	0	↗	$\frac{\sqrt{14}}{7}$	↘	0	▨	▨

Vezi graficul V.46 a.

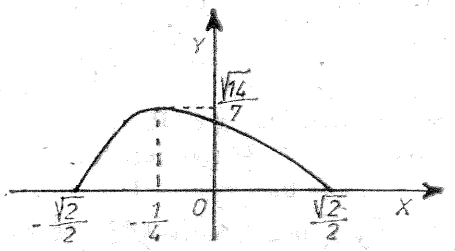


Fig. V.46 a

b) $y = f^2(x) = \dfrac{1-2x^2}{(x+2)^2}$.

i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2\}$.

ii) Asimptote: $x = -2$ (verticală), $y = -2$ (orizontală).

iii) Studiul primei derivate: $y' = 2 \cdot \dfrac{-4x-1}{(x+2)^3}$;

$$y' = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}.$$

iv) Tabloul de variație:

x	$-\infty$			-2		$-\frac{1}{4}$			$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	-2	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{7}$	$\searrow$		-2

v) Vezi graficul V.46 b.

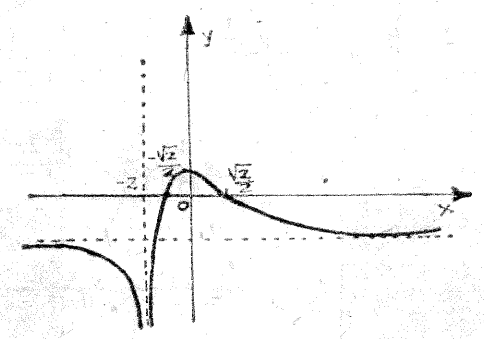


Fig. V.46 b

47. a) Vom reprezenta grafic funcția:

$$f(x) = \frac{x}{x+2} - \frac{1}{x+1} = \frac{x^2-2}{(x+1)(x+2)}.$$

i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, -1\}$

ii) Intersecția cu axele de coordonate:

$$x = 0 \Rightarrow y = -1$$

$$y = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

iii) Asimptote: $x = -2$ și $x = -1$ verticale;

$y = 1$ asimptotă orizontală.

iv) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \frac{3x^2+8x+6}{(x+1)^2(x+2)^2} > 0 \text{ pentru } \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, -1\}.$$

v) Studiul derivatei a doua:

$$f''(x) = -\frac{2(3x^3+8x^2+18x+10)}{(x+1)^3(x+2)^3}.$$

vi) Trasarea tabloului de variație:

x	$-\infty$			-2		x_1^*		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$					$+$		$+$		
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$		$-\infty$	$\nearrow$	1
$f''(x)$	$+$			$-$	0	$+$			$-$	

vii) Trasarea graficului (vezi graficul V. 47 a)

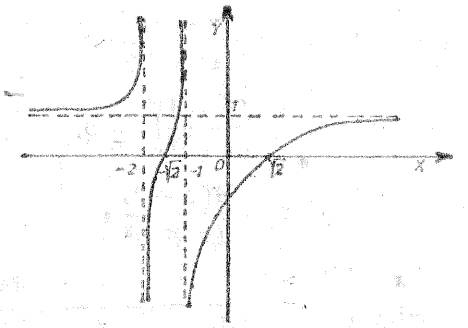


Fig. V.47 a

Deci $f(x) > 0$ dacă $x \in (-\infty, -2) \cup (-\sqrt{2}, -1) \cup (\sqrt{2}, \infty)$

b) Se reprezintă grafic funcția:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-1)(x^2-2)}.$$

Pentru $f(x) > 0$ determinăm

$$x \in (-2,\ 0) \cup \left(\frac{2}{3},\ 1\right) \cup (2, \infty).$$

c) Reprezentăm grafic funcția:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{2x+1}}{2\sqrt{x(2x+1)}}$$

pentru $x \in (0, \infty)$.

Pentru $f(x) > 0$ determinăm $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

d) Reprezentăm grafic funcția:

$f(x) = \sqrt{x^2 - x} - x$ pentru $x \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$.

Pentru $f(x) > 0$ determinăm $x \in (-\infty, 0)$.

e) Reprezentăm grafic funcția:

$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt[3]{x^3 + 3x + 2}$ pentru $x \in \mathbb{R}$.

f) Reprezentăm grafic funcția:

$$f(x) = \ln x - 2 \cdot \frac{x-1}{x+1} \text{ pentru } x > 1$$

$$f'(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 > 0,$$

$$f''(x) = \frac{4(x-1)}{(x+1)^3}.$$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$ $+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		$+$ $+$	

Trasarea graficului este prezentată în fig. V.27 f.

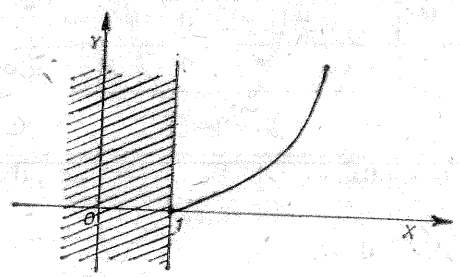


Fig. V.47 f

Deci $f(x) > 0$ pentru $\forall x \in (1, \infty)$.

48. $Z' = \dfrac{1}{\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2}$, $\quad U' = \dfrac{1 + \frac{x^2}{12}}{\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12}\right)^2}$

$$A' = \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2}, \quad B' = \frac{x^3(x-24)}{(12 + 6x - x^2)^2 (1+x)}.$$

Tablourile de variație sînt:

x	-1		0		$+\infty$
Y'		$+$		$+$	
Y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		-2		0	$+\infty$
Z'		$+$			$+$	
Z		$+\infty$				2
	2	$\nearrow$			$-\infty$	$\nearrow$

x	$-\infty$		$3-\sqrt{21}$		0		$3+\sqrt{21}$		$+\infty$
U'		$+$	$+$		$+$		$+$	$+$	
U		$+\infty$					$+\infty$		0
	0	$\nearrow$			$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$			$-\infty$ $\nearrow$

x	-1		0		$+\infty$
A'		$+$ $+$	0	$+$	$+$
A	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	-1		0		$3+\sqrt{21}$		24		$+\infty$
B'		$+$ $+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$ $+$	
B	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$ $-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$\approx 3{,}9$	$\nearrow$	$+\infty$

Vezi graficele V.48 a, b, c, d, e

Inegalitățile cerute rezultă din suprapunerea primelor trei grafice pe un același sistem cartezian.

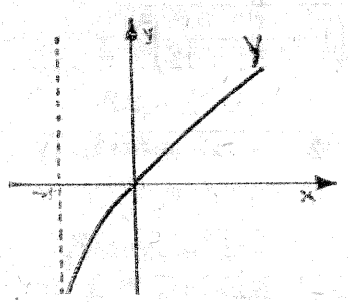


Fig. V.48 a

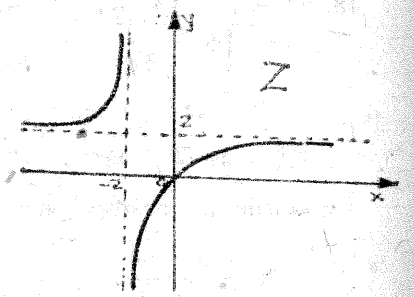


Fig. V.48 b

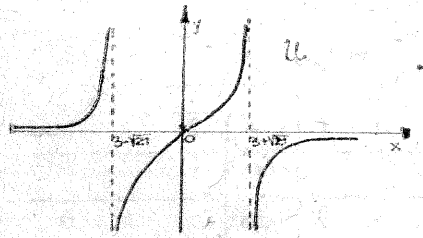


Fig. V.48 c

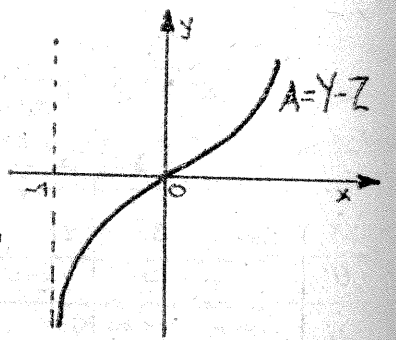


Fig. V.48 d

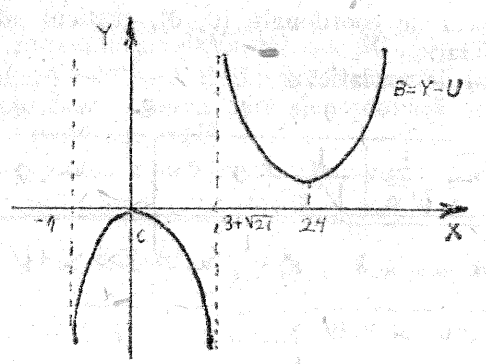


Fig. V.48 e

49. i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$.

ii) Explicitarea funcției:

$$f(x) = \begin{cases} x e^{\frac{1}{x-2}} & \text{pentru } x \in [0, \infty) \setminus \{2\} \\ -x\, e^{\frac{1}{x-2}} & \text{pentru } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

iii) Asimptote: $x = 2$ (verticală).

Oblice: $y = -x - 1$ (pentru $x \to -\infty$)

$y = x + 1$ (pentru $x \to +\infty$)

iv) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{(x-2)^2} \cdot e^{\frac{1}{x-2}}, & x \in [0, \infty) \setminus \{2\} \\ -\dfrac{x^2 - 5x + 4}{(x-2)^2} \cdot e^{\frac{1}{x-2}}, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1,\ x = 4.$

Studiem derivabilitatea în $x = 0$:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \geq 0}} \frac{x^2 - 5x + 4}{(x-2)^2} \cdot e^{\frac{1}{x-2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \left[-\frac{x^2 - 5x + 4}{(x-2)^2} \cdot e^{\frac{1}{x-2}} \right] = -\frac{1}{\sqrt{e}},$$

deci în punctul de coordonate (0, 0), graficul admite un punct unghiular.

v) Tabloul de variație:

x	$-\infty$		0		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+0$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0	$\searrow 4\sqrt{e}$	$\nearrow$		$+\infty$

vi) Vezi graficul V.49

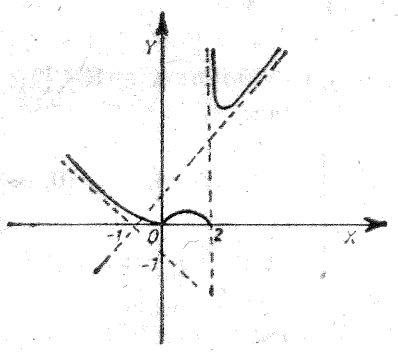


Fig. V.49

b) Intersectînd graficul cu dreapta variabilă $y = \lambda$ obținem:

λ	Natura rădăcinilor (discuție)
$\lambda \in (-\infty, 0)$	nici o rădăcină reală
$\lambda = 0$	două rădăcini nule, una egală cu 2
$\lambda \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$	3 rădăcini reale, una negativă, două pozitive
$\lambda = \frac{1}{e}$	3 rădăcini reale (una dublă $x = 1$)
$\lambda \in \left(\frac{1}{e}, \sqrt[4]{e}\right)$	o rădăcină reală negativă
$\lambda = \sqrt[4]{e}$	3 rădăcini reale (una dublă $x = 4$)
$\lambda \in (\sqrt[4]{e}, \infty)$	3 rădăcini reale, două pozitive și una negativă

50. i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

ii) Funcția este pară, deci reprezentarea se va face pentru $x > 0$, apoi prin simetrie față de ordonată graficul se va extinde pe toată axa reală.

iii) Asimptote: $x = 0$ (verticală), $y = 0$ (orizontală).

iv) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \frac{3 - 2\ln x}{x^3}; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{e^3}.$$

v) Studiul derivatei a doua:

$$f''(x) = \frac{6\ln x - 11}{x^4}; \quad f''(x) = 0 \Rightarrow x = e^{\frac{11}{6}}.$$

vi) Tabloul de variație:

x	$-\infty$		0		e		$e^{\frac{3}{2}}$		$e^{\frac{11}{6}}$		$+\infty$
$f'(x)$				$+$	$+$	0	$-$	$-$			
$f(x)$				$-\infty \nearrow$		$\frac{1}{2e^3}$	$\searrow$		0		
$f''(x)$				$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$		

vii) Vezi graficul V. 50.

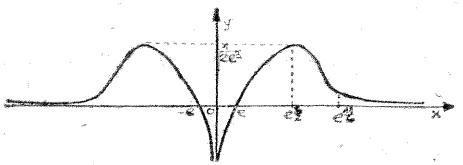


Fig. V.50

b) Intersectînd graficul funcției cu dreapta variabilă $y = \lambda$, obținem:

λ	Discuția rădăcinilor reale
$\lambda \in (-\infty, 0)$	$x_1 \in (-e, 0)$, $x_2 \in (0, e)$
$\lambda = 0$	$x_1 = -e$, $x_2 = e$

$\lambda \in \left(0, \frac{1}{2e^3}\right)$	$x_1 \in \left(-\infty, -e^{\frac{3}{2}}\right)$, $x_2 \in \left(-e^{\frac{3}{2}}, 0\right)$ $x_3 \in \left(0, e^{\frac{3}{2}}\right)$, $x_4 \in \left(e^{\frac{3}{2}}, \infty\right)$
$\lambda = \frac{1}{2e^3}$	$x_1 = x_2 = -e^{\frac{3}{2}}$ $x_3 = x_4 = e^{\frac{3}{2}}$
$\lambda \in \left(\frac{1}{2e^3}, \infty\right)$	Ecuația nu admite soluții reale.

51. a) i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

ii) Funcția este impară $f(x) = -f(-x)$ și vom reprezenta funcția pentru $x > 0$ (graficul este simetric față de originea axelor).

iii) Asimptote: $x = 0$ (verticală), $y = 0$ (orizontală).

iv) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \frac{\lg \frac{e}{10x}}{x^2 \cdot \lg e}; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{e}{10}.$$

v) Studiul derivatei a doua:

$$f''(x) = \frac{\lg \frac{100\,x^2}{e^3}}{x^3 \lg e}; \quad f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{e^3}}{10}.$$

vi) Tabloul de variație:

x	0			$\frac{e}{10}$		$\frac{\sqrt{e^3}}{10}$		$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	0	−	−	−	−
$f(x)$	$-\infty$	↗		$\frac{10}{e}$	↘	$\frac{15}{\sqrt{e^3}}$	↘	0
$f''(x)$	−	−	−	−	−	0	+	+ +

vii) Vezi graficul V.51.

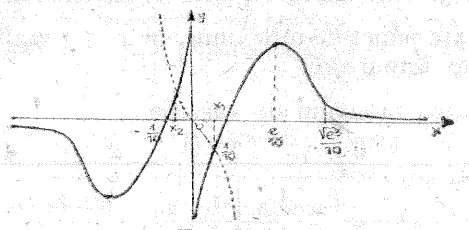


Fig. V.51.

b) Soluțiile ecuației reprezintă abscisele punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor:

$$f_1(x) = \frac{\lg |x| + 1}{x \lg e}; \quad f_2(x) = -x^3,$$

adică

$$x_1 \in \left(-\frac{1}{10}; 0\right) \text{ și } x_2 \in \left(0, \frac{1}{10}\right),$$

soluții care reprezintă rădăcinile ecuației date.

52. i) Explicitînd funcția f obținem:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x-1}} & \text{pentru } x \in (1, \infty) \\ \dfrac{x}{\sqrt{1-x}} & \text{pentru } x \in (-\infty, 1) \end{cases}$$

$$\text{ii) } f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{2(x-1)^{\frac{3}{2}}} & \text{pentru } x \in (1, \infty) \\ \dfrac{2-x}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}} & \text{pentru } x \in (-\infty, 1) \end{cases}$$

$$\text{iii) } f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-x+4}{2(x-1)^{\frac{5}{2}}} & \text{pentru } x \in (1, \infty) \\ \dfrac{-x+4}{2(1-x)^{\frac{5}{2}}} & \text{pentru } x \in (-\infty, 1). \end{cases}$$

În $(2,\ 2)$ graficul admite punct de extrem; în $\left(4,\ \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ graficul admite punct de inflexiune, în $x = 1$ graficul admite un punct de întoarcere.

iv) Trasarea tabloului de variație

x	$-\infty$		0		1		2		4		∞
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	$-$	0	$+$	$+$	$+$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty \searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		$+$	$+$		$+$	$+$	0		$-$		

v) Trasarea graficului (Vezi graficul V. 52).

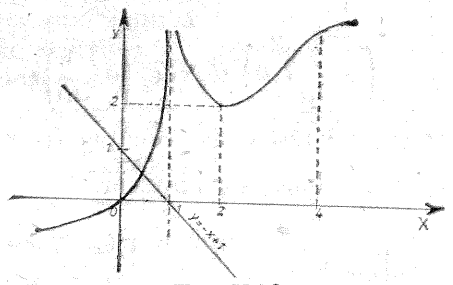


Fig. V.52

Deci intersectînd graficele funcțiilor f și g, vom determina o rădăcină reală $x_1 \in (0,\ 1)$.

53. $|2x^2 - |x-1| - 2| = \begin{cases} |2x^2 - x - 1|, & x - 1 \geqslant 0 \\ |2x^2 + x - 3|, & x - 1 < 0 \end{cases} =$

$$= \begin{cases} 2x^2 - x - 1 \text{ pentru } \left\{x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[1, \infty\right)\right\} \cap \{x - 1 \geqslant 0\} \\ -2x^2 + x + 1 \text{ pentru } \left\{x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)\right\} \cap \{x - 1 \geqslant 0\} \\ 2x^2 + x - 3 \text{ pentru } \left\{x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[1, \infty\right)\right\} \cap \{x - 1 < 0\} \\ -2x^2 - x + 3 \text{ pentru } \left\{x \in \left(-\frac{3}{2}, 1\right)\right\} \cap \{x - 1 < 0\} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2x^2 - x - 1 \text{ pentru } x \in [1, \infty) \\ -2x^2 - x + 3 \text{ pentru } x \in \left(-\frac{3}{2}, 1\right) \\ 2x^2 + x - 3 \text{ pentru } x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]. \end{cases}$$

Numărul soluțiilor reale ale ecuației $|2x^2 - |x-1| - 2| = \lambda x$ este dat în tabelul următor:

λ	Rădăcini reale
$\lambda \in (-\infty,\ 0)$	$x_1 \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right),\ x_2 \in \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$
$\lambda = 0$	$x_1 = -\frac{3}{2},\ x_2 = 1$
$\lambda \in (0,\ \infty)$	$x_1 \in (0,\ 1),\ x_2 \in (1, \infty)$

54. a) $f(x) = x^n(x^n - 2)$

i) Pentru n par: $f(x) \leqslant 0$ pentru $x \in [-\sqrt[n]{2}, \sqrt[n]{2}]$ și $f(x) \geqslant 0$, pentru $x \in \mathbf{R} \setminus [-\sqrt[n]{2}, \sqrt[n]{2}]$.

ii) Pentru n impar: $f(x) \leqslant 0$, pentru $x \in [0, \sqrt[n]{2}]$ și

$$f(x) \geqslant 0, \text{ pentru } x \in \mathbf{R} \setminus [0, \sqrt[n]{2}].$$

b) Vom efectua substituția $x - 1 = y$, deci pentru $x \to 1$ rezultă $y \to 0$:

$$\lim_{y \to 0} \frac{(y+1)^{2n} - 2(y+1)^n - a}{y^2} =$$

$$= \lim_{y \to 0} \left[\frac{y^{2n} + \ldots + C_{2n}^2 y + C_{2n}^1 y + C_{2n}^0 - 2(y^n + \ldots + C_n^2 y^2 + C_n^1 y + C_n^0) - a}{y^2} \right] = C_{2n}^2 - 2 \cdot C_n^2 +$$

$$+ \lim_{y \to 0} \frac{2ny + 1 - 2ny - 2 - a}{y^2} = n^2 + \lim_{y \to 0} \frac{-a - 1}{y^2} = n^2$$

pentru $a = -1$.

c) Vom reprezenta grafic funcția:

$$f(x) = x^6 - 2x^3$$
$$f'(x) = 6x^5 - 6x^2$$
$$f''(x) = 6x(5x^2 - 2)$$

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$		1		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$-\frac{16}{25}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$		$+\infty$		
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$

Vezi graficul V.54

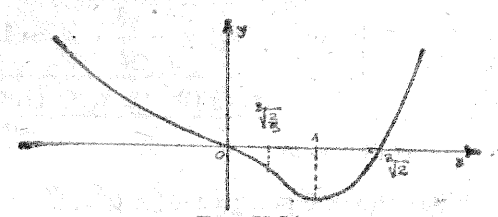


Fig. V.54

55. Se va elimina parametrul t, obținîndu-se:

$$y = |2 - x| \sqrt{\frac{2 - x}{x - 1}}.$$

Vezi graficul V.55

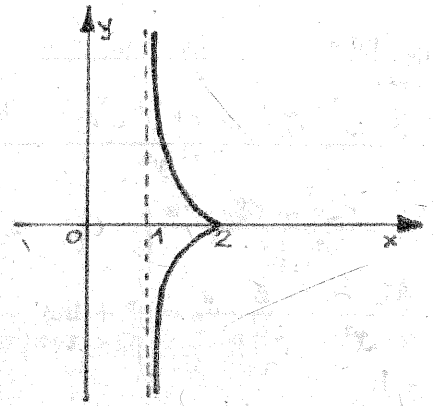


Fig. V.55

56. a) Se explicitează în raport cu x:

$$x = \pm \frac{\sqrt{1 - y}}{y}.$$

Datorită simetriei se va studia numai ramura cu $+$.

Tabloul de variație:

y	$-\infty$		3		0		1
x'	0	$-$	$-$		$-$	$-$	$-$
x	0	$\searrow$	$-\frac{2}{3}$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$ 0

Vezi graficul V.56 a.

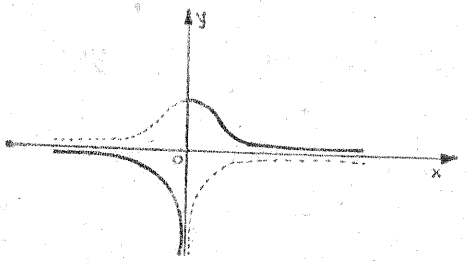


Fig. V.56 a

b) Explicităm în raport cu x:

$$x = \pm \frac{y + 1}{y} \sqrt{4 - y^2}.$$

Curba este simetrică în raport cu Oy și o vom studia numai pentru ramura cu $+$.

y	-2		$-\sqrt[3]{4}$		0		1	2
x'	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
x	0	$\nearrow$	$\frac{45}{100}$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	0

Vezi graficul V.56 b.

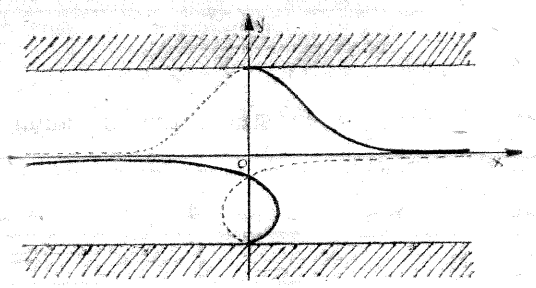


Fig. V.56 b

c) Explicităm în raport cu x:

$$x = \pm (y - a) \sqrt{\frac{2y}{2a - y}}$$

Scriem tabloul pentru semnul + al funcției:

y	0			$\frac{3-\sqrt{5}}{2}a$		a		$2a$
x'		$-$	$-$	0	$+$	$+$		
x	0	$\searrow$		$-\frac{2}{5}a$	$\nearrow$			$+\infty$

Vezi graficul V. 56 c.

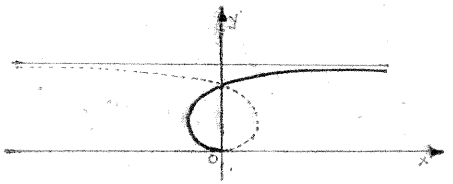


Fig. V.56 c

d) Explicităm funcția în raport cu x:

$$y = \pm \frac{x}{2\sqrt{2a}} \sqrt{a^2 - 2x^2},$$

iar tabloul va fi trasat pentru ramura cu + a funcției:

x	$-a\frac{\sqrt{2}}{2}$		$-\frac{a}{2}$		0		$\frac{a}{2}$		$a\frac{\sqrt{2}}{2}$
y'		$-$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y	0	$\searrow$	$-\frac{a}{8}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{a}{8}$	$\searrow$	0
y''		$+$	$+$	$+$	0		$-$	$-$	$-$

Vezi graficul V.56 d.

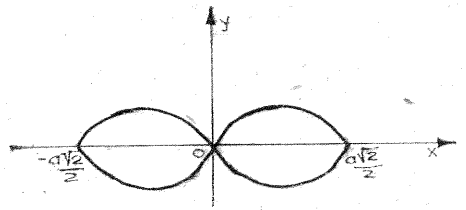


Fig. V.56 d

57. $f'(x) = m + x(2 \ln x + 1)$

$f''(x) = 2 \ln x + 3.$

Tablourile de variație sînt:

x	0		$e^{-\frac{3}{2}}$		1
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	m	$\searrow$	$m - 2e^{-\frac{3}{2}}$	$\nearrow$	$(m+1)$

a) Pentru $m \in \left[2e^{-\frac{3}{2}}, \infty\right)$:

x	0				1
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0		$\nearrow$		m

b) Pentru $m \in \left(0,\ 2e^{-\frac{3}{2}}\right)$:

x	0		x_1		x_2		1
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	m

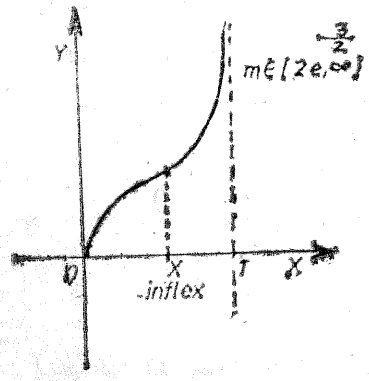
c) Pentru $m \in (-1, 0)$:

x	0		x_3		1
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	1

d) Pentru $m \in (-\infty, -1]$:

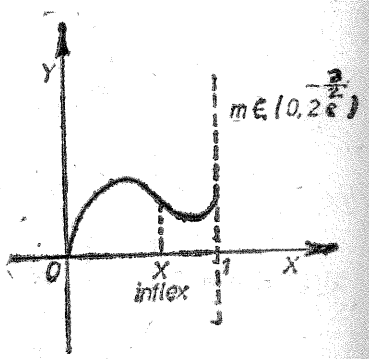
x	0		1
$f'(x)$	$-$	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	m

Graficele corespunzătoare sînt prezentate în figurile V.57. a, b, c, d.



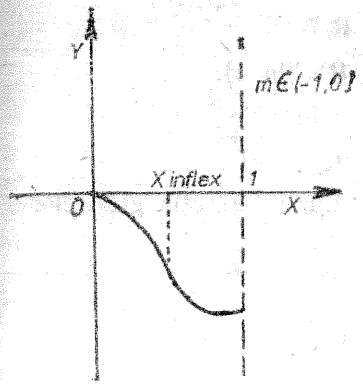
a)

Fig. V.57 a



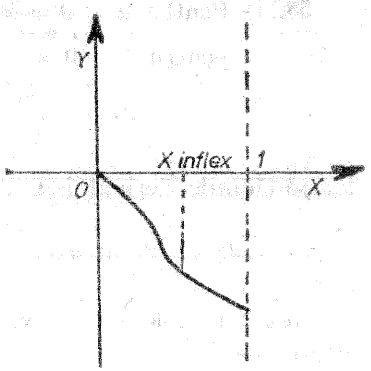
b)

Fig. V.57 b



c)

Fig. V.57 c



d)

Fig. V.57 d

ii) Locul geometric al punctelor de extrem se determină eliminînd parametrul real m între ecuațiile:

$$\begin{cases} mx + x^2 \cdot \ln x = y \\ m + x(2 \ln x + 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -x^2(1 + \ln x)$$

care reprezintă ecuația locului geometric.

$$y' = -x(3 + 2 \ln x);\ y'' = -(5 + 2 \ln x).$$

x	0		$e^{-\frac{3}{2}}$		1
y'	0	$+$	0	$-$	-3
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}e^{-3}$	$\searrow$	-1

iar graficul locului geometric este prezentat în figura V.57.e.

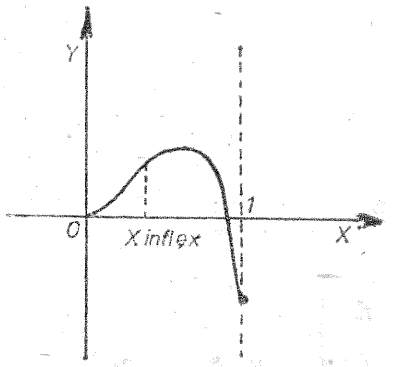


Fig. V.57 e

58. i) Pentru $a < 0 \Rightarrow x \in \mathbf{R}$,

pentru $a > 0 \Rightarrow x \in \mathbf{R} \setminus \{\ln a\}$.

$$f_a'(x) = e^x \cdot \frac{e^x - a(1+x)}{(e^x - a)^2},$$

iar rădăcinile derivatei se află din intersecția graficelor

$$y = \frac{e^x}{x+1} \quad \text{și} \quad y = a.$$

Rezultă tablourile de variație:

pentru $a < 0$

x	$-\infty$		x_1		0		$+\infty$
f_a'	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
f_a	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

pentru $a \in (0, 1)$:

x	$-\infty$		$\ln a$		0		$+\infty$
f_a'		$+$	$+$		$+$	$+$	
f_a	0	$\nearrow$	$+\infty$		$\nearrow$	0 $\nearrow$	$+\infty$
				$-\infty$			

pentru $a = 1$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f_a'		$+$ $+$	0	$+$ $+$	
f_a	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

pentru $a > 1$:

x	$-\infty$		x_1	0		$\ln a$		x_2		$+\infty$
f_a'	$+$	$+$	0	$-$	$-$		$-$	0	$+$ $+$	$+$
f_a	0	$\nearrow$		$\searrow$		$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

ii) $f_a(x) = \dfrac{x e^x}{e^x - a} = x + \dfrac{ax}{e^x - a}$ și

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f_a(x)}{x} = 1, \quad n = \lim_{x \to \infty} [f_a(x) - x] = 0,$$

deci dreapta (D) de ecuație $y = x$ este asimptotă oblică la curbele $f_a(x)$, curbe situate deasupra asimptotei pentru $a > 0$.

iii) Punctele unei tangente paralele cu Ox se găsesc pe o curbă care se determină eliminînd parametrul a între ecuațiile:

$$\begin{cases} e^x - a(x+1) = 0 \\ f_a(x) = \dfrac{x e^x}{e^x - a} \end{cases} \Rightarrow y = x + 1,$$

adică o dreaptă (D_1) paralelă cu prima bisectoare a axelor de coordonate.

iv) Punctele unei tangente paralelă cu dreapta (D) sînt date de $y_a(x) = 1 \Rightarrow e^x(1 - x) = a$. Fie $g(x) = e^x(1 - x)$, $g'(x) = -x e^x$ și tabloul de variație este:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$+$	$+$	0	$-$	$-$
$g(x)$	0			$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$
$g''(x)$		$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$

și avînd graficul prezentat în figura V.58 a.

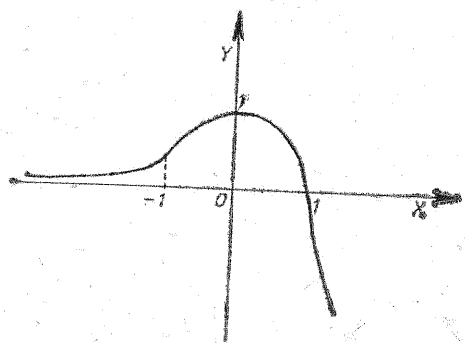


Fig. V.58 a

Existența punctelor cerute este:

a	
$a \in (-\infty, 0)$	un punct cu abscisă pozitivă
$a \in (0, 1)$	două puncte cu abscise de semn contrar
$a \in (1, \infty)$	nici un punct

Eliminînd parametrul a între ecuațiile

$$\begin{cases} e^x(1-x) = a \\ y = \dfrac{x\,e^x}{e^x - a} \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

care reprezintă ecuația dreptei (D_2), dreaptă care conține punctele considerate.

v) $f_a''(x) = \dfrac{a\,e^x[(x-2)\,e^x + a(x+2)]}{(e^x - a)^2}$ și fie

$h(x) = e^x \dfrac{2-x}{2+x}$ (din $f_a''(x) = 0$), $h'(x) = e^x \cdot \dfrac{-x^2}{(2+x)^2}$.

Tabloul de variație este:

x	$-\infty$		-2		0		∞
$h'(x)$		$-$		$-$		$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$ $-\infty$

Graficul funcției este prezentat în figura V.58 b.

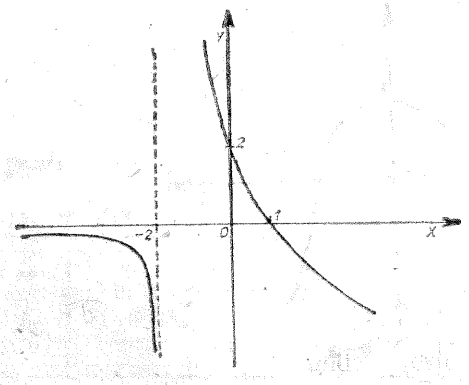


Fig. V.58. b

Într-un punct de inflexiune al fasciculului $f_a(x)$, $f_a''(x)$ se anulează avînd schimbare de semn; aceste puncte de inflexiune fiind determinate de rădăcinile ecuației $h(x) - a \neq 0$ pentru $e^x \neq a$.

Intersecția graficului funcției $h(x)$ cu dreapta variabilă $y = a$ ne permite să stabilim numărul de puncte de inflexiune, deci:

a	Numărul de puncte de inflexiune
$a \in (-\infty, 0)$	două puncte de inflexiune: $x_1 \in (-\infty, -2)$, $x_2 \in (1, \infty)$
$a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$	un punct de inflexiune $x_1 \in (-2, 1)$
$a = 1$	Soluția $x = 0$ se elimină deoarece anulează numitorul $e^x - a$.

vii) Eliminînd parametrul real a între ecuațiile

$$\begin{cases} (x-2)e^x + a(x+2) = 0 \\ y = \dfrac{x\,e^x}{e^x - a} \end{cases}$$

obținem dreapta de ecuație $y = \dfrac{1}{2}x + 1$ care reprezintă tocmai dreapta (D_2) care conține punctele de inflexiune.

viii) Trasarea graficelor (Vezi fig. V 58 viii) a, b, c)

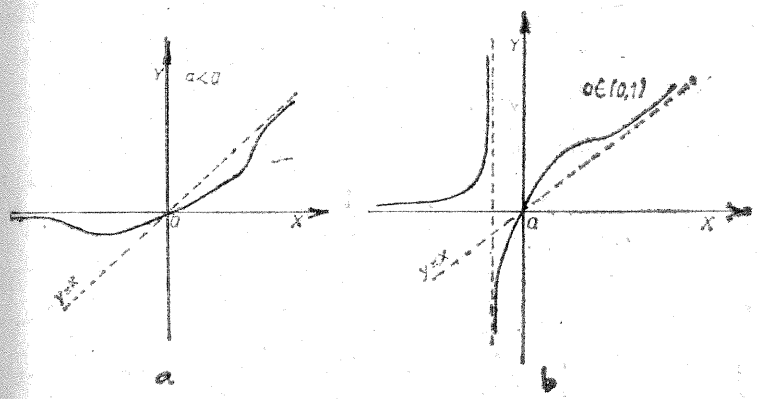


Fig. V.58 viii) a și b

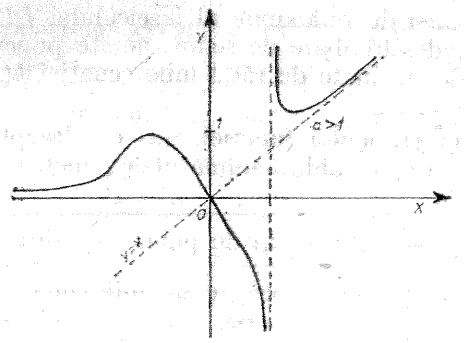


Fig. V.58 viii) c

59. $f'(x) = \ln(ax) + 2x + 1$, iar rădăcinile ecuației $f'(x) = 0$ ecuație numită transcendentă, le vom determina grafic, adică intersectînd curbele:

$$y = \ln(ax) \text{ și } y = -2x - 1$$

$$f''(x) = \frac{2x+1}{x}.$$

Tablourile de variație sînt:

pentru $a \in (0, \infty)$

x	0		x_1'		x_1		∞
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(x_1')$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞
$f''(x)$			$+$	$+$	$+$	$+$	

pentru $a \in (-\infty, -e)$

x	$-\infty$		x_1		x_1'	$-\frac{1}{2}$	x_2		x_2'		0
$f'(x)$	$-$	$-$		0	$+$	$+$	$+$		0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f(x_1')$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(x_2')$	$\searrow$	0
$f''(x)$			$+$		$+$	0	$-$		$-$		

pentru $a = -e$:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$	x_1'		0
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(x_1')$	$\searrow$	0	
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$

pentru $a \in (-e, -2)$:

x	$-\infty$		x_1'		$-\frac{1}{2}$	x_2'		0
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(x_1')$	$\nearrow$		$f(x_2')$	$\searrow$	
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$	$-$	

pentru $a = -2$:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$	0
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$

pentru $a \in (-2, 0)$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$	0
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$

Graficele corespunzătoare diferitelor valori ale parametrului real a sînt prezentate în fig. V.59.

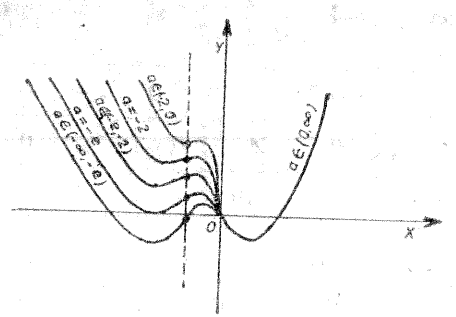


Fig. V.59

60. Cazul 1°: Dacă m este un număr rațional ireductibil cu numitorul impar sau un număr întreg, atunci domeniul de definiție al funcției este $x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$.

Cazul 2°: Pentru alte valori ale lui m, $f(x)$ nu poate fi definită decît dacă $x \in (0, 1]$.

Funcția se poate scrie $f(x) = \dfrac{x^{2-m}}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$, se vede că ea poate fi definită și în punctul $x = 0$, dacă $m \leqslant 2$.

$$f'(x) = \frac{(2-m)\sqrt{1-x^2} + (m-1)x^2 + 2 - m}{\sqrt{1-x^2}(1+\sqrt{1-x^2})^2} \cdot x^{1-m}$$

se anulează pentru $x = 0$ dacă $m < 1$ și pentru

$$x = \frac{\pm\sqrt{m(m-2)}}{m-1} \quad \text{dacă} \quad m \geqslant 2,$$

iar dacă $m \in [1, 2)$ funcția nu se anulează.

Vom nota: $(-1)^m = a$

În cazul 1°, dacă $m < 1$

x	-1		0			1
$f'(x)$	$-a$	$-a$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	a	$\longrightarrow$	0	$\nearrow$		1

Există un minim în $x = 0$, dacă $a = +1$; iar dacă $a = -1$ funcția este descrescătoare. În cazul 2° se păstrează jumătatea din dreapta a tabloului de variație.

Tabloul pentru $m = 1$:

x	-1		0		1
$f'(x)$	$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+\infty$
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

iar graficul este prezentat în figura V.60 a.

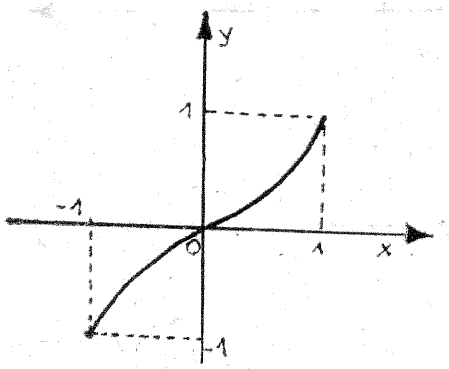


Fig. V.60 a

Tabloul în cazul 1°, dacă $1 < m < 2$ este:

x	-1		0		1
$f'(x)$	$-a$	$\longrightarrow -a$	$+$	$+ +$	$+\infty$
$f(x)$	a	$\longrightarrow$	0	$\nearrow$	1

În $x = 0$ este un punct de întoarcere dacă $a = 1$, și un punct în care tangenta este axa Oy dacă $a = -1$.

În cazul 2°, se păstrează jumătatea din dreapta a tabloului.

Tabloul pentru $m = 2$ este:

x	-1		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	1

Graficul este prezentat în figura V.60 b.

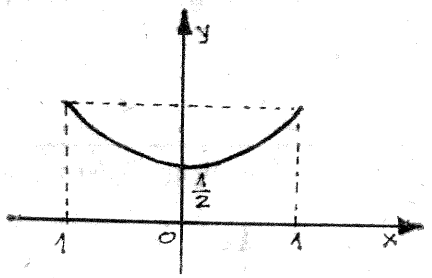


Fig. V.60 b

Tabloul în cazul 1°, dacă $m > 2$ este:

x	-1	$-x_1$		0		x_1		1
$f'(x)$	$-a$	0	a	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	a	ay_1	$-a \cdot \infty$	$+$	$\searrow$	y_1	$\nearrow$	1

Unde $x_1 = \dfrac{\sqrt{m(m-2)}}{m-1}$;

$$y_1 = \frac{(m-1)^{m-1}}{\sqrt{m^m(m-2)^{m-2}}}.$$

În cazul 2° se păstrează jumătatea din dreapta a tabloului.

61. a) Derivata polinomului din membrul întîi nu are rădăcini reale. Rădăcina reală a ecuației este -1.

b) $P(x) = a_0x^{2p+1} + a_1x^{2p} + \ldots + a_{2p}x + a_{2p+1}$;

Înlocuind în relația dată și identificînd, se obține

$a_0 = 1$, $a_1 = 2p + 1$, $a_2 = (2p + 1)2p$, $a_3 = (2p + 1)2p(2p - 1)$, ..., $a_{2p-1} = (2p + 1)2p(2p - 1)\ldots 4 \cdot 3$,

$a_{2p} = 1 + (2p + 1)!$, $a_{2p+1} = 3 + (2p + 1)!$

Apoi se va face verificarea.

c) $f'(x) = -(x^{2p+1} + x + 2)e^{-x}$; $f'(-1) = 0$; $f'(0) = -2$,

$$f(-1) = e\,;\ P(-1) > 0$$

Tabloul de variație:

x	$-\infty$			-1			$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		max	$\searrow$		0

62. a) Domeniul de definiție este $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$ dacă n este par și $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ dacă n este impar.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{dacă } m > n \\ -1 & \text{dacă } m = n \\ 0 & \text{dacă } m < n \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{dacă } m > n \text{ și } m - n \text{ par} \\ +\infty & \text{dacă } m > n \text{ și } m - n \text{ impar} \\ -1 & \text{dacă } m = n \\ 0 & \text{dacă } m < n \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{x^{m-1}[m + (n-m)x^n]}{(1 - x^n)^2}$$

se anulează în $x = 0$ (dacă $m \geqslant 2$) și în $x = \pm a$, sau $x = -a$ după cum $m > n$ și n par, $m > n$ și n impar sau $m < n$ și n impar.

S-a notat cu $a = \sqrt[n]{\dfrac{m}{m-n}}$, unde a este un număr real mai mare în modul decît 1.

Pentru cazul $m = n + 1$ există și asimptota oblică

$$y = -x.$$

Tabloul de variație este:

m, n	m, n	x	$-\infty$	$-\lvert a\rvert$	-1	0	1	$\lvert a\rvert$	$+\infty$
m-par n-par	$m>n$	f'		$+\ 0\ -$		$-\ 0\ +$		$+\ 0\ -$	
		f		$\nearrow M_1 \searrow$		$+\infty \searrow 0 \nearrow +\infty$		$\nearrow M_1 \searrow$	
			$-\infty$		$-\infty$			$-\infty$	$-\infty$
	$m\leqslant n$	f'		$-\ -\ -$		$-\ 0\ +$		$+\ +$	
		f	b	$\searrow$		$+\infty \searrow 0 \nearrow +\infty$		$\nearrow b$	
					$-\infty$			$-\infty$	
m-impar n-impar	$m>n$	f'		$+$	$+$	$+\ 0\ +$		$+\ 0\ -$	
		f		$\nearrow$		$+\infty$		$\nearrow M_1 \searrow$	
			$-\infty$			$0 \nearrow$		$-\infty$	$-\infty$
	$m=n$	f'		$+$	$+$	$+\ c\ +$		$+\ +$	
		f		$\nearrow$	$\nearrow$	$0 \nearrow +\infty$			
			-1					$-\infty \nearrow -\infty$	
	$m<n$	f'	$-$	0	$+$	$+$		$+\ +$	
		f				$\nearrow$		$+\infty$	
			$0 \searrow$	M_2				$-\infty \nearrow 0$	
m-par n-impar	$m>n$	f'	$-$	$-$	$-$	$-\ 0\ +$		$+\ 0\ -$	
		f	$+\infty$		$\searrow$	$0 \nearrow +\infty$			
								$-\infty \nearrow M_1 \searrow -\infty$	
	$m<n$	f'		$+\ 0\ -$		$0\ +$		$+\ +$	
		f	$0 \nearrow$	M_2	$\searrow$	$0 \nearrow +\infty$			
								$-\infty \nearrow 0$	
m-impar n-par	$m>n$	f'		$-\ 0\ +$		$+\ 0\ +$		$+\ 0\ -$	
		f	$+\infty$	$\searrow -M_1 \nearrow$	$+\infty$	$\uparrow 0 \uparrow +\infty$		M_2	
					$-\infty$			$-\infty \nearrow \searrow 0$	
	$m<n$	f'		$+$	$+$	$+\ c\ +$		$+\ +$	
		f	$0 \nearrow$	$+\infty$		$\nearrow 0 \nearrow +\infty$			
					$-\infty$			$-\infty \nearrow 0$	

unde $M_1 = \dfrac{a^m}{1-a^n}$, $M_2 = \dfrac{a^m}{1+a^n}$

$$b = \begin{cases} -1 \text{ dacă } m = n \\ 0 \text{ dacă } m < n \end{cases}, \quad c = \begin{cases} 0 \text{ dacă } m > 1 \\ 1 \text{ dacă } m = 1 \end{cases}$$

Se observă că ramurile pentru $x > 0$ sînt de trei tipuri iar cele pentru $x < 0$ se pot grupa în 4 perechi simetrice față de Ox și alte două cărora nu le corespund simetrice.

b) Ecuația $\dfrac{x^m}{1-x^n} = a$ indică faptul că numărul rădăcinilor ei reale coincide cu numărul punctelor de intersecție ale graficului funcției f cu dreapta $y = a$. Discuția se face și pe baza rezultatelor din tabloul precedent, dacă a aparține intervalelor: $(-\infty, M_1)$, $(M_1, -M_2)$, $(-M_2, 0)$, $(0, M_2)$, $(M_2, -M_1)$, $(-M_1, \infty)$ sau ia valorile M_1, $-M_2$, 0, M_2, $-M_1$.

Numărul maxim de rădăcini reale este 4, în cazul m, n pari, $m > n$, $a \in (-\infty, M_1]$, iar zero este rădăcina multiplă de ordinul m, dacă $a = 0$. Ecuația nu are nici o rădăcină reală în cazul m par, $m > n$, $a \in (M_1, 0)$. Dacă $m = n$ se obține o ecuație binomă, pentru $a \neq -1$.

c) Produsul indicat este $\dfrac{x^{2+6+\ldots+p(p+1)}}{(1-x^n)^p}$; limita produsului este finită și diferită de zero, dacă $2 + 6 + \ldots + p(p+1) = np$ de unde $n = \dfrac{(p+1)(p+2)}{3}$, iar limita cerută este $(-1)^p$. Suma se calculează astfel:

$$\sum_{k=1}^{p} k(k+1) = \sum_{k=1}^{p} k^2 + \sum_{k=1}^{p} k =$$

$$= \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + \frac{p(p+1)}{2} = \frac{p(p+1)(p+2)}{3}.$$

CAPITOLUL VI

PROBLEME DE MAXIM ŞI DE MINIM

1. Suma catetelor unui triunghi dreptunghic este constantă şi egală cu l.

i) Determinaţi maximum volumului generat de rotirea triunghiului în jurul unei catete.

ii) Studiaţi variaţia şi trasaţi graficul funcţiei.

iii) Caz particular $l = \frac{3}{2}$.

2. Se consideră un cerc de centru O, de rază R şi un punct exterior P. Printr-un punct A, situat pe cerc, se duce tangenta la cerc, care intersectează segmentul OP în punctul B.

i) Să se studieze variaţia ariei triunghiului PAB, cînd unghiul POA parcurge plaja de valori $(0, \pi)$.

ii) Să se reprezinte grafic această variaţie.

3. Determinaţi dimensiunile unui dreptunghi de arie maximă care este înscris într-o elipsă de ecuaţie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

4. Fie punctele A (1, 4) şi B (3, 0) situate pe elipsa $2x^2 + y^2 = 18$. Determinaţi pe această elipsă un punct C, astfel ca aria triunghiului ABC să fie maximă.

5. Se consideră un con de rază R şi înălţime H. Un plan paralel cu generatoarea taie baza după o dreaptă. Determinaţi distanţa de la centrul bazei pînă la această dreaptă, astfel ca aria secţiunii triunghiulare să fie maximă.

6. Demonstraţi că într-o elipsă distanţa de la centru pînă la o normală oarecare nu este mai mare decît diferenţa semiaxelor.

7. Într-un triunghi dreptunghic AOB cu $m(\hat{O}) = 90°$ se înscrie un dreptunghi $MPOQ$. Se cere să se studieze variaţia diagonalei PQ, atunci cînd punctul P parcurge dreapta OA. Se vor lua ca variabile $OP = x$ şi ca date segmentele $OA = a$, $OB = b$.

8. Se dă un segment de dreaptă $OA = a$, şi din O ca centru se descrie o sferă de rază variabilă. Studiaţi variaţia: i) Zonei văzute din punctul A; ii) Coardei BC; iii) Volumul segmentului sferic BCD; iv) Suma volumelor conurilor ABC şi OBC; v) Raportul dintre suprafaţa laterală a conului ABC şi cea a zonei sferice BCD.

9. Se aleg pe o elipsă patru puncte: M, M', N, N' simetrice în raport cu axele carteziene.

Studiaţi variaţia suprafeţei octogonale avînd drept vîrfuri cele patru puncte, cele două focare şi extremităţile axei mici.

10. Volumul unei prisme triunghiulare regulate este egal cu v. Determinaţi latura bazei astfel ca suprafaţa totală să fie minimă.

11. Perimetrul unui triunghi isoscel este egal cu $2p$. Determinaţi dimensiunile triunghiului care va genera volumul maxim al corpului obţinut prin rotirea triunghiului în jurul bazei.

12. Determinaţi înălţimea cilindrului de volum maxim înscris într-o sferă de rază R.

13. Determinaţi înălţimea conului de volum maxim înscris într-o sferă de rază R.

14. Fie A un punct pe un cerc $\mathcal{C}(O, R)$. Trasaţi o coardă BC paralelă cu tangenta în A, astfel ca aria triunghiului ABC să fie maximă.

15. Determinaţi lungimea înălţimii unui con de volum extrem, circumscris unei semisfere de rază R.

16. Se consideră un con circular drept, avînd diametrul bazei $AB = 2R$ şi generatoarea $SA = x$.

Să se calculeze, în funcţie de R şi x, raportul dintre volumul conului şi cel al sferei înscrise în con. Să se studieze variaţia raportului în funcţie de x. Să se determine x, astfel încît raportul să aibă o valoare dată. *Discuţie.*

17. Se dă un cilindru circular drept de înălțime h și rază a bazei r peste care se așază o semisferă de rază r. Se obține astfel un corp K.

i) Să se studieze variația ariei suprafeței corpului K în cazul în care h și r sînt variabile, dar legate prin relația $h + r = a$.

ii) Analog, dar h și r sînt legate prin relația

$$\sqrt{h^2 + r^2} = a.$$

iii) Să se studieze variația volumului corpului K, știind că h și r sînt legate prin relația $h + r = a$ și să se trascze graficul.

18. Se consideră un cilindru circular drept de rază a bazei r și înălțime h, peste care se așază o calotă sferică de rază a bazei r, înălțime $2h$, raza sferei din care provine calota fiind R.

Să se studieze variația ariei totale a suprafeței corpului astfel obținut în funcție de h, știind că R este dat și că $h \in (0, R)$.

19. Să se afle cilindrul de volum maxim înscris într-un con circular drept, ale cărui generatoare sînt înclinate cu 45° față de planul bazei și care are aria totală egală cu πa^2.

(Institutul Politehnic)

20. Se consideră un cilindru variabil, înscris într-o sferă de rază dată R. Să se studieze variația suprafeței totale a cilindrului.

21. Fie un con circular drept de rază constantă R și generatoare variabilă x. Să se determine minimul raportului dintre volumul conului și volumul sferei înscrise în con.

22. Fie o sferă de centru O și de rază R și un punct fix P exterior sferei, la distanța a de O. Fie M un punct variabil pe dreapta OP situat în interiorul sferei. Planul prin M perpendicular pe OP intersectează sfera după un cerc C. Să se determine maximul volumului conului cu baza cercul C și cu vîrful în punctul P.

23. Un mobil are o mișcare rectilinie, definită prin ecuația:

$$x = t^4 - 8t^3 + 18t^2 - 4nt + 1$$

unde n este un număr real, convenabil ales.

a) Să se calculeze viteza v și accelerația a cît și valorile lor extreme.

b) Pentru valorile timpului t pe abscisă și acelea ale vitezei v pe ordonată, să se traseze curba care pentru diferitele valori ale parametrului n reprezintă variația lui v cînd t parcurge toată axa reală.

24. Fie A și B două puncte luminoase, la o distanță a unul de celălalt, și ambele puncte luminează punctul M. Intensitatea luminoasă a punctelor A și B este egală, iar lumina totală primită de M este egală cu suma inverselor pătratelor distanțelor AM și BM.

Punctul M parcurge o dreaptă paralelă cu AB. Această dreaptă trece printr-un punct C, echidistant de punctele A și B, și este situat la o distanță b față de punctele A și B.

Se notează cu x distanța variabilă CM.

Studiați variația intensității luminoase pe care o primește punctul M. Determinați punctele de maxim și minim ale intensității și discutați valorile raportului $\frac{CA}{AB}$.

25. Dintr-un rîu de lățime a pornește un canal de lățime b, formînd un unghi drept cu rîul. Care este lungimea maximă a unui vapor care poate intra în canal? (se neglijează lățimea vaporului).

26. La ce înălțime trebuie așezată o lampă pe verticala centrului unei piste circulare de rază R, pentru ca această pistă să fie luminată la maxim, știind că intensitatea luminii într-un punct M este proporțională cu sinusul unghiului θ format de raza de lumină cu planul pistei și invers proporțională cu pătratul distanței de la M la sursa de lumină?

27. Dintr-o localitate A, situată lîngă o cale ferată, se dirijează un transport de mărfuri spre o localitate B situată la 9 km de calea ferată. Distanța de la A la proiecția lui B pe calea ferată fiind de 30 km, iar costul transportului unei tone de marfă pe distanța de 1 km fiind α lei pentru calea ferată și β lei pentru transportul cu autocarul ($\alpha < \beta$).

Să se determine punctul în care trebuie racordată cu calea ferată o șosea care începe din B astfel încît transportul mărfurilor să fie cît mai economic.

1. i) Fie $AC = x$, $AB = y$ şi $x + y = l$ (fig. VI.1 i)).

$$\begin{cases} V = \frac{1}{3}\pi x^2 y \\ x + y = l \end{cases} \Rightarrow y = l - x \Rightarrow V(x) = \frac{1}{3}\pi x^2(l - x).$$

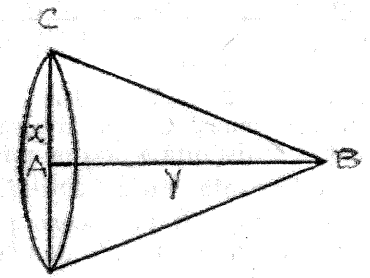


Fig. VI.1 i)

ii) Se observă că volumul $V(x)=0$ pentru $x=0$ şi $x=l$.

$V'(x) = \frac{1}{3}\pi x(2l - 3x)$; $V'(x) = 0$ pentru $x = 0$ şi $x = \frac{2l}{3}$,

deci maximul va fi realizat pentru $\begin{cases} x = \frac{2l}{3} \\ y = \frac{1}{3}l \end{cases} \Rightarrow V_{max} = \frac{4\pi l^3}{81}$.

$$V''(x) = \frac{1}{3}\pi(2l - 6x).$$

x	$-\infty$		0		$\frac{l}{3}$		$\frac{2l}{3}$		l		$+\infty$
$f'(x)$				$+$			0	$-$			
$f(x)$			0		$\nearrow$		$\frac{4\pi l^3}{81}$	$\searrow$	0		
$f''(x)$				$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$		

Vezi graficul VI.1 ii)

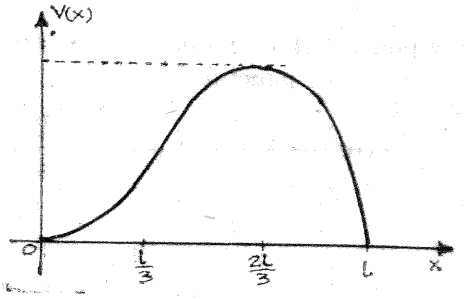


Fig. VI.1 ii)

iii) Pentru valoarea numerică obţinem: $\frac{2l}{3} = 1$; $\frac{4\pi l^3}{81} = 0{,}52$.

Pentru: $x = \frac{l}{3} = 0{,}5$, $V = 0{,}26$.

2. i) Vom nota: $PO = a$, $m(\widehat{POA}) = \varphi$, aria $(PAB) = S$, AH înălţimea $\triangle ABP$, R raza cercului (fig. VI.2 i)).

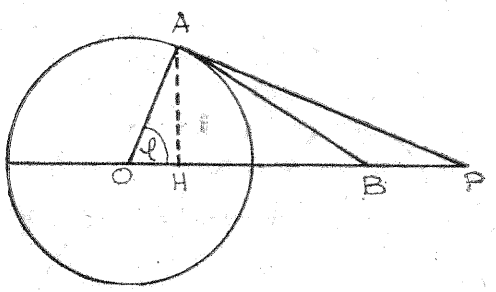


Fig. VI.2 i)

Se observă că $\mu(\widehat{BAO}) = \frac{\pi}{2}$.

$$S = \frac{PB \cdot AH}{2} \Rightarrow AH = R \sin\varphi.$$

$$PB = PO - BO = a - \frac{R}{\cos\varphi} = \frac{a\cos\varphi - R}{\cos\varphi}.$$

Deci: $S=\frac{R}{2}(a\cos\varphi-R)\cdot\operatorname{tg}\varphi$; $S=0\Rightarrow\operatorname{tg}\varphi=0\Rightarrow\varphi\in\{0,\pi\}$

și în acest caz punctul A este una din extremitățile diametrului care trece prin punctul P.

ii) $S(\varphi)=\frac{R}{2}(a\cos\varphi-R)\cdot\operatorname{tg}\varphi$; $S'(\varphi)=\frac{R}{2}\cdot\frac{a\cos^3\varphi-R}{\cos^2\varphi}$;

$$S'(\varphi)=0\Rightarrow\cos\varphi=\sqrt[3]{\frac{R}{a}}\Rightarrow\varphi_1=\arccos\sqrt[3]{\frac{R}{a}}$$

φ	0		φ_1		$\frac{\pi}{2}$		π
$S'(\varphi)$	$+$		0	$-$	$\nexists$	$-$	
$S(\varphi)$	0	$\nearrow$	S_1	$\searrow$	$+\infty$ / $-\infty$	$\searrow$	0

Vezi graficul VI.2 ii)

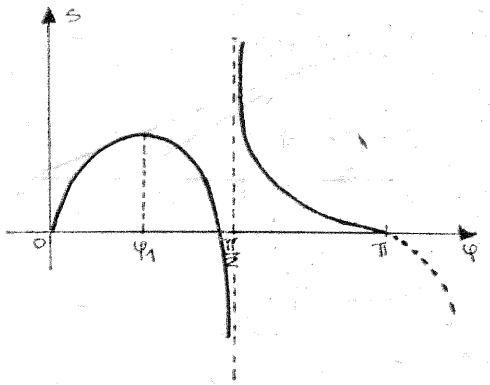


Fig. VI.2 ii)

3. Cum punctul M aparține elipsei, atunci coordonatele sale verifică ecuația elipsei, deci fie:

$$M\left(\lambda,\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\lambda^2}\right).$$

Aria dreptunghiului este $\sigma(\lambda)=\frac{4b}{a}\lambda\sqrt{a^2-\lambda^2}$, unde $\lambda\in[-b,\ b]$.

$\sigma'(\lambda)=\frac{4b}{a}\cdot\frac{a^2-2\lambda^2}{\sqrt{a^2-\lambda^2}}$, $\sigma'(\lambda)=0\Rightarrow\lambda=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$ și

$f(\lambda)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}b$ (fig. VI.3).

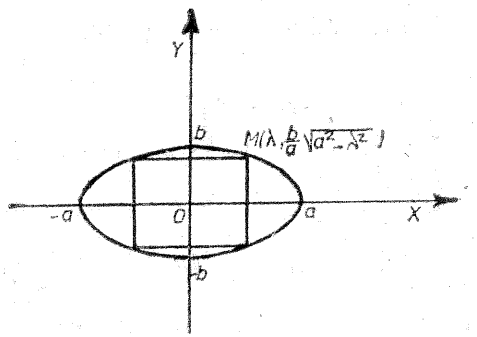


Fig. VI.3

Deci dimensiunile dreptunghiului de arie maximă sînt: $\sqrt{2}a$ și $\sqrt{2}b$.

4. Ecuația elipsei este: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{18}-1=0$ (fig. VI.4).

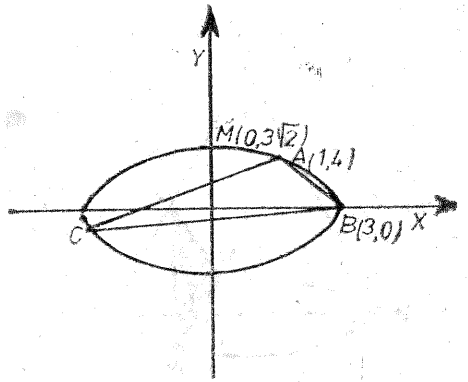


Fig. VI.4

Cum punctul C aparține elipsei, coordonatele sale verifică ecuația elipsei, deci fie $C(\lambda, \sqrt{18-2\lambda^2})$. Aria triunghiului ABC este:

$$f(\lambda)=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\lambda & \sqrt{18-2\lambda^2} & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=\pm\frac{1}{2}(2\sqrt{18-2\lambda^2}+4\lambda-12) \quad \text{cu} \quad \lambda\in[-3,\ 3].$$

$$f'(\lambda)=-\frac{2\lambda-2\sqrt{18-2\lambda^2}}{\sqrt{18-2\lambda^2}}$$

$$f'(\lambda)=0\Rightarrow\lambda-\sqrt{18-2\lambda^2}=0\Rightarrow\lambda^2=6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lambda=\pm\sqrt{6} \text{ și } f(\lambda)=f(\pm\sqrt{6})=\pm\sqrt{6}.$$

Coordonatele punctului C pentru care aria este maximă sînt $(-\sqrt{6}, -\sqrt{6})$.

5. Fie $OP=x$. Cum $\triangle PQB\sim\triangle BVA\Rightarrow\frac{PQ}{\sqrt{R^2+H^2}}=\frac{R-x}{2R}\Rightarrow PQ=\frac{\sqrt{R^2+H^2}}{2R}(R-x)$ (fig. VI.5).

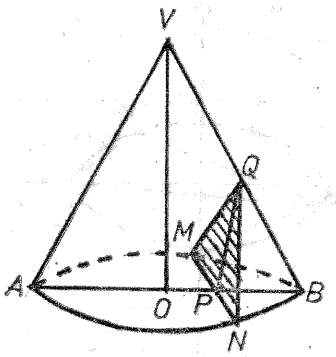


Fig. VI.5

Din $\triangle OPN\Rightarrow PN=\sqrt{R^2-x^2}\Rightarrow MN=2\sqrt{R^2-x^2}$.

$$\sigma(x)=\frac{MN\cdot PQ}{2}=\frac{\sqrt{R^2+H^2}}{2R}\cdot\sqrt{R^2-x^2}\cdot(R-x),$$

$$\sigma'(x)=\frac{\sqrt{R^2+H^2}}{2R}\cdot\frac{2x^2-Rx-R^2}{\sqrt{R^2-x^2}}\Rightarrow x=\frac{R}{2}.$$

6. Figura VI.6. $(T)\ y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$,

$(N)\ y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$; $(OP)\ y=\lambda x$. $L(x_0, y_0)$; $P(m,n)$.

$$\Rightarrow P=(OP)\cap(N)\Rightarrow\begin{cases}y=\lambda x\\ y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).\end{cases}$$

Rezolvînd sistemul, obținem coordonatele punctului P, apoi determinăm lungimea segmentului $OP=\sqrt{x_p^2+y_p^2}$. Relația se obține din: $OP<a-b\Leftrightarrow x_p^2+y_p^2<(a-b)^2$.

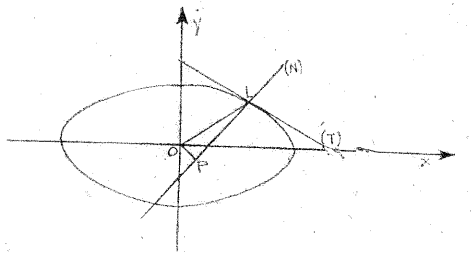


Fig. VI.6

7. $PQ=\sqrt{OP^2+OQ^2}$; $OP=x$; $OQ=\frac{b}{a}(a-x)$; $BQ=\frac{bx}{a}$;

$OQ=b-\frac{bx}{a}=\frac{b}{a}(a-x)$; $PQ=y=\sqrt{x^2+\frac{b^2}{a^2}(a-x)^2}$

(fig. VI.7 i)).

$$y'=\frac{x(a^2+b^2)-ab^2}{a\sqrt{a^2x^2+b^2(a-x)^2}};\ y'=0\Rightarrow x=\frac{ab^2}{a^2+b^2};$$

și atunci $PQ=y=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Valoarea obținută pentru $x \in (0, a)$ este pozitivă deoarece $a - x = \dfrac{a^3}{a^2 + b^2} > 0$, deci punctul P este între O și A.

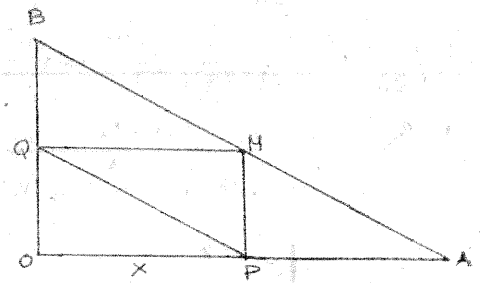


Fig. VI.7 i)

Tabloul de variație este:

x	0		$\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}$		b		a
y		$-$	0	$+$			
y'	b	$\searrow$	$\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\nearrow$	a		

Vezi graficul VI.7 ii)

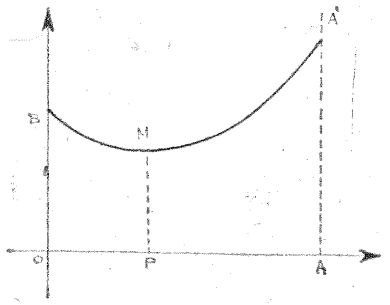


Fig. VI.7 ii)

Valorile B, M, A' reprezintă valorile succesive pe care le ia diagonala, atunci cînd punctul P parcurge dreapta OA.

8. Fie: $OA = a$, $OB = x$ (fig. VI.8).

i) Zona văzută din punctul A este: $S = 2\pi x \cdot DH$.

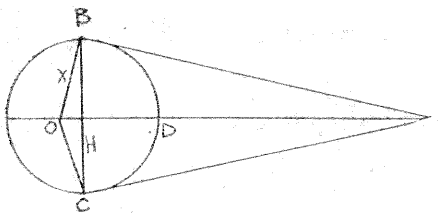


Fig. VI.8

În triunghiul OAB avem: $x^2 = OA \cdot OH = a \cdot OH$, deci $OH = \dfrac{x^2}{a}$ și $DH = x - \dfrac{x^2}{a} = \dfrac{x(a-x)}{a}$.

Deci $S = \dfrac{2\pi}{a} x^2(a - x)$; $S' = \dfrac{2\pi}{a} x(2a - 3x) \Rightarrow S' = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0$ și $x = \dfrac{2a}{3}$; $S'' = \dfrac{2}{a} \cdot 2(a - 3x) \Rightarrow S'' = 0 \Rightarrow x = \dfrac{a}{3}$.

x	0		$\dfrac{a}{3}$		$\dfrac{2a}{3}$		$+\infty$
S'	$+$	$+$		$+$	0	$-$	$-$
S	0		$\nearrow$		$\dfrac{8\pi a^2}{27}$	$\searrow$	$-\infty$
S''	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$

Vezi graficul VI.8 i).

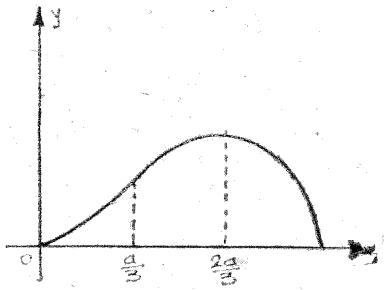


Fig. VI.8 i)

ii) $BC = 2BH = 2\sqrt{OB^2 - OH^2} = 2\sqrt{x^2 - \frac{x^4}{a^2}} =$

$= \frac{2}{a}\sqrt{x^2(a^2 - x^2)}$; $BC'(x) = \frac{2}{a}\cdot\frac{a^2x - 2x^3}{\sqrt{a^2x^2 - x^4}}$; $BC'(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0$ și $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

x	0			$\frac{a\sqrt{2}}{2}$			a
$BC'(x)$	0	+	+	0	−	−	
$BC(x)$	0	↗		a	↘		0

Vezi graficul VI.8 ii)

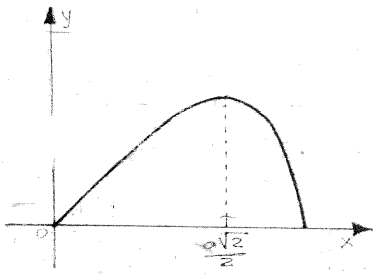


Fig. VI.8 ii)

iii) Volumul segmentului sferic BCD, de înălțime $DH = \frac{x(a-x)}{a}$ este:

$$V = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{x^2}{a^2}(a-x)^2\left(\frac{2a+x}{a}\right)x = \frac{\pi x^3}{a^2}(a-x)^2(2a+x);$$

$$V'(x) = \frac{2\pi x^2}{a^3}(a-x)(-x^2 - ax + a^2);\ V'(x) = 0 \Rightarrow x = 0,$$

$$x = a,\ x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

x	0		$\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$		a
$V'(x)$	0	+	0	−	0
$V(x)$	0	↗	$\frac{\pi a^3}{6}(5\sqrt{5} - 11)$	↘	0

Reamintesc: volumul segmentului sferic se poate obține și după formula:

$$V = \frac{\pi h}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2),$$

unde r_1 și r_2 sînt razele cercurilor de secțiune ale sferei cu două plane paralele, iar h este distanța între cele două plane.

iv) Suma volumelor conurilor ABC, OBC este:

$$V = \frac{\pi BH^2}{3}\cdot OH + \frac{\pi BH^2}{3}\cdot AH = \frac{\pi a}{3}\cdot BH^2.$$

Dar $BH^2 = x^2 - \frac{x^4}{a^2} = \frac{x^2(a^2 - x^2)}{a^2}$, deci

$$V(x) = \frac{\pi x^2}{3a}(a^2 - x^2);\ V'(x) = \frac{\pi}{3a}\cdot 2x(a^2 - 2x^2);$$

$$V''(x) = \frac{\pi}{3a}\cdot 2(a^2 - 6x^2).$$

x	0		$\frac{a\sqrt{6}}{6}$		$\frac{a\sqrt{2}}{2}$			a
$V'(x)$	0	+	+	+	0	−	−	
$V(x)$	0		↗		$\frac{\pi a^3}{12}$	↘		0
$V''(x)$		+	+	0	−	−	−	−

Vezi graficul VI.8.iv)

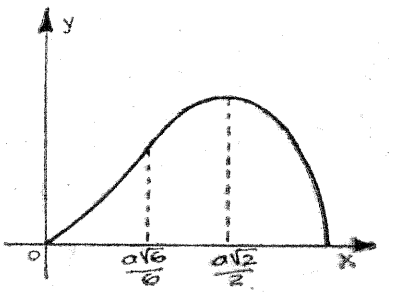


Fig. VI.8 iv)

v) Fie y raportul dintre suprafața laterală a conului și zona BCD atunci:

$$y = \frac{\pi \cdot BH \cdot AB}{2\pi x \cdot DH} = \frac{\dfrac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}}{2x \cdot \dfrac{x(a-x)}{a}} = \frac{a + x}{2x};$$

$$y' = -\frac{a}{2x^2} < 0.$$

x	0					a
y'		−	−	−	−	−
y	∞		↘			1

Vezi graficul VI.8 v).

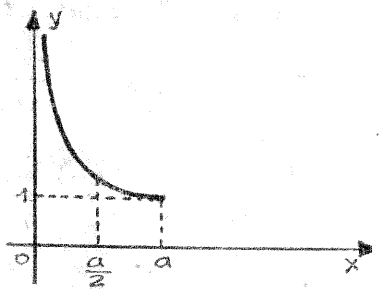


Fig. VI.8 v)

9. Fie punctul M de coordonate (x, y) (fig. VI.9). Octogonul are ca suprafață:

$S = 2(b + y)x + 2y(c - x)$, pentru P între O și F și $S = 2(b + y)x - 2y(x - c)$, pentru P între A și F.

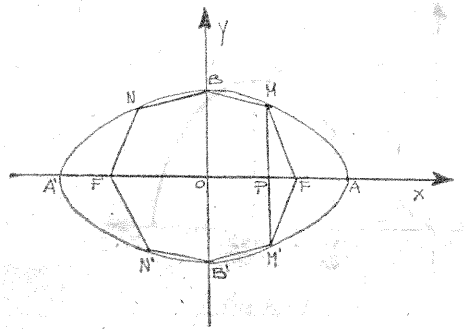


Fig. VI.9

Cele două expresii se reduc la:

$$S = 2(bx + cy);\ S = 2\left(bx + c\frac{b\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\right) =$$

$$= 2\frac{b}{a}\cdot(ax + c\sqrt{a^2 - x^2});\ S' = \frac{2b}{a}\left(a - \frac{cx}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right);$$

$$S' = 0 \Rightarrow x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

x	0			$\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+c^2}}$			a
$S'(x)$		+	+	0	−	−	
$S(x)$	$2bc$		↗	$2b\sqrt{a^2 + c^2}$		↘	$2ab$

Vezi graficul VI.9 a.

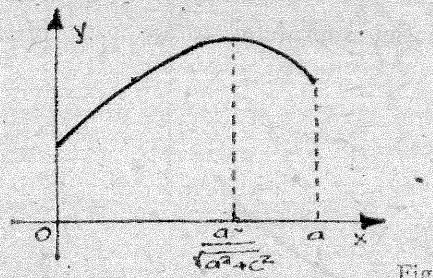


Fig. VI.9 a

10. Fie $AB = x$, volumul prismei este:

$V = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \cdot h$ (fig. VI.10 i)).

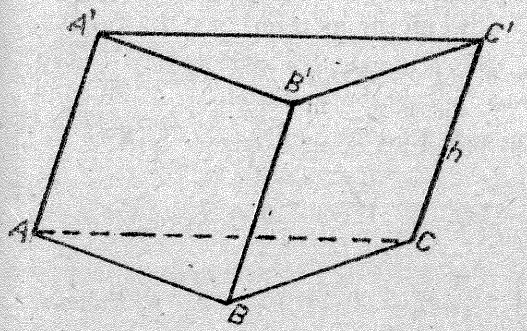


Fig. VI.10 i)

Suprafața totală este: $S(x) = 2\sigma_{\triangle ABC} + 3\sigma_{AA'B'B} =$

$= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 + 3 \cdot xh = \frac{\sqrt{3}}{2} x^2 + 3x \cdot \frac{4V}{\sqrt{3}\, x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{x^3 + 8V}{x}$.

$S'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2x^3 - 8V}{x^2}$. $S'(x) = 0 \Rightarrow x^3 = 4V \Rightarrow x = \sqrt[3]{4V}$.

$$S''(x) = \sqrt{3} \cdot \frac{x^3 + 8V}{x^3}.$$

x	0		$\sqrt[3]{4V}$		$+\infty$
$S'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	$+$
$S(x)$	∞	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3} \cdot 6}{\sqrt[3]{4}} \cdot V^{\frac{2}{3}}$	$\nearrow$	∞
$S''(x)$	$+$		$+$		$+$

Graficul variației suprafeței totale este prezentat în fig. VI.10 ii).

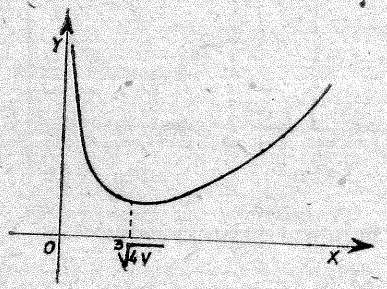


Fig. VI.10 ii)

11. Fie $\triangle ABC$ cu $AB \equiv AC = l$, baza $BC = 2x$ și înălțimea $AH = h$. Conform ipotezei $2p = 2l + 2x \Rightarrow l = p - x$.

$$h = \sqrt{l^2 - x^2} = \sqrt{p^2 - 2px}.$$

Volumul corpului este $V(x) = 2 \cdot \frac{\pi h^2 x}{3} = \frac{2p\pi}{3}(px - 2x^2)$.

$V'(x) = \frac{2p\pi}{3}(p - 4x)$. $V'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{p}{4} \Rightarrow l = \frac{3}{4}p$,

$$V\left(\frac{p}{4}\right) = \frac{\pi}{12} p^3. \quad V''(x) = -\frac{8p\pi}{3} < 0.$$

Tabloul de variație este:

x	0		$\frac{p}{4}$		∞
$V'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$V(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{12} p^2$	$\searrow$	$-\infty$
$V''(x)$	$-$		$-$		$-$

Graficul variației volumului este prezentat în fig. VI.11.

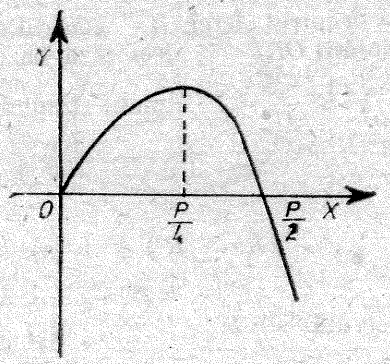


Fig. VI.11

Dimensiunile cerute sînt:

$$\text{Baza}_{\max} = 2x_{\max} = \frac{p}{2}$$

$$\text{Latura}_{\max} = l_{\max} = \frac{3}{4} p.$$

12. Fie înălțimea cilindrului egală cu $2x$ și raza sa $r = \sqrt{R^2 - x^2}$. Volumul cilindrului este:

$$V(x) = \pi(R^2 - x^2) \cdot 2x = 2\pi(-x^3 + R^2 x).$$

$$V'(x) = 2\pi(-3x^2 + R^2)$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} R$$

$$V''(x) = -12\pi x.$$

Tabloul de variație este:

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}R$		∞
$V'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$V(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4\sqrt{3}}{9}R^3$	$\searrow$	$-\infty$
$V''(x)$	0	$-$	$-$	$-$	

Înălțimea cerută este: $h_{max} = 2 \cdot x_{max} = \frac{2\sqrt{3}}{3} R$.

13. Fie O — centrul sferei, H — centrul cercului de bază al conului. Notăm $OH = x$, deci raza bazei conului este $r = \sqrt{R^2 - x^2}$. Volumul conului este:

$$V(x) = \frac{\pi r^2 (R + x)}{3} = \frac{\pi}{3}(-x^3 - Rx^2 + R^2x + R^3),$$

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}(-3x^2 - 2Rx + R^2). \quad V'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{R}{3}.$$

Înălțimea cerută este $h_{max} = R + x_{max} = R + \frac{R}{3} = \frac{4}{3} R$.

14. Fie $OM = x$, $MC = \sqrt{R^2 - x^2}$. Aria $\triangle ABC$ este

$$\sigma(x) = (x + R)\sqrt{R^2 - x^2}, \text{ unde } x \in [0, R].$$

$$\sigma'(x) = -\frac{2x^2 + Rx - R^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad \sigma'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{R}{2}.$$

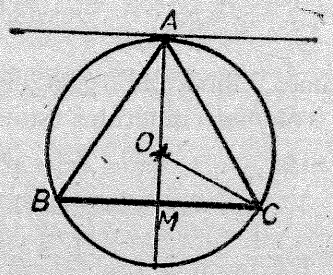


Fig. VI.14

Deci distanța de la coardă la punctul A este egală cu $R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2} R = \frac{3}{4}$ din diametrul cercului

15. Fie înălțimea $VO = x$.

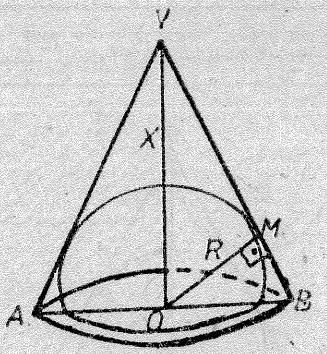


Fig. VI.15

Cum $\triangle VOM \sim \triangle OMB \Rightarrow \frac{OB}{VB} = \frac{OM}{VO} = \frac{MB}{OB} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{r}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{R}{x} \Rightarrow r = \frac{Rx}{\sqrt{x^2 - R^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(x) = \frac{\pi}{3} \cdot OB^2 \cdot x = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{x^3}{x^2 - R^2}, \quad x \in (R, \infty).$$

$$V'(x) = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{x^4 - 3R^2x^2}{(x^2 - R^2)^2}; \quad V'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3}R$$

$$V(\sqrt{3}R) = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi R^3; \quad V''(x) = \frac{2\pi R^4}{3} \cdot \frac{x^3 + 3x}{(x^2 - R^2)^3}.$$

x	R		$\sqrt{3}R$		∞
$V'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$V(x)$	∞	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi R^3$	$\nearrow$	∞
$V''(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	

Deci lungimea înălțimii cerute este $\sqrt{3}R$.

16. Fie r raza sferei înscrise. $AN \equiv AH = R$;

$SN = x - R \Rightarrow SO = \sqrt{(x-R)^2 + r^2}$ (fig. VI.16 i)).

$$\triangle SNO \sim \triangle SAH \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{SO}{SA} \Rightarrow \frac{r^2}{R^2} = \frac{SO^2}{SA^2} =$$

$$= \frac{(x-R)^2 + r^2}{x^2} \Rightarrow r^2 = \frac{R^2(x-R)}{x+R}.$$

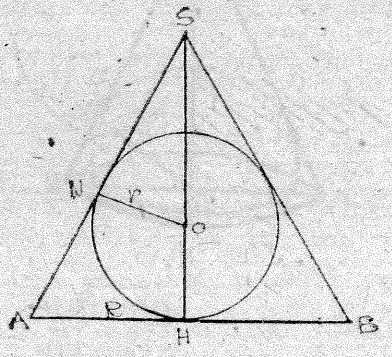


Fig. VI.16 i)

Fie V volumul conului și V' volumul sferei:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot SH = \frac{1}{3}\pi R^2 \sqrt{x^2 - R^2},$$

$$V' = \frac{4}{3}\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{(x-R)\sqrt{x-R}}{(x+R)\sqrt{x+R}}.$$

Fie $y = \frac{V}{V'} = \frac{(x+R)^2}{4R(x-R)}$.

Se observă că dacă $x - R = 0$, $r = 0$, $y \Rightarrow \infty$ deci $x \neq R$.

$$y' = \frac{1}{4R} \cdot \frac{x^2 - 2Rx - 3R^2}{(x-R)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x' = -R \\ x'' = 3R. \end{cases}$$

Tabloul de variație este:

x	$-\infty$		$-R$		R		$3R$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ / $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Vezi graficul VI.16 ii)

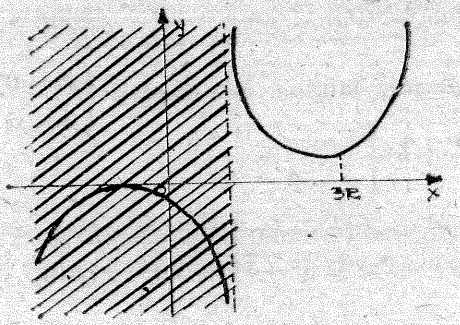


Fig. VI.16 ii)

Evident, x este un segment pozitiv, iar graficul funcției va fi citit pe intervalul (R, ∞).

Pentru a obține valorile lui x cerute, din ecuația $y = \frac{(x+R)^2}{4R(x-R)}$, obținem:

$$f(x) \equiv x^2 - 2R(2y-1)x + R^2(1+4y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = R\left[2y - 1 \pm 2\sqrt{y(y-2)}\right].$$

Observație: discutînd ecuația precedentă, vom obține: $y(y-2) \geqslant 0 \Rightarrow y \geqslant 2$, deoarece $y \geqslant 0$; $f(R) = 4R^2$; $f(3R) = 8R^2(2-y)$. Cum $y \geqslant 2$, $f(3R) \leqslant 0$, deci o rădăcină este cuprinsă între R și $3R$, iar cealaltă între R și $+\infty$.

Pentru $y = 2 \Rightarrow x' = x'' = 3R$.

17. i) (Fig. VI.17). Aria suprafeței K este: $S = S_1 + S_2 = 2\pi rh + \pi r^2 + 2\pi r^2$.

Cum $h + r = a \Rightarrow S(r) = \pi r^2 + 2\pi ra$.

Se observă că h și r iau valori între 0 și a.

$S'(r) = 2\pi r + 2\pi a$; $S'(r) = 0 \Rightarrow r = -a$; $S''(r) = 2\pi > 0$.

Tabloul de variație este:

r	0		a
$S'(r)$	$+$	$+$	$+$
$S(r)$	0	$\nearrow$	$3\pi a^2$
$S''(r)$	$+$	$+$	$+$

Deci valoarea minimă este pentru $\begin{cases} r = 0 \\ h = a \end{cases}$ și valoarea maximă pentru $\begin{cases} r = a \\ h = 0. \end{cases}$

ii) $S(r, h) = 2\pi rh + 3\pi r^2$, iar $a^2 = h^2 + r^2$.

Deci $S(r) = 2\pi r\sqrt{a^2 - r^2} + 3\pi r^2$; $r \in [0, a]$;

$$S'(r) = 2\pi\sqrt{a^2 - r^2} + 2\pi r \frac{-r}{\sqrt{a^2 - r^2}} + 6\pi r \Rightarrow S'(r) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\pi a^2 - 4\pi r^2 + 6\pi r\sqrt{a^2 - r^2} = 0.$$

$$(2r^2 - a^2)^2 = 9r^2(a^2 - r^2) \Rightarrow 13r^4 - 13a^2r^2 + a^4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{1}{26}\left(13 \pm \sqrt{169 - 52}\right) a^2.$$

Soluțiile pozitive ale ecuației bipătrate sînt:

$$r_1 = a\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{117}}{26}},\ r_2 = a\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{117}}{26}}.$$

Tabloul de variație este:

x	0		r_1			r_2			a
$S'(r)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$S(r)$	0	$\nearrow$	$S(r_1)$ (max)		$\searrow$	$S(r_2)$ (min)	$\nearrow$		$3\pi a^2$

Deci aria totală are valori maxime în: $r = r_1$ și $r = a$ și valori minime în punctele $r = 0$ și $r = r_2$. Se observă că în punctele $r = 0$ și $r = a$, deși puncte de extrem derivata $S'(r)$ nu se anulează

iii) Volumul corpului K este:

$$V = V_1 + V_2 = \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3, \text{ iar } r + h = a.$$

Deci $V(r) = \pi r^2(a - r) + \frac{2}{3}\pi r^3$, $r \in [0, a]$;

$$V'(r) = 2\pi r(a - r) - \pi r^2 + 2\pi r^2;$$

$$V'(r) = 0 \Rightarrow 2\pi ra - \pi r^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 2a \end{cases}$$

$$V''(r) = 2\pi a - 2\pi r = 2\pi(a - r).$$

Tabloul de variație este:

r	0				
$V'(r)$	0	$+$	$+$	$+$	
$V(r)$	0	$\nearrow$			$\frac{2}{3}\pi a^3$
$V''(r)$	$2\pi a$	$+$	$+$	$+$	0

Volumul corpului are un minim pentru $r = 0$ și un maxim pentru $r = a$. În punctul $r = a$, derivata nu se anulează.

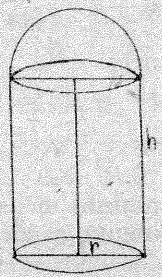


Fig. VI.17

18. Fie S suprafața corpului obținut: $S = S_1 + S_2 + S_3$, unde $S_1 = \pi r^2$ (aria bazei cilindrului), $S_2 = 2\pi rh$ (aria suprafeței laterale a cilindrului), $S_3 = 4\pi Rh$ (aria calotei) (fig. VI.18 i)).

$r^2 = R^2 - (2h - R)^2 = 4h(R - h)$, de unde rezultă:

$$S(h) = 4\pi h(R - h) + 4\pi h\sqrt{h(R - h)} + 4\pi Rh.$$

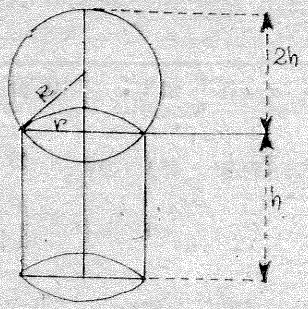


Fig. VI.18 i)

Funcția $S(h)$ este definită pe $(0, R)$.

$$S'(h) = 8\pi(R - h) + 2\pi\,\frac{3hR - 4h^2}{\sqrt{h(R-h)}};$$

$$S'(h) = 0 \Rightarrow 4(R - h)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{h}\,(3R - 4h) = 0.$$

Cum $R - h \geqslant 0$ atunci derivata nu admite rădăcini decît în intervalul $\left(\frac{3}{4}R,\ R\right)$. În acest interval avem:

$$4(R - h)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{h}\,(4h - 3R)$$

și ridicînd la putere obținem:

$$16(R - h)^3 = h(4h - 3R)^2.$$

Sau: $f(h) = 32h^3 - 72Rh^2 + 57R^2h - 16R^3 = 0$;
$f'(h) = 96h^2 - 144\,Rh + 57R^2 = 0$.

Ecuația $f'(x) = 0$ nu admite nici o rădăcină reală, deci ecuația $f(h) = 0$ are o singură rădăcină reală $h \in (0, R)$, deoarece $f(0) \cdot f(R) < 0$, așa cum se vede din calculul:

$$f(0) < 0,\ f(R) = 89R^3 - 88R^3 = R^3 > 0.$$

Cum $S'(R - 0) > 0$ și $S'(R - 0) < 0$, în acest punct $S(h)$ are un maxim.

Tabloul de variație este:

h	0		h_1		R
$S'(h)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$S(h)$	0	$\nearrow$	max	$\searrow$	$4\pi R^2$

Vezi graficul VI.18 ii).

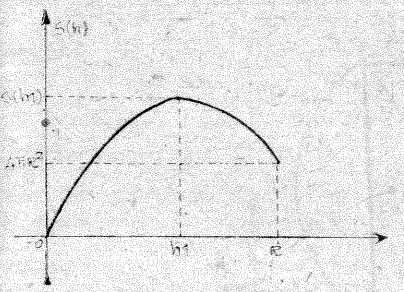


Fig. VI.18 ii)

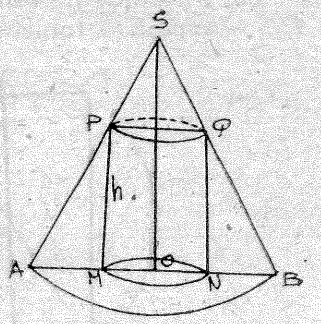


Fig. VI.19

19. $MO \equiv ON \triangleq x$; $AO = OB = r$; $SO = r$; $AS = r\sqrt{2}$; $MP \equiv NQ \triangleq h$ (fig. VI.19).

Aria totală a conului este:

$$\pi r^2\sqrt{2} + \pi r^2 = \pi a^2 \Rightarrow r = \frac{a}{\sqrt{1 + \sqrt{2}}},\ a > 0;$$

$$h = r - x = \frac{a}{\sqrt{1 + \sqrt{2}}} - x.$$

Volumul cilindrului înscris în con este:

$$V(x) = \pi x^2\left(\frac{a}{\sqrt{1 + \sqrt{2}}} - x\right);$$

$$V'(x) = \pi\left(2x\,\frac{a}{\sqrt{1 + \sqrt{2}}} - 3x^2\right);$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{a}{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}.$$

Pentru $x_1 = 0 \Rightarrow V = 0$ (minim);

$$V''(x) = \pi\left(\frac{2a}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} - 6x\right);$$

ar $V''(x_2) < 0$; deci în punctul x_2, V are un maxim și:

$$V(x_2) = \frac{4\pi}{27}\cdot\frac{a^2}{(1+\sqrt{2})^{3/2}}.$$

20. Fie: x — raza bazei cilindrului, $2y$ — înălțimea și $2\pi S$ — suprafața totală a cilindrului (fig. VI.20 i)).

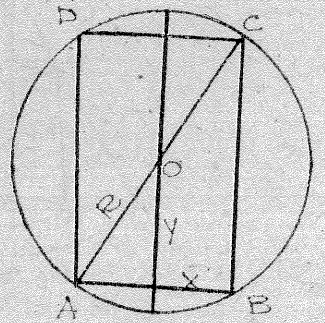


Fig. VI.20 i)

Vom avea: $2\pi S = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot 2y \Rightarrow$

$$\Rightarrow S(x) = x(x+2y) = x\left(x + 2\sqrt{R^2 - x^2}\right).$$

Din triunghiul dreptunghic OLC am obținut:

$$y^2 = R^2 - x^2.$$

Studiul primei derivate:

$$S'(x) = 2\,\frac{x\sqrt{R^2 - x^2} + R^2 - 2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \text{ cu } R^2 - x^2 > 0;$$

$S'(x) = 0 \Rightarrow x\sqrt{R^2 - x^2} = 2x^2 - R^2$; ridicînd la putere ecuația irațională și ordonînd termenii după puterile descrescătoare ale lui x, obținem ecuația:

$$5x^4 - 5R^2x^2 + R^4 = 0 \Rightarrow x_1^2 = \frac{R^2(5+\sqrt{5})}{10};$$

$$x_2^2 = \frac{R^2(5-\sqrt{5})}{10}.$$

Se observă că x_2^2 este o rădăcină străină, introdusă prin ridicarea la pătrat a ecuației iraționale; deci pentru x_1^2 care este rădăcina adevărată a ecuației iraționale, obținem valoarea extremă a funcției $S(x)$:

$$S_1 = \frac{R^2(1+\sqrt{5})}{2}.$$

Tabloul de variație al funcției $S(x)$ este:

x	0		$\frac{R\sqrt{5}}{5}$		$R\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$		R
$S'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$S(x)$	0	$\nearrow$	R^2	$\nearrow$	S_1	$\searrow$	R^2

Vezi graficul VI.20 ii).

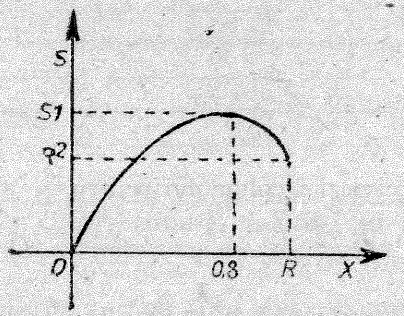


Fig. VI.20 ii)

21. Fie $f(x) = \frac{V_{con}}{V_{sferă}} = \frac{(x+R)^2}{4R(x-R)}$ pentru $x \in (R, \infty)$.

$$f'(x) = \frac{(x+R)(x-3R)}{4R(x-R)^2}, \quad f''(x) = \frac{2R}{(x-R)^3}.$$

x	R		$3R$		∞
$f'(x)$		$-$ $-$	0	$+$ $+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		$+$ $+$	$+$	$+$	

Minimul cerut este deci $f(3R) = 2$.

22. Fie $OM = x$; $V(x) = \frac{\pi}{3}(R^2 - x^2)(a - x)$ pentru $x \in (-R, R)$. Valoarea măsurii segmentului $MP = a \pm OM$, semnul minus corespunzînd cazului cînd M este situat între O și P, iar semnul plus în caz contrar.

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}(3x^2 - 2ax - R^2)$$

$$V''(x) = \frac{2\pi}{3}(3x - a)$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow x' = \frac{a - \sqrt{a^2 + 3R^2}}{3} \text{ și}$$

$$V(x_{max}) = V_{max} = \frac{2\pi}{81}\left(9aR^2 + \sqrt{(a^2 + 3R^2)^3} - a^3\right).$$

x	$-R$		x'		0		$\frac{a}{3}$		R
$V'(x)$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$V(x)$	0	$\nearrow$	V_{max}		$\searrow$				0
$V''(x)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	$+$

Graficul variației volumului pentru $\frac{a}{3} < R$ este prezentat în figura VI.22.

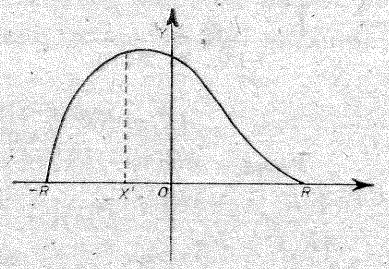


Fig. VI.22

Cum $a > R$, pentru determinarea punctelor de inflexiune vom analiza cazurile $\frac{a}{3} < R$, $\frac{a}{3} = R$, $\frac{a}{3} > R$.

23. Viteza și accelerația sînt definite ca: $v = \frac{dx}{dt} = 4(t^3 - 6t^2 + 9t - n)$ — derivata spațiului în raport cu timpul; $a = \frac{dv}{dt} = 12(t^2 - 4t + 3)$ — derivata vitezei în raport cu timpul.

Derivata accelerației: $a' = \frac{da}{dt} = 24(t - 2)$, deci $a' = 0 \Rightarrow t = 2$; $a = 0 \Rightarrow t = 1$ și $t = 3$.

Tablourile de variație sînt:

t	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$v' = a$		$+$	0	$-$	0	$+$	
v	$-\infty$	$\nearrow$	$4(4 - n)$	$\searrow$	$-4n$	$\nearrow$	$+\infty$

t	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
a'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
a	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-12	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b) Pentru a trasa curba ce reprezintă viteza v, vom considera mai multe cazuri, urmînd valorile remarcabile 0 și 4 ale parametrului n corespunzînd maximului și minimului vitezei.

În toate cazurile, curba are un punct de inflexiune pentru $t = 2$.

i) $n < 0$ maximul și minimul vitezei sînt pozitive, curba intersectează axa Ox o singură dată.

ii) $n = 0$ maximul vitezei este egal cu 16, minimul este nul, graficul intersectează axa Ox o dată, apoi este tangent axei în $x = 3$.

iii) $0 < n < 4$ maximul vitezei este pozitiv, minimul este negativ, iar curba intersectează axa Ox în 3 puncte distincte.

iv) $n = 4$ maximul vitezei este nul, minimul este egal cu -16. Curba este tangentă axei Ox în punctul de abscisă 1, apoi el intersectează axa Ox încă o dată.

v) $n > 4$ maximul și minimul vitezei sînt negative. Curba intersectează axa Ox o singură dată.

Vezi graficele VI.23 i), ii), iii), iv), v).

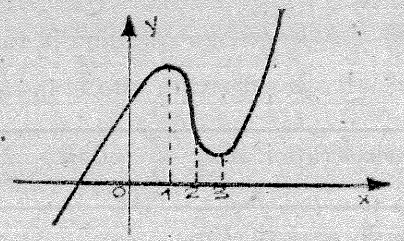


Fig. VI.23 i)

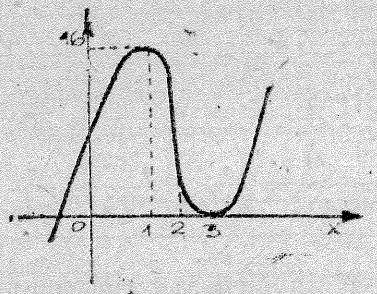


Fig. VI.23 ii)

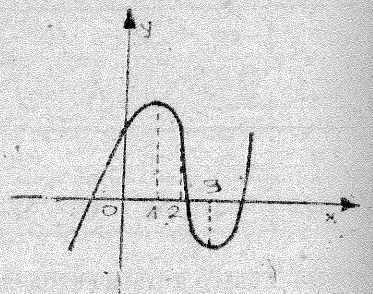


Fig. VI.23 iii)

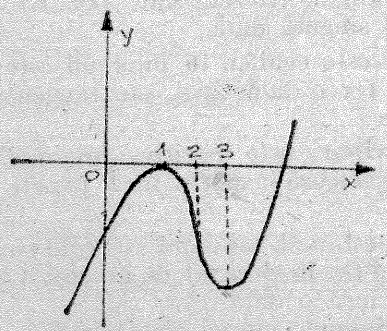


Fig. VI.23 iv)

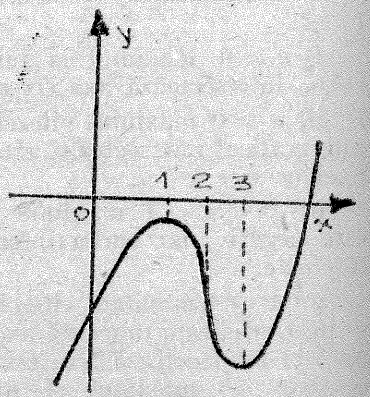


Fig. VI.23 v)

24. Fie $AC=b$, $MI \perp AB$, $CM \equiv HI = x$ (fig. VI.24 i).

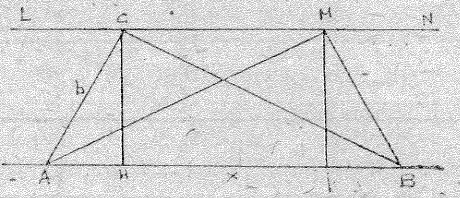


Fig. VI.24 i)

Atunci: $MA^2 = MI^2 + AI^2 =$

$$= b^2 - \frac{a^2}{4} + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 = x^2 + ax + b^2.$$

$$MB^2 = MI^2 + IB^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = x^2 - ax + b^2.$$

Fie y intensitatea luminoasă primită de punctul M, atunci $y = \frac{1}{MA^2} + \frac{1}{MB^2}$; înlocuind valorile segmentelor MA și MB obținem:

$$y = \frac{2(x^2 + b^2)}{x^4 + (2b^2 - a^2)x^2 + b^4},$$

$$y' = \frac{4x[x^4 + 2b^2x^2 + b^2(b^2 - a^2)]}{[x^4 + (2b^2 - a^2)x^2 + b^4]^2}.$$

$$y' = 0 \Rightarrow \text{a)}\ x = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{2}{b^2}$$

$$\text{b)}\ x^4 + 2b^2x^2 + b^2(b^2 - a^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^2 = -b(a + b) < 0$$

$$\Rightarrow x_2^2 = b(a - b).$$

Deci x_1^2 nu convine; x_2 convine numai dacă $a > b$, deci $x_{3,4} = \pm\sqrt{b(a-b)}$, iar valorile lor corespunzătoare sînt:

$$y_{1,2} = \frac{2}{a(2b - a)}.$$

Fie $a > b$. Tabloul de variație este:

x	$-\infty$		x_3		0		x_4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	y_1	$\searrow$	y_0	$\nearrow$	y_2	$\searrow$	0

Vezi graficul VI.24 ii).

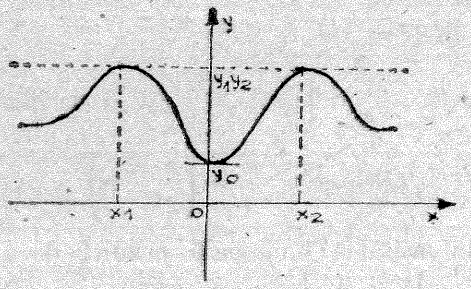


Fig. VI. 24 ii)

Fie $b \geq 0$. Tabloul de variație este:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	y_0	$\searrow$	0

Vezi graficul VI.24 iii).

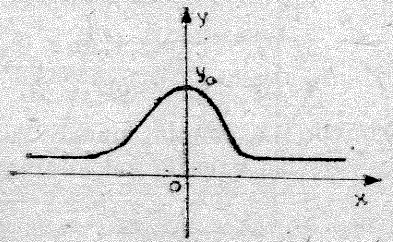


Fig. VI.24 iii)

25. Fie l lungimea vasului și x unghiul format de direcția vasului cu malul rîului. (vezi fig. VI.26).

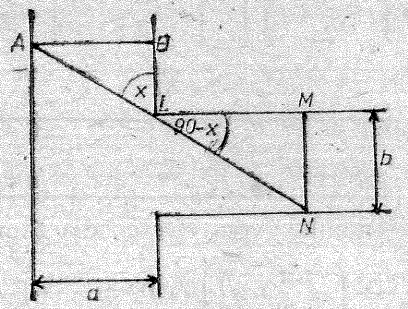


Fig. VI.26

$$\sin x = \frac{a}{AL};\quad \sin(90 - x) = \frac{b}{LN} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l(x) = AL + LN = \frac{a}{\sin x} + \frac{b}{\cos x}.$$

$$l'(x) = \frac{-a\cos^3 x + b\sin^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$l'(x) = 0 \Rightarrow x = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \text{ și}$$

$$l(x_{\max}) = l_{\max} = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Reamintesc formulele de calcul:

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\pm\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Fie $\sin(\operatorname{arctg} x) = a$ și $\operatorname{arctg} x = b$

cu $x = \operatorname{tg} b \Rightarrow a = \sin b = \dfrac{\operatorname{tg} b}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 b}} = \dfrac{x}{\pm\sqrt{1 + x^2}}$;

iar pentru determinarea semnului, vom efectua diagrama compunerii:

$$\mathbf{R} \xrightarrow{\text{ar tg}} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cap \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \xrightarrow{\sin} [-1, 1]$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\sin \circ \text{ar tg}}$$

Fie $\cos(\text{arctg } x) = a$ și $\text{arctg } x = b$ cu $x = \text{tg } b \Rightarrow$ $\Rightarrow a = \cos b = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1 + \text{tg}^2 b}} = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1 + x^2}}$, iar pentru determinarea semnului, vom efectua diagrama compunerii:

$$\mathbf{R} \xrightarrow{\text{arctg}} \underbrace{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cap [0, \pi]} \xrightarrow{\cos} [-1, 1]$$

$$\mathbf{R} \xrightarrow{\text{arctg}} \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{\cos} [0, 1].$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\cos \circ \text{arctg}}$$

26. Fie x — distanța de la sursă la pistă și fie d — distanța de la sursă la punctul curent M. Atunci intensitatea luminii este:

$$I(x) = \frac{\sin \theta}{d^2} = \frac{x}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}; \qquad I'(x) = \frac{-2x^2 + R^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

$$I'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} R.$$

Deci intensitatea maximă este $I_{\max} = \dfrac{2\sqrt{3}}{9} \cdot \dfrac{1}{R^2}$.

27. Vezi fig. VI.27.

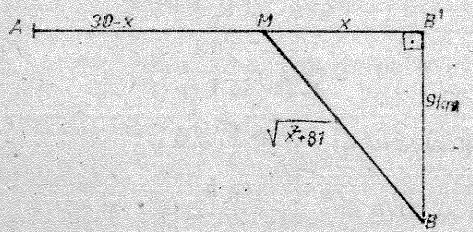


Fig. VI.27

Fie $x = B'M \in [0, 30]$, B' corespunde lui $x = 0$ iar A lui $x = 30$. Costul transportului este $C(x) = \alpha(30 - x) + \beta\sqrt{x^2 + 81}$.

$$C'(x) = \frac{\beta x - \alpha\sqrt{x^2 + 81}}{\sqrt{x^2 + 81}}; \quad C'(x) = 0 \Rightarrow x' = \frac{9\alpha}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}$$

și $C(x') = 30\alpha + 9\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$; $C''(x) = \dfrac{81\beta}{(x^2 + 81)^{3/2}}$.

x	0		x'		30
$C'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$C(x)$	$30\alpha + 9\beta$	$\searrow$	$C(x')$	$\nearrow$	$\beta\sqrt{981}$
$C''(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Dacă $x' < 30$ punctul de racordare este M, pentru care $B'M = \dfrac{9\alpha}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}$.

Dacă $x' \geq 30$, cum $C(x)$ este funcție descrescătoare pe orice interval pozitiv și mai mic decît x', minimul costului pe $[0, 30]$ este atins în punctul A. Dacă $x' = 0$ adică $\alpha = 0$, punctul de racordare este în B'.

CAPITOLUL VII

INTEGRALE. FUNCȚII INTEGRABILE ÎN SENS RIEMANN

PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

1. Funcția $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ se numește *integrabilă* în sens Riemann dacă există un număr real I_f cu proprietatea că $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta_\varepsilon > 0$ astfel încît oricare ar fi diviziunea $\Delta = (x_0, x_1, ..., x_n)$ a intervalului a, b cu norma diviziunii $\| \Delta \| < \eta_\varepsilon$ și orice puncte intermediare $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$ are loc inegalitatea: $|\sigma_\Delta(f, \xi) - I_f| < \varepsilon$, iar numărul I_f se numește integrala sau integrala definită a funcției f pe intervalul $[a, b]$.

Clase de funcții integrabile:

— Orice funcție monotonă este integrabilă.

— Orice funcție continuă este integrabilă.

1°) *Există funcții integrabile* (cîteva exemple elementare):

i) $f:\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Pentru orice diviziune $\Delta = \left(0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = \frac{\pi}{4}\right)$ a intervalului $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ și orice sistem $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ de puncte intermediare avem $\sigma_\Delta(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) =$

$= \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{tg} \xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} (\ln \cos x_i - \ln \cos x_{i-1}) -$

$- \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{tg} c_i)(x_i - x_{i-1}) \Leftrightarrow \sigma_\Delta(f, \xi) - \left(\ln \cos 0 - \ln \cos \frac{\pi}{4}\right) =$

$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\cos^2 \theta_i}(x_i - x_{i-1})(\xi_i - c_i) \Leftrightarrow \left|\sigma_\Delta(f, \xi) - \left(-\ln \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| \leqslant$

$\leqslant 2(b - a)\| \Delta \| \Leftrightarrow \left|\sigma_\Delta(f, \xi) + \frac{1}{2} \ln 2\right| \leqslant 2(b - a)\| \Delta \|.$

Deci pentru orice $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ dacă luăm $\delta_\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ astfel încît $0 < \delta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2(b - a)}$ atunci din inegalitatea precedentă, rezultă că pentru orice Δ cu $\| \Delta \| < \delta_\varepsilon$ și orice sistem ξ de puncte intermediare avem

$$\left|\sigma_\Delta(f, \xi) - \left(-\frac{1}{2} \ln 2\right)\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \, dx = -\frac{1}{2} \ln 2;$$

ii) $f:[-1, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}$.

Este evident că f admite primitiva $F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} + 1) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} - 1)$. Pentru orice diviziune Δ a intervalului $[-1, 1]$ și orice sistem de puncte intermediare ξ avem:

$$\sigma_\Delta(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) - \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + F(1) - F(-1) - F'(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

unde am aplicat formula creșterilor finite funcției F pe fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$. Prin urmare:

$$\sigma_\Delta(f, \xi) - (F(1) - F(-1)) = \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i) - F'(c_i))(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i) - f(c_i))(x_i - x_{i-1}).$$

Aplicăm acum formula creșterilor finite funcției f pe fiecare interval $[\min(\xi_i, c_i), \max(\xi_i, c_i)] = [u_i, v_i]$ și rezultă $f(\xi_i) - f(c_i) = f'(\theta_i)(\xi_i - c_i)$, unde $\theta_i \in (u_i, v_i)$ și atunci $|\sigma_\Delta(f, \xi) - (F(1) - F(-1))| \leqslant \| \Delta \| \cdot \max_{x \in [-1, 1]} |f'(x)| \cdot (b - a) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\sigma_\Delta(f, \xi) - \sqrt{2}(\operatorname{arctg}(\sqrt{2} + 1) + \operatorname{arctg}(\sqrt{2} - 1))| \leqslant$

$\leqslant \| \Delta \| \cdot \max_{x \in [-1, 1]} |f'(x)| \cdot (b - a).$

Deci, dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ luăm $\delta_\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ astfel încît $0 < \delta_\varepsilon < \dfrac{\varepsilon}{(b-a)\max\limits_{x\in[-1,\,1]} |f'(x)|}$ atunci din inegalitatea precedentă rezultă că pentru orice Δ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ și orice sistem ξ de puncte intermediare avem

$$|\sigma_\Delta(f,\ \xi) - \sqrt{2}(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1) + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1))| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx = \sqrt{2}\,[\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1) + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)];$$

iii) $f : \left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R},\ f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$;

Funcția $F : \left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R},\ F(x) = -\operatorname{arctg}\cos x$ este o primitivă a lui f pe intervalul $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$. Procedăm ca la ii) și obținem $\sigma_\Delta(f,\ \xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i')(x_i - x_{i-1}) +$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) - \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) \Leftrightarrow \sigma_\Delta(f,\ \xi) -$$

$$- F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F(0) = \sum_{i=1}^{n} f'(0_i)(\xi_i' - c_i)(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow \left|\sigma_\Delta(f,\ \xi) - \frac{\pi}{4}\right| \leqslant \|\Delta\| \cdot (b-a) \cdot \max_{x\in\left[0,\,\frac{\pi}{2}\right]} |f'(x)| \text{ de unde rezultă}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi}{4};$$

2°) *Există funcții neintegrabile* (cîteva exemple elementare):

i) funcția lui Dirichlet nu este integrabilă

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x \in \mathbf{Q} \\ 0 \text{ dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$ și fie $x \in [0,\ 1]$

Fie două șiruri de puncte intermediare ξ_i' rațional, ξ_i'' irațional $\in [x_{i-1},\ x_i]$ atunci $g(\xi_i') = 1,\ g(\xi_i'') = 0\ (1 \leqslant i \leqslant n)$ deci $\sigma_\Delta(f,\ \xi_i') = 1$

$\sigma_\Delta(f,\ \xi_i'') = 0.$

Dacă f ar fi integrabilă, atunci ar exista $I_f \in \mathbf{R}$ care ar verifica condițiile definiției, deci:

$$\left.\begin{array}{l} |\sigma_\Delta(f,\ \xi_i') - I_f| < \varepsilon \Rightarrow |1 - I_f| < \varepsilon \\ |\sigma_\Delta(f,\ \xi_i'') - I_f| < \varepsilon \Rightarrow |0 - I_f| < \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = |1 - I_f + I_f| \leqslant |1 - I_f| + |I_f| < 2\varepsilon = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{1}{2} \text{ fals pentru orice } 0 < \varepsilon < \frac{1}{4}.$$

ii) $g : [0,\ 1] \to \mathbf{R},\ g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^\alpha} & \text{dacă } x \in (0,\ 1] \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$

g nu este mărginită pentru $\alpha > 0$, deci nu este integrabilă.

Proprietăți:

a) Orice funcție integrabilă este mărginită

b) Numărul I_f asociat fiecărei integrale este unic determinat de funcția f.

iii) $f(x) = \begin{cases} x \text{ dacă } x \in \mathbf{Q} \\ -x \text{ dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$ cu $f : [0,\ 1] \to \mathbf{R}$

nu este integrabilă.

Fie $\Delta : (0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} = 1)$ o diviziune arbitrară a intervalului $[0,\ 1]$ și două șiruri de puncte intermediare:

$$\left.\begin{array}{l} \xi_i' \text{ puncte raționale} \\ \xi_i'' \text{ puncte irraționale} \end{array}\right\} \in [x_i,\ x_{i+1}],\ (0 \leqslant i \leqslant n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_\Delta(f,\ \xi') = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i'(x_i - x_{i-1}) \\ \sigma_\Delta(f,\ \xi'') = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i''(x_i - x_{i-1}). \end{cases}$$

Dar $\sigma_\Delta(f,\ \xi')$ este suma integrală corespunzătoare funcției $g_1(x) = x$ pentru $x \in [0,\ 1]$ și cum $g_1(x) = x$ este integrabilă, tinde către $\int_0^1 x\,dx = \dfrac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2}$, cînd norma diviziunii

tinde către 0. Dar $\sigma_\Delta(f, \xi'')$ este suma integrală corespunzătoare funcției $g_2(x) = -x$ pentru $x \in [0, 1]$ și tinde către $\int_0^1 (-x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}$, cînd norma diviziunii tinde către 0. Cum limita sumelor integrale depinde de alegerea punctelor ξ_i, rezultă că funcția nu este integrabilă.

3°) *Dacă f, g sînt funcții neintegrabile atunci este posibil ca $f+g$, $f-g$, fg, $f \circ g$ să fie integrabile:*

i) $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ cu

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x \in \mathbf{Q} \\ -1 \text{ dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -1 \text{ dacă } x \in \mathbf{Q} \\ 1 \text{ dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

$(f+g)(x) = 0$ pentru $\forall x \in \mathbf{R}$, deci este integrabilă fiind funcția constantă.

$(f \cdot g)(x) = -1$ pentru $\forall x \in \mathbf{R}$, deci este integrabilă, cu toate că funcțiile f, g nu sînt integrabile, de exemplu:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x \in \mathbf{Q}, \\ -1 \text{ dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}, \quad x \in [a, b]$$

fie diviziunea $\Delta : (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$, avem

$$\sigma_\Delta(f, \xi) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = b - a \quad \text{pentru } \xi_i \in \mathbf{Q} \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)(x_i - x_{i-1}) = a - b \text{ pentru } \xi_i \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \end{cases}$$

cum limita sumelor integrale depinde de alegerea punctelor ξ_i, funcția nu este integrabilă.

ii) Este posibil ca funcția f să nu fie integrabilă dar funcția $|f|$ să fie integrabilă, cum ar fi de exemplu:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x \in \mathbf{Q} \\ -1 \text{ dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

$$|f(x)| = 1 \text{ pentru } \forall x \in \mathbf{R}.$$

4°) *Există funcții integrabile care nu admit primitive:*

i) fie $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} \text{ dacă } x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

fiind nemărginită, nu este integrabilă, dar funcția

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} \text{ dacă } x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0 \qquad\qquad\quad \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

este derivabilă și $F' = f$, adică f admite primitive.

ii) $f : [0, 1] - \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } 0 \leqslant x < \frac{1}{2} \\ 1 \text{ dacă } \frac{1}{2} \leqslant x < 1 \end{cases}$

este funcție integrabilă, dar nu posedă primitive. Calculăm $\sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n) \xrightarrow[\|\Delta\| \to 0]{} \frac{1}{2}$ pentru orice șir de puncte $\xi_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n]$; f nu posedă primitive deoarece f nu are *proprietatea lui Darboux: $f([0, 1]) = \{0, 1\}$* care nu este un interval ci este o mulțime.

iii) $\operatorname{sgn} : \mathbf{R} \to \{-1, 0, 1\}$ nu admite primitive pe $[-1, 1]$ deoarece nu are *proprietatea lui Darboux*, dar este integrabilă pe intervalul $[-1, 1]$ și $\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x \cdot \mathrm{d}x =$

$$= \int_{-1}^{0} (-1)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} 1 \cdot \mathrm{d}x = 0.$$

5°). *Există funcții care admit primitive dar care nu sînt integrabile, de exemplu:*

fie $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cdot \cos \frac{1}{x^2} \text{ dacă } x \in (0, 1] \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

f admite primitivă funcția $F : [0, 1] \to \mathbf{R}$ cu

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} \text{ dacă } x \in (0, 1] \\ 0 \qquad\qquad\quad \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

care nu este integrabilă, deoarece este nemărginită în $x = 0$. Este suficient să considerăm șirul $x_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$ convergent către 0, atunci $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$.

Să se calculeze următoarele integrale, folosind metoda integrării prin părți:

2. $\int \frac{x \cdot e^{\arcsin x}}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\,dx; \quad x \in (-1, 1).$

3. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}\,dx; \quad x \in (0, \infty).$

4. $\int x^2 \cdot e^x \cdot \sin x\,dx; \quad x \in \mathbf{R}.$

5. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx; \quad x \in \mathbf{R}.$

6. $\int \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)dx; \quad x \in \mathbf{R}.$

7. $\int x^2 e^{3x}\,dx; \quad x \in \mathbf{R}.$

8. $\int \ln^2 x\,dx; \quad x \in (0, \infty).$

9. $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}; \quad x \notin \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}.$

10. $\int e^x \sin x\,dx; \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$

11. $\int \sin(\ln x)\,dx; \quad x \in (0, \infty).$

12. $\int x^2 \operatorname{arctg} 3x\,dx; \quad x \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right).$

13. $\int x(\operatorname{arctg} x)^2\,dx; \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$

14. $\int \cos^2(\ln x)\,dx; \quad x \in (0, \infty).$

Să se calculeze următoarele integrale, folosind metoda schimbării de variabilă:

15. $\int \frac{2x+3}{2x+1}\,dx; \quad x \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}.$

16. $\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx; \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}.$

17. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx; \quad x \in \mathbf{R}.$

18. $\int \frac{ax+b}{a^2x^2+b^2}\,dx; \quad x \in \mathbf{R}.$

19. $\int \frac{dx}{2^x+3}; \quad x \in \mathbf{R}.$

20. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx; \quad x \geq 1.$

21. $\int \frac{dx}{x \ln x}; \quad x > e.$

22. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}\,dx; \quad x \in \left(\frac{1}{e}, \infty\right).$

23. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx; \quad x \in (0, \infty).$

24. $\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{a}}; \quad x \notin \{ak\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}.$

25. $\int \frac{dx}{\cos\frac{x}{a}}; \quad x \notin \left\{\pm\frac{a\pi}{2} + 2ak\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$

26. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$; $x \in (-\pi, \pi)$.

27. $\int \frac{\cos ax}{\sin^5 ax}\,\mathrm{d}x$; $x \notin \left\{\frac{k\pi}{a} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$.

28. $\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^8}}$; $x \in (-1, 1)$.

29. $\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{a^2 + \sin^2 x}$; $a \neq 0$, $x \in \mathbf{R}$.

30. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$; $x \in \mathbf{R}$.

31. $\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2 + \cos 2x}}$; $x \in \mathbf{R}$.

32. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \cos x}$; $x \in (-\pi, \pi)$.

33. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\cdot \arcsin x}$; $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$.

34. $\int \frac{x + (\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}\,\mathrm{d}x$; $|x| < \frac{1}{3}$.

35. $\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$; $x \in (-1, 1)$.

36. $\int x^2 \cdot \mathrm{ch}(x^3 + \mathrm{e})\,\mathrm{d}x$; $x \in \mathbf{R}$.

Să se calculeze primitivele următoare, utilizînd prima metodă de schimbare de variabilă.

37. $\int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x}\,\mathrm{d}x$; $x \in \mathbf{R}$.

38. $\int \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$; $x \in \mathbf{R}$.

39. $\int (\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}^3 x)\,\mathrm{d}x$; $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

40. $\int (\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^4 x)\,\mathrm{d}x$; $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

41. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos^4 x}}\,\mathrm{d}x$; $x \in (0, \pi)$.

42. $\int \sqrt{x^2 - 3x + 2}\,\mathrm{d}x$; $x \in (2, \infty)$.

43. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}\,\mathrm{d}x$; $x \in (0, \infty)$.

Să se calculeze primitivele următoarelor funcții raționale:

44. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^4}$; $x \in \mathbf{R}$.

45. $\int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2}\,\mathrm{d}x$; $x \in \mathbf{R}$.

46. $\int \frac{x^4}{x^3 - 1}\,\mathrm{d}x$; $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

47. $\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x}\,\mathrm{d}x$; $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$.

48. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2(x^2+1)}$; $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

49. $\int \frac{(x+1)^4}{(x^2 + 2x + 2)^3}\,\mathrm{d}x$; $x \in \mathbf{R}$.

50. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4 + x^2 + 1}$; $x \in \mathbf{R}$.

51. $\int \frac{2x - 3}{(x^2 - 3x + 2)^3}\,\mathrm{d}x$; $x \in \mathbf{R} \setminus \{1, 2\}$.

52. $\int \frac{x^3 + 1}{(x^2 - 4x + 5)^2}\,\mathrm{d}x$; $x \in \mathbf{R}$.

53. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^7 + 1)}$; $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$.

54. $\int \frac{dx}{x(x^5+1)^2}$; $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$.

55. $\int \frac{x^2 dx}{(x-1)^{10}}$; $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

56. $\int \frac{dx}{x^8+x^6}$; $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Să se calculeze primitivele următoarelor funcții trigonometrice:

57. $\int \frac{dx}{a+b\cos x}$; $x \notin \left\{\pm \arccos\left(-\frac{a}{b}\right) + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$, dacă $\left|\frac{a}{b}\right| \leqslant 1$.

58. $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} dx$; $x \in \mathbf{R}$.

59. $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$; $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

60. $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x} dx$; $x \in \mathbf{R}$.

61. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot \sin x \, dx$, unde $f(x) = \max[\sin x, \sin^3 x]$.

62. $\int \frac{\operatorname{tg} x \, dx}{\cos x (\cos x + \sin x)^{\frac{5}{7}}}$; $x \in \mathbf{R} \setminus \left[\left\{\pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}\right]$, $k \in \mathbf{Z}$.

63. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x \, dx}{1+\sqrt{2\cos x}^{\frac{5}{7}}}$

64. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x \, dx}{\sin x + \cos x^{\frac{5}{7}}}$

65. $\int \cos x \cdot \cos 3x \cdot \cos 6x \, dx$; $x \in \mathbf{R}$.

66. $\int \frac{dx}{3\cos x + \sin x + 1}$; $x \in \mathbf{R}$.

67. $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)} dx$; $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi\} \cup \left\{\pm \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

68. $\int \sin^6 x \, dx$; $x \in \mathbf{R}$.

69. $\int_0^{\pi} (x \cos x)^2 dx$.

70. $\int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 a} dx$; $x \notin \{\pm a + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

71. $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$; $x \in \mathbf{R}$.

72. $\int \cos^6 3x \, dx$; $x \in \mathbf{R}$.

73. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx$; $x \notin \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

74. $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cdot \cos^3 x}$; $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi\} \cup \left\{\pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

75. $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$; $x \notin \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

76. $\int x \sin^2 x^2 \, dx$; $x \in \mathbf{R}$.

77. $\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x} \, dx$; $x \notin \left[2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2(k+1)\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$.

78. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}$; $x \in \mathbf{R} \setminus \left[\left\{\pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\} \cup \{k\pi\}\right]$, $k \in \mathbf{Z}$.

79. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$; $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\left[2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \cup \left[(2k+1)\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

80. $\int \cos x \cos^2 3x \, dx$; $x \in \mathbf{R}$.

81. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x \, dx$; $x \in \mathbf{R}$.

82. $\int \frac{3 \sin x + 2 \cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx$; $x \in \mathbf{R}$.

83. $\int \frac{dx}{1 + 3 \cos^2 x}$; $x \in \mathbf{R}$.

84. $\int \frac{dx}{3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x}$; $x \in \mathbf{R}$.

85. $\int \frac{dx}{(2 - \sin x)(3 - \sin x)}$; $x \in \mathbf{R}$.

Să se calculeze primitivele următoarelor funcții exponențiale:

86. $\int \frac{e^x}{(1 + e^{2x})^2} dx$; $x \in \mathbf{R}$.

87. $\int \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^x + e^{2x}} dx$; $x \in \mathbf{R}$.

88. $\int \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{6}}\left(e^{\frac{x}{3}} + 1\right)} dx$; $x \in \mathbf{R}$.

89. $\int \frac{e^{3x}}{e^x + 1} dx$; $x \in \mathbf{R}$.

90. $\int \frac{(e^{3x} - e^x) dx}{e^{4x} - e^{3x} + 2e^{2x} - e^x + 1}$; $x \in \mathbf{R}$.

91. $\int \operatorname{ch}^4 x \, dx$; $x \in \mathbf{R}$.

92. $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x \, dx$; $x \in \mathbf{R}$.

93. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 x}$; $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

94. $\int \operatorname{th}^3 x \, dx$; $x \in \mathbf{R}$.

95. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x}$; $x \in \mathbf{R}$.

96. $\int \frac{dx}{\operatorname{th} x - 1}$; $x \in \mathbf{R}$.

97. $\int \frac{\operatorname{sh} x \, dx}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}$; $x \in \mathbf{R}$.

Să se calculeze primitivele următoarelor funcții iraționale:

98. $\int \frac{dx}{(1 + x)\sqrt{1 + x + x^2}}$; $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

99. $\int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}$; $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

100. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$; $x \in \mathbf{R}$.

101. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 + x^2}}$; $x \in \mathbf{R}$.

102. $\int_0^1 \frac{x \, dx}{1 + \sqrt{1 + x^2}}$; $x \in \mathbf{R}$.

103. $\int_0^1 \frac{dx}{(1 + x)\sqrt{1 - x^2}}$; $x \in (-1, 1)$.

104. $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}$; $x \in \mathbf{R}$.

105. $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$; $x \in (-1, 1)\setminus\{0\}$.

106. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; $x \in (0, \infty)$.

107. $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$; $x \in \mathbf{R}\setminus\{-1\}$.

108. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$; $x \in (-\infty, -1)\cup(1, \infty)$.

109. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$; $x \in \mathbf{R}\setminus\{1\}$.

110. $\int \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}\,dx$; $x \in \mathbf{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}, 0\right\}$.

111. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; $x \in (-1, 1)$.

112. $\int \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$; $x \in \mathbf{R}$.

113. $\int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}\,dx$; $x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$.

114. $\int \sqrt{x^2-2x+2}\,dx$; $x \in \mathbf{R}$.

115. $\int \sqrt{x^2+x}\,dx$; $x \in (-\infty, -1]\cup[0, \infty)$.

116. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$; $x \in (-\infty, 1)\cup(2, \infty)$.

117. $\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}$; $x \in \mathbf{R}$.

118. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$; $x \in (-1, 1)$.

119. $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$; $x \in \mathbf{R}\setminus\{-1, 1\}$.

Să se calculeze primitivele următoarelor funcții binome:

120. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$; $x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$.

121. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$; $x \in \mathbf{R}$.

122. $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx$; $x \in \mathbf{R}$.

123. $\int \sqrt{x^3+x^4}\,dx$; $x \in (-\infty, -1)\cup(0, \infty)$.

124. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$; $x \in (0, \infty)$.

125. $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$; $x \in (0, \infty)$.

126. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$; $x \in (-1, 1)\setminus\{0\}$.

127. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$; $x \in \mathbf{R}\setminus\left\{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}, 0\right\}$.

128. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$; $x \in (\sqrt{2}, \infty)$.

129. $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}$; $x \in \left(e^{-2-\sqrt{6}}, e^{-2+\sqrt{6}}\right)\setminus\{0\}$.

130. $\int \frac{dx}{x\sqrt[5]{1+x^5}}$; $x \in \mathbf{R}\setminus\{-1, 0\}$.

131. $\int \frac{dx}{x^2(2+x^3)^{\frac{5}{3}}}$; $x \in \mathbf{R}\setminus\{-\sqrt[3]{2}, 0\}$.

132. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$; $x \in (0, \infty)$.

Calculul de primitive cu ajutorul relațiilor de recurență (știind că $n \in \mathbf{N}$):

133. $I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2 + x^2)^n}$; $a \neq 0$, $x \in \mathbf{R}$.

134. $I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2 - x^2)^n}$; $a \neq 0$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{\pm a\}$.

135. $I_n = \int \frac{x^n \, \mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$; $a \neq 0$.

136. $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{a^2 + x^2}} \mathrm{d}x$; $x \in \mathbf{R}$.

137. $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{x^2 - a^2}} \mathrm{d}x$; $x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$.

138. $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{a^2 - x^2}} \mathrm{d}x$; $x \in (-a, a)$.

139. $I_n = \int \frac{1}{x^n \sqrt{a^2 + x^2}} \mathrm{d}x$; $x \in \mathbf{R}$.

140. $I_n = \int \frac{1}{x^n \sqrt{x^2 - a^2}} \mathrm{d}x$; $x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$.

141. $I_n = \int \frac{1}{x^n \sqrt{a^2 - x^2}} \mathrm{d}x$; $x \in (-a, a)$.

142. $I_n = \int (\ln x)^n \, \mathrm{d}x$; $x \in (0, \infty)$.

143. $I_{m,n} = \int x^m (\ln x)^n \, \mathrm{d}x$; $x \in (0, \infty)$, $m \in \mathbf{N}$.

144. $I_n = \int x^n \cdot \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x$; $x \in \mathbf{R}$.

145. $I_n = \int \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} \mathrm{d}x$; $x \in (0, \infty)$.

146. $I_n = \int \sin^n x \, \mathrm{d}x$; $x \in \mathbf{R}$.

147. $I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x}$; $x \notin \{\pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

148. $I_n = \int \cos^n x \, \mathrm{d}x$; $x \in \mathbf{R}$.

149. $I_{m,n} = \int (\sin x)^m (\cos x)^n \, \mathrm{d}x$; $x \in \mathbf{R}$, $m \in \mathbf{N}$.

150. $I_n = \int x^n \sin(ax) \, \mathrm{d}x$; $x \in \mathbf{R}$.

151. $I_n = \int x^n \cos(ax) \, \mathrm{d}x$; $x \in \mathbf{R}$.

152. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^{2n} x \, \mathrm{d}x$.

153. $I_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{ctg}^{2n} x \, \mathrm{d}x$.

Să se calculeze valorile primitivelor următoarelor funcții compuse:

154. $\int_{-5}^{5} (2x - 1) \operatorname{sgn} x \, \mathrm{d}x$.

155. $\int_{-5}^{5} |x - 1| \operatorname{sgn} x \, \mathrm{d}x$.

156. $\int_{0}^{3} [\operatorname{sgn}(x - 1) + x \operatorname{sgn}(x - 2)] \, \mathrm{d}x$.

157. $\int_{2}^{3} (x^2 + 1) \operatorname{sgn}(1 - x^2) \, \mathrm{d}x$.

158. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \operatorname{sgn} x \, \mathrm{d}x$.

159. $\int_{-1}^{1} x^2\sigma(x)\,dx.$

160. $\int_{-1}^{3} [\sigma(x) + \sigma(x-2)]\,dx.$

161. $\int_{-1}^{2} (2x+1)\cdot\sigma(x+1)\,dx.$

162. $\int_{0}^{1\pi} |\sin x|\cdot\sigma(x)\,dx.$

163. $\int_{-2}^{2} [1 - ||x| - 1|]\,dx.$

164. $\int_{-2}^{2} (|x-1| + |x+1|)\,dx.$

165. $\int_{-5}^{3} |x^2 - 3x + 2|\,dx.$

166. $\int_{-10}^{10} (|x^2 - 9| + |x^2 - 16|)\,dx.$

167. $\int_{0}^{3} [2|2-x| - |x-1| + x - 3]\,dx.$

168. $\int_{-5}^{5} [|x^2 - 3x + 2| + |x^2 - 9|]\,dx.$

169. $\int_{0}^{10} [|x^2 - 7x + 12| - |x^2 - 6x + 5|]\,dx.$

170. $\int_{-5}^{5} [|-x^2 + 3x - 2| + |16 - x^2|]\,dx.$

171. $\int_{0}^{2\pi} (|\sin x| + |\cos x|)\,dx.$

172. $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx.$

173. $\int_{0}^{2} f(x)\,dx$ unde $f(x) = \begin{cases} x^2; & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x; & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$

174. $\int_{0}^{1} f(x)\,dx$ unde $f(x) = \begin{cases} x; & 0 \leqslant x \leqslant t \\ t\dfrac{1-x}{1-t}; & t < x \leqslant 1. \end{cases}$

175. $\int_{-2}^{2} \min(x, x^2)\,dx.$

176. $\int_{-2}^{2} \min(1, x, x^2)\,dx.$

177. $\int_{0}^{2\pi} \min(\sin x, \cos x)\,dx.$

178. $\int_{0}^{4} \max(x+1, 2x-1)\,dx.$

179. $\int_{-2}^{2} \max(1, x, x^2)\,dx.$

180. $\int_{-1}^{1} \max\left[\left(\frac{1}{3}\right)^x, 3^x\right]dx.$

181. Fie funcțiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, de forma:

a) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{pentru } x \leqslant 0 \\ 2x & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$ și

$g(x) = \begin{cases} x & \text{pentru } x \leqslant 2 \\ x + 1 & \text{pentru } x > 2. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{pentru } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$ și $g(x) = \begin{cases} -x & \text{pentru } x \leqslant 1 \\ 0 & \text{pentru } x > 1. \end{cases}$

i) Să se determine funcțiile $s = f + g$, $d = f - g$, $p = fg$, $c = \dfrac{f}{g}$.

ii) Să se reprezinte grafic funcțiile s, d, p, c.

iii) Să se calculeze:

$$\int_{-5}^{5} s(x)\,dx, \quad \int_{-5}^{5} d(x)\,dx, \quad \int_{-5}^{5} p(x)\,dx, \quad \int_{-5}^{5} c(x)\,dx.$$

182. Fie funcțiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definite prin:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \leqslant 0 \\ 7x, & x > 0 \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant -2 \\ 2x - 1, & x > -2 \end{cases}$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leqslant 0 \\ -5x - 1, & x > 0 \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} 4x - 2, & x < 0 \\ 3x^2 - 2, & x \geqslant 0 \end{cases}$.

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x, & x < -3 \\ -2x - 5, & x \geqslant -3 \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} 5x - 2, & x \leqslant 1 \\ x^2 - 2x + 4, & x > 1 \end{cases}$.

d) $f(x) = 3x + |x| - 1$, $g(x) = \begin{cases} x - 2, & x \geqslant 0 \\ x^2 - 9, & x < 0 \end{cases}$.

e) $f, g : [-1, 1] \to [-1, 1]$

$$f(x) = \arccos x, \quad g(x) = 4x^3 - 3x.$$

Se cere:

i) Să se calculeze funcțiile $h = f \circ g$ și $p = g \circ f$.

ii) Să se reprezinte grafic funcțiile h și p.

iii) Să se calculeze: $\int_{-10}^{10} h(x)\,dx$ și $\int_{-10}^{10} p(x)\,dx$.

183. Să se calculeze valorile medii pentru:

a) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $x \in [1, 4]$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x}$; $x \in [1, 1{,}5]$.

c) $f(x) = \sin x$; $x \in [0, \pi]$.

d) $f(x) = \sin^2 x$; $x \in [0, \pi]$.

e) $f(x) = \dfrac{2}{e^x + 1}$; $x \in [0, 2]$.

Integrale diverse

184. Fie integrala:

$$I(a) = \int_1^3 \frac{dx}{|x - a| + 1}; \quad a \in \mathbf{R}.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{a \to \infty} I(a)$.

185. Să se rezolve ecuația:

$$x^4 + 2x^3 - 5x^2 = 24 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 x\,dx - 13.$$

186. Să se calculeze:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{|\sin n \arccos x|\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(Facultatea de matematică)

187. Fie integrala

$$f(x) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t\,dt}{\sqrt{(x - \cos t)^2 + \sin^2 t}}.$$

Să se calculeze aria figurii din plan, limitată de curba $y = f(x)$, axa Ox și dreptele $x = a$ și $x = b$, cu $a < b$.

(Facultatea de matematică)

188. Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \left[\dfrac{4n - 4 - 2a_n}{\pi}\right]^n$, unde

$$a_n = \int_1^n \frac{2x^2}{x^2 + 1}\,dx \text{ și } n \in \mathbf{N}.$$

(Facultatea de matematică)

189. Să se determine numerele reale A, B, C, astfel încît

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = Af\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + Bf(0) + Cf\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

pentru orice funcție polinomială reală f de grad cel mult trei.

(Facultatea de matematică)

190. Fără a se determina primitiva, să se arate care din următoarele integrale are valoarea mai mare:

i) $\int_1^2 \ln(1 + x)\,dx$ sau $\int_1^2 \dfrac{x}{1 + x}\,dx$.

ii) $\int_2^{10} x \operatorname{arctg} x \, dx$ sau $\int_2^{10} \ln(1+x^2)\, dx$.

iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$ sau $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \, dx$.

191. Fără a determina primitiva, să se arate că:

i) $\frac{1}{3} \leqslant \int_4^7 \frac{x-3}{x+5} dx \leqslant 1$.

ii) $1 < \int_0^1 e^{x^2} dx < e$.

iii) $\frac{1}{5} \leqslant \int_5^8 \frac{2x-9}{2x+5} dx \leqslant 1$.

iv) $2\sqrt{e} \leqslant \int_0^1 e^{x^2} dx + \int_0^1 e^{1-x^2} dx \leqslant 1 + e$.

192. Să se determine constantele reale a și b, astfel ca funcția $F(x) = e^{-x}(a \cos 4x + b \sin 4x)$ să fie o primitivă a funcției $f(x) = e^{-x} \cdot \cos 4x$.

193. Elementele șirului de funcții $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ se definesc astfel:

$$f_1(x) = 1, \quad f_{n+1}(x) = \int_1^x f_n(t)\, dt, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Fie $a_n = f_{n+1}(2)$. Să se demonstreze că $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

194. Fie $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx, \quad n \in \mathbf{N}$.

a) Să se arate că I_n este o funcție descrescătoare de n.

b) Să se calculeze

$$\lim_{n \to \infty} \frac{I_n}{I_{n-2}} \text{ și } \lim_{n \to \infty} \frac{I_n}{I_{n-1}}.$$

c) Să se arate că $n \cdot I_n \cdot I_{n-1}$ nu depinde de n. Ce valoare are acest produs?

195. Se consideră funcția:

$$f_n(x) = (1-x)^n \cdot (1+x)^n, \quad x \in [0, 1], \quad n \in \mathbf{N}.$$

a) Să se arate că:

$$0 \leqslant \int_0^1 f_n(x)\, dx \leqslant 1.$$

b) Să se arate că șirul

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx$$

este convergent.

c) Să se determine relația de recurență a șirului de integrale.

196. Se consideră funcția $f : [1, \infty) \to \mathbf{R}$ dată prin:

$$f(x) = \int_0^1 e^{-t} \cdot t^{x-1}\, dt.$$

a) Să se arate că f este pozitivă și descrescătoare.

b) Să se stabilească relația $f(x+1) = f(x) \cdot x - \frac{1}{e}$.

c) Să se arate că pentru orice n natural are loc egalitatea:

$$f(n+1) = n! - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{n} A_n^k.$$

d) Folosind cele stabilite anterior să se arate că șirul cu termenul general:

$$a_n = n! - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{n} A_n^k$$

este convergent.

2. Reamintesc formula de integrare prin părți: Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ sînt funcții derivabile cu derivate continue, atunci funcțiile fg, $f'g$ și fg' admit primitive și mulțimile lor de primitive sînt legate prin relația:

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int g(x)\cdot f'(x)\,dx.$$

$$\begin{cases} e^{\arcsin x} = u \Rightarrow \dfrac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = du \\ \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = dv \Rightarrow -\sqrt{1-x^2} = v \end{cases}$$

$$I = -\sqrt{1-x^2}\,e^{\arcsin x} + \int e^{\arcsin x}\,dx =$$

{vom integra din nou prin părți:

$$\begin{cases} e^{\arcsin x} = u \\ dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = du \\ x = v \end{cases}$$

$$= -\sqrt{1-x^2}\,e^{\arcsin x} + \left(x\cdot e^{\arcsin x} - \int \frac{x\cdot e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right),$$

deci

$$I = -\sqrt{1-x^2}\cdot e^{\arcsin x} + x\cdot e^{\arcsin x} - I + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{1-x^2}\,e^{\arcsin x} + x\cdot e^{\arcsin x}\right) + C.$$

3. $-\dfrac{1}{x}(\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6) + C.$

4. $\dfrac{1}{2}[(x^2-1)\sin x - (x-1)^2\cos x]e^x + C.$

5. Fie $\begin{cases} e^{\operatorname{arctg} x} = f \Rightarrow \dfrac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} = f' \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = g \Rightarrow \dfrac{-x}{\sqrt{1+x^2}} = g'. \end{cases}$

Atunci

$$I = \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot e^{\operatorname{arctg} x} +$$

$$+\int \frac{x\,e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot e^{\operatorname{arctg} x} +$$

$$+\int (\sqrt{1+x^2})'\cdot e^{\operatorname{arctg} x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot e^{\operatorname{arctg} x} +$$

$$+\sqrt{1+x^2}\cdot e^{\operatorname{arctg} x} - \int \sqrt{1+x^2}\cdot\frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{2+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\cdot e^{\operatorname{arctg} x} - \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{1+x}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot e^{\operatorname{arctg} x} + C.$$

6. Fie $\begin{cases} f = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \\ g' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ g = x \end{cases}$

$$I = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int (\sqrt{1+x^2})'\,dx =$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$$

7. Vom utiliza metoda coeficienților nedeterminați: în locul mai multor integrări prin părți:

$$\int x^2 e^{3x}\,dx = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x} + C$$

și derivînd obținem:

$$x^2 e^{3x} = 3(Ax^2 + Bx + C)e^{3x} + (2Ax + B)e^{3x}.$$

Simplificînd prin e^{3x} și identificînd coeficienții obținem: $1 = 3A$, $0 = 3B + 2A$, $0 = 3C + A$.

Deci: $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{2}{9}$, $C=\frac{2}{27}$ și forma primitivei este:

$$\frac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x+2).$$

Deci, în general $\int P_n(x)\,e^{ax}\,dx = Q_n(x)\cdot e^{ax}+C$, unde $P_n(x)$ este un polinom dat de gradul n, iar $Q_n(x)$ este un polinom de gradul n ai cărui coeficienți urmează să fie determinați prin derivarea expresiei și aplicarea metodei coeficienților nedeterminați.

8. Fie $\begin{cases} f=\ln^2 x \\ g'=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'=2\cdot\frac{1}{x}\ln x \\ g=x \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = x\ln^2 x - 2\int \ln x\,dx;$$

fie $\begin{cases} m=\ln x \\ n'=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m'=\frac{1}{x} \\ n=x \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = x\ln^2 x - 2(x\ln x - x)+C = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C.$$

9. $I=\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx = -\int x(\operatorname{ctg} x)'\,dx =$

$$= -x\operatorname{ctg} x + \int \operatorname{ctg} x\,dx = -x\operatorname{ctg} x + \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx =$$

$$= -x\operatorname{ctg} x + \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}\,dx = -x\operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| + C.$$

10. Fie $\begin{cases} e^x=f' \\ \sin x=g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x=f \\ \cos x=g' \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx.$$

Integrăm din nou prin părți:

$$\text{fie } \begin{cases} e^x=u' \\ \cos x=v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x=u \\ -\sin x=v' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = e^x\sin x - \left(e^x\cos x + \int e^x\sin x\,dx\right)+C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = e^x(\sin x-\cos x)+I+C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+C.$$

11. Fie $\begin{cases} \sin(\ln x)=f \\ 1=g' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'=\frac{1}{x}\cdot\cos(\ln x) \\ g=x \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx.$$

Integrăm din nou prin părți:

$$\text{fie } \begin{cases} \cos(\ln x)=u \\ 1=v' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'=-\frac{1}{x}\sin(\ln x) \\ v=x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C.$$

12. Fie $\begin{cases} f=\operatorname{arctg} 3x \\ g'=x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'=\frac{3}{1+9x^2} \\ g=\frac{x^3}{3} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} 3x - \int \frac{x^3}{9x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} 3x - \int\left(\frac{1}{9}x - \frac{1}{9}\cdot\frac{x}{9x^2+1}\right)dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} 3x - \frac{1}{9}\int\left[x - \frac{1}{18}\cdot\frac{(9x^2+1)'}{9x^2+1}\right]dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} 3x - \frac{x^2}{18} + \frac{1}{162}\cdot\ln(9x^2+1)+C.$$

13. Fie $\begin{cases} f = (\operatorname{arctg} x)^2 \\ g' = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f' = \dfrac{2}{1+x^2} \cdot \operatorname{arctg} x \\ g = \dfrac{1}{2} x^2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} x^2 (\operatorname{arctg} x)^2 - \int \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arctg} x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 (\operatorname{arctg} x)^2 - \int \left[\operatorname{arctg} x - \frac{1}{1+x^2} \operatorname{arctg} x \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 (\operatorname{arctg} x)^2 - \int \operatorname{arctg} x \, dx + \int \operatorname{arctg} x \cdot (\operatorname{arctg} x)' \, dx =$$

$$= \frac{x^2+1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 - x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C.$$

14. Fie $\begin{cases} f = \cos^2(\ln x) \\ g' = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} f' = -2 \cdot \dfrac{1}{x} \cdot \sin(\ln x) \cdot \cos(\ln x) = -\dfrac{1}{x} \sin(2 \ln x) \Rightarrow \\ g = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = x \cos^2(\ln x) + \int \sin(2 \ln x) \, dx.$$

Integrăm din nou prin părți:

fie $\begin{cases} u = \sin(2 \ln x) \\ v' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 2 \cdot \dfrac{1}{x} \cdot \cos(2 \ln x) \\ v = x \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = x \cos^2(\ln x) + x \sin(2 \ln x) - 2 \int \cos(2 \ln x) \, dx.$$

Fie $\begin{cases} m = \cos(2 \ln x) \\ n' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m' = -2 \cdot \dfrac{1}{x} \cdot \sin(2 \ln x) \\ n = x \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = x \cos^2(\ln x) + x \sin(2 \ln x) - 2 \left[x \cos(2 \ln x) + 2 \int \sin(2 \ln x) \, dx \right].$$

Dar $\int \sin(2 \ln x) \, dx = \dfrac{x[\sin(2 \ln x) - 2 \cos(2 \ln x)]}{5} + C \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = x \cos^2(\ln x) + \frac{x[\sin(2 \ln x) - 2 \cos(2 \ln x)]}{5} + C.$$

15. $\int \dfrac{2x+3}{2x+1} \, dx = \int \left(1 + \dfrac{2}{2x+1} \right) dx = x + \ln|2x+1| + C.$

16. $\int \dfrac{x \, dx}{(x+1)^2} = \int \left[\dfrac{1}{(x+1)} - \dfrac{1}{(x+1)^2} \right] dx \Rightarrow$

$$= \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C.$$

17. $\int \dfrac{x \, dx}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{2} \int \dfrac{(x^2+1)' dx}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + C.$

18. $\dfrac{1}{2a} \ln(a^2x^2 + b^2) + \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{ax}{b} + C.$

19. $\int \dfrac{1}{2^x+3} \, dx = \dfrac{1}{3} \int \left(1 - \dfrac{2^x}{2^x+3} \right) dx =$

$$= \frac{x}{3} - \frac{1}{3 \ln 2} \ln(2^x + 3) + C.$$

20. $\ln x = u \Rightarrow \dfrac{1}{x} dx = du.$

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} \, dx = \int \sqrt{u} \, du = \frac{2}{3} \cdot (\ln x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

21. $\int \dfrac{dx}{x \ln x} = \int \dfrac{1}{\ln x} (\ln x)' dx = \ln|\ln x| + C.$

22. $I = \int \sqrt[3]{1 + \ln x} \cdot (\ln x)' dx$

Fie $\ln x = \alpha \Rightarrow I = \int \sqrt[3]{1+\alpha} \, d\alpha = \int (1+\alpha)^{\frac{1}{3}} d\alpha =$

$$= \frac{(1+\alpha)^{4/3}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{(\ln x + 1)^4} + C.$$

23. $I = 2 \cdot \int \cos \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})' \, dx$

Fie $\sqrt{x} = y \Rightarrow I = 2 \int \cos y \, dy = 2 \sin y + C =$

$= 2 \sin (\sqrt{x}) + C.$

24. Fie $\frac{x}{a} = y$

$$\int \frac{1}{\sin y} dy = \int \frac{1}{2 \sin \frac{y}{2} \cos \frac{y}{2}} dy = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{y}{2}}}{2 \operatorname{tg} \frac{y}{2}} dy =$$

$$= \int \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{y}{2}\right)'}{\operatorname{tg} \frac{y}{2}} dy = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{y}{2} \right| + C \Rightarrow I = a \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2a} \right| + C.$$

25. Fie $\frac{x}{a} = y.$

$$\int \frac{1}{\cos y} dy = \int \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - y \right)} dy =$$

$$= \int \frac{1}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2} \right)} dy =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2} \right)}}{2 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2} \right)} dy = - \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2} \right) \right| + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = - a \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2a} \right) \right| + C.$$

26. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{(\cos x)'}{\cos^2 x - 1} dx =$

$$= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{\cos x - 1} - \frac{1}{\cos x + 1} \right) (\cos x)' \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \right| + C \Rightarrow$$

$$= \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

27. $I = \frac{1}{a} \int \frac{(\sin ax)'}{\sin^5 ax} dx.$

Fie $\sin ax = y \Rightarrow \int \frac{1}{y^5} dy = \int y^{-5} dy = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{y^4} + C \Rightarrow$

$$I = -\frac{1}{4a} \cdot \frac{1}{\sin^4 ax} + C.$$

28. $x^4 = t \Rightarrow 4x^3 \, dx = dt$

$$\int \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{1 - x^8}} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1}{4} \arcsin t + C =$$

$$= \frac{1}{4} \arcsin x^4 + C.$$

29. $\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{\sin x}{a} + C.$

30. $I = \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{(\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg}^2 x + 2} dx.$

Fie $\operatorname{tg} x = a \Rightarrow \int \frac{1}{a^2 + 2} da = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{2}} + C.$

Deci $I = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) + C.$

31. $I = \int \frac{(\sin x)'}{\sqrt{2 + (1 - 2\sin^2 x)}}\,dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sqrt{3 - 2\sin^2 x}}\,dx.$

Fie $\sin x = t \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{3 - 2t^2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}t\right) + C.$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sin x\right) + C.$$

32. $I = \int \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \int \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)' dx = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$

33. $I = \int \frac{1}{\arcsin x} \cdot (\arcsin x)'\,dx = \ln|\arcsin x| + C.$

34. $I = \int \left[\frac{x}{\sqrt{1 - 9x^2}} + \frac{(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1 - 9x^2}}\right] dx =$

$$= -\frac{1}{18}\int \frac{(1 - 9x^2)'}{\sqrt{1 - 9x^2}}\,dx - \int (\arccos 3x)^2 (\arccos 3x)'\,dx =$$

$$= -\frac{1}{9}\sqrt{1 - 9x^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{(\arccos 3x)^3}{3} + C =$$

$$= -\frac{1}{9}\left[\sqrt{1 - 9x^2} + (\arccos 3x)^3\right] + C.$$

35. $I = \int \left[\frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{(1 - x^2)'}{2\sqrt{1 - x^2}}\right] dx =$

$$= \frac{(\arcsin x)^2}{2} - \sqrt{1 - x^2} + C.$$

36. $I = \frac{1}{3}\int (x^3 + e)' \cdot \operatorname{ch}(x^3 + e)\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{sh}(x^3 + e) + C,$

deoarece

$$\int \operatorname{ch} t\,dt = \operatorname{sh} t + C.$$

37. Reamintesc prima metodă de schimbare de variabilă:

Fie I, J două intervale reale și două funcții f, φ astfel încît: $I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbf{R}$

i) φ derivabilă pe I

ii) f admite primitive și fie F o primitivă a sa.

Atunci funcția $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ admite primitive, iar funcția $F \circ \varphi$ este o primitivă a sa, adică

$$\int (f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x)\,dx = \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + C.$$

Fie $\varphi(t) = 1 + \sin^2 t$, $f(x) = \frac{1}{x}$

cu $\mathbf{R} \xrightarrow{\varphi} [1, 2] \xrightarrow{f} \mathbf{R}$. Funcția φ este derivabilă pe $\mathbf{R}$ și $\varphi'(t) = 2\sin t \cos t = \sin 2t$. Funcția f este continuă pe $[1, 2]$ și fie $F(x) = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$ o primitivă a sa. Atunci vom verifica dacă alegerea funcțiilor f și φ a fost corectă:

$$(f \circ \varphi)(x)\varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) = \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x}.$$

Cum alegerea a fost corectă, atunci primitiva este $I = (F \circ \varphi)(x) + C = F(\varphi(x)) + C = \ln(1 + \sin^2 x) + C.$

38. $I = \int \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'}{1 + \cos^2 x}\,dx;$ fie

$\varphi(t) = -\cos t$ și $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ cu $\mathbf{R} \xrightarrow{\varphi} [-1, 1] \cap \mathbf{R} \xrightarrow{f} \mathbf{R}.$

Funcția φ este derivabilă pe $\mathbf{R}$ și $\varphi'(t) = \sin t$.

Funcția f este continuă și fie $F(x) = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx =$ $= \operatorname{arctg} x + C$ o primitivă a sa. Atunci vom verifica dacă alegerea funcțiilor f și φ a fost corectă:

$$(f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = \frac{1}{1 + \varphi^2(x)}\varphi'(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}.$$

Cum alegerea a fost corectă, atunci primitiva este:

$$I = (F \circ \varphi)(x) + C = F(\varphi(x)) + C = \operatorname{arctg} \varphi(x) + C =$$
$$= \operatorname{arctg}(-\cos x) + C = -\operatorname{arctg}(\cos x) + C.$$

39. $I = \int \operatorname{tg} x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x)\,dx = \int \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,dx =$

$$= \int \operatorname{tg} x \cdot (\operatorname{tg} x)'\,dx.$$

Fie $\varphi(t) = \operatorname{tg} t$ și $f(x) = x$ cu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{\varphi} \mathbf{R} \xrightarrow{f} \mathbf{R}$.

Funcția φ este derivabilă și $\varphi'(x) = \frac{1}{\cos^2 t}$.

Funcția f este continuă și fie $F(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$ o primitivă a sa. Atunci vom verifica dacă alegerea funcțiilor f și φ a fost corectă:

$$(f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = \varphi(x) \cdot \varphi'(x) = \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Cum alegerea a fost corectă, atunci primitiva este:

$$I = (F \circ \varphi)(x) + C = F(\varphi(x)) + C = \frac{\varphi^2(x)}{2} + C = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 x + C.$$

40. $I = \int \operatorname{tg}^2 x(1 + \operatorname{tg}^2 x)\,dx = \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,dx =$

$$= \int \operatorname{tg}^2 x\ (\operatorname{tg} x)'\,dx.$$

Fie $\varphi(t) = \operatorname{tg} t$ și $f(x) = x^2$ cu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{\varphi} \mathbf{R} \xrightarrow{f} \mathbf{R}$.

Funcția φ este derivabilă și $\varphi'(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$.

Funcția f este continuă și fie $F(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ o primitivă a sa. Atunci vom verifica dacă alegerea funcțiilor f și φ a fost corectă:

$$(f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = \varphi^2(x) \cdot \varphi'(x) = \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Cum alegerea a fost corectă, atunci primitiva este

$$I = (F \circ \varphi)(x) = F(\varphi(x)) + C = \frac{\varphi^3(x)}{3} + C = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg}^3 x + C.$$

41. $I = \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos^4 x}}\,dx = -\int \frac{(\cos^2 x)'}{\sqrt{1 - (\cos^2 x)^2}}\,dx$

Fie $\varphi(t) = \cos^2 t$ și $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ cu

$$\mathbf{R} \xrightarrow{\varphi} [-1, 1] \cap (-1, 1) \xrightarrow{f} \mathbf{R}$$

Funcția φ este derivabilă și $\varphi'(t) = -2 \sin x \cos x = -\sin 2x$.

Funcția f este continuă și fie $F(x) = -\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx =$

$= -\arcsin x + C$, o primitivă a sa.

Atunci vom verifica dacă alegerea funcțiilor f și φ a fost corectă:

$$(f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \varphi^2(x)}} \varphi'(x) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1 - (\cos^2 x)^2}} \cdot (-\sin 2x).$$

Cum alegerea a fost corectă, atunci primitiva este:

$$I = (F \circ \varphi)(x) + C = F(\varphi(x)) + C =$$

$$= -\arcsin \varphi(x) + C = -\arcsin (\cos^2 x) + C.$$

42. $I = \int \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}\,dx.$

Fie $\varphi(t) = t - \frac{3}{2}$ și $f(x) = \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}}$ cu

$$\mathbf{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{R} \cap \left\{\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)\right\} \xrightarrow{f} \mathbf{R}.$$

Funcția φ este derivabilă și $\varphi'(t) = 1$.

Funcția f este continuă și fie o primitivă a sa funcția

$$F(x) = \int \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}}\,dx = \int \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}}}\,dx = \int \frac{-1}{4\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}}}\,dx +$$

$$+\int \frac{1}{2}\cdot x\cdot \frac{\left(x^2-\frac{1}{4}\right)'}{\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}}\,dx = -\frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}}\,dx +$$

$$+\int x\left(\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}\right)'dx = -\frac{1}{4}\cdot \ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}\right| +$$

$$+x\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}-\int \sqrt{x^2-\frac{1}{4}}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}\right| + x\sqrt{x^2-\frac{1}{4}} - F(x) \Rightarrow$$

$$F(x) = -\frac{1}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}\right| + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-\frac{1}{4}} + C,$$

iar în calcule s-a aplicat metoda integrării prin părți.

Verificăm dacă alegerea funcțiilor f și φ a fost corectă:

$$(f\circ\varphi)\varphi'(x) = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = \sqrt{\varphi^2(x)-\frac{1}{4}}\cdot\varphi'(x) =$$

$$= \sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}} = \sqrt{x^2-3x+2}.$$

Cum alegerea funcțiilor a fost corectă, atunci primitiva funcției este:

$$I = (F\circ\varphi)(x) + C = F(\varphi(x)) + C =$$

$$= -\frac{1}{8}\ln\left|\varphi(x)+\sqrt{\varphi^2(x)-\frac{1}{4}}\right| + \frac{1}{2}\varphi(x)\sqrt{\varphi^2(x)-\frac{1}{4}} + C =$$

$$= -\frac{1}{8}\ln\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+2}\right| +$$

$$+\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)\sqrt{x^2-3x+2} + C.$$

43. $I = \int \frac{1}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}\,dx = \int \frac{2\,dx}{(x^2)'\sqrt{(x^2)^2+x^2+1}}.$

Fie $\varphi(t) = t^2$, $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

Funcția φ este derivabilă și $\varphi(t) = 2t$.
Funcția f este continuă și fie o primitivă a sa funcția

$$F(x) = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \int \frac{1}{x\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}\,dx.$$

Vom efectua o substituție trigonometrică: fie

$$x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}\,d\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x) = \int \frac{1}{\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}\,d\alpha =$$

$$= \int \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha}\,d\alpha = \int \frac{1}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}\,d\alpha =$$

$$= \int \frac{1}{2\sin\frac{\alpha-\frac{\pi}{6}}{2}\cos\frac{\alpha-\frac{\pi}{6}}{2}}\,d\alpha =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha-\frac{\pi}{6}}{2}}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha-\frac{\pi}{6}}{2}}\,d\alpha = \int \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha-\frac{\pi}{6}}{2}\right)'}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\frac{\pi}{6}}{2}}\,d\alpha =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha-\frac{\pi}{6}}{2}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6}}{2}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}}{2}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{-1+\sqrt{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}}{\frac{x}{x+1}}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{-(x+1)+\sqrt{2x^2+2x+1}}{x}\right| + C$$

unde în calcule s-a ținut cont de formula trigonometrică:

$$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}{\operatorname{tg} x}.$$

Primitiva funcției este:

$$I = (F\circ\varphi)(x) + C = \ln\left|\frac{-(x^2+1)+\sqrt{2x^4+6x^2+5}}{x^2+1}\right| + C.$$

44. Polinomul x^4+1 are rădăcini complexe.

$x = \sqrt[4]{-1} \Rightarrow -1 = \cos\pi + i\sin\pi$. Aplicînd *formula lui Moivre*, obținem rădăcinile ecuației:

$$x_k = \cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}, \quad k\in\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}.$$

Polinomul se va descompune în:

$$x^4+1 = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) =$$
$$= (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1).$$

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

Aducînd la același numitor fracțiile și aplicînd metoda coeficienților nedeterminați obținem:

$$A = -C = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad B = D = \frac{1}{2}.$$

$$\int\frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} +$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C,$$

iar în calcule s-a ținut cont și de formula

$$\operatorname{arctg} x \pm \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x\pm y}{1\mp xy}.$$

Observație: descompunerea polinomului x^4+1 se mai poate face: $x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$.

45. $\dfrac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2} = \dfrac{Ax+B}{(x^2+2)^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+2}$.

Aducînd fracțiile la același numitor și aplicînd metoda coeficienților nedeterminați, obținem:

$$A=-1,\ B=-1,\ C=1,\ D=0.$$

$$\int\frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{1}{2(x^2+2)} - \frac{x}{4(x^2+2)} -$$
$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

46. $\dfrac{x^4}{x^3-1} = x + \dfrac{x}{x^3-1}$

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \Rightarrow A = -B = C = \frac{1}{3},$$

deci $\displaystyle\int\frac{x^4}{x^3-1}dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) +$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

47. $\frac{1}{4}x+\ln|x|-\frac{7}{16}\ln|2x-1|-\frac{9}{16}\ln|2x+1|+C.$

48. $\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2(x+1)}+C.$

49. $\frac{3}{8}\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{5x^3+15x^2+18x+8}{8(x^2+2x+2)^2}+C.$

50. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}+C.$

51. $-\frac{1}{2(x^2-3x+2)^2}+C.$

52. $\frac{3x-17}{2(x^2-4x+5)}+\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)+\frac{15}{2}\operatorname{arctg}(x-2)+C.$

53. $\ln|x|-\frac{1}{7}\ln|x^7+1|+C.$

Vom considera: $1=(x^7+1)-x^7\Rightarrow\frac{1}{x(x^7+1)}=$

$$=\frac{1}{x}-\frac{x^6}{x^7+1}=\frac{1}{x}-\frac{1}{7}\cdot\frac{(x^7)'}{x^7+1}.$$

54. $\ln|x|-\frac{1}{5}\ln|x^5+1|+\frac{1}{5(x^5+1)}+C.$

55. $-\frac{1}{9(x-1)^9}-\frac{1}{4(x-1)^8}-\frac{1}{7(x-1)^7}+C.$

56. Vom descompune fracția compusă într-o sumă de fracții elementare:

$$\frac{1}{x^6(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x^4}+\frac{E}{x^5}+\frac{F}{x^6}+\frac{Gx+H}{x^2+1}.$$

Aducînd la același numitor, reducînd termenii asemenea, ordonînd polinomul după puterile descrescătoare ale

lui x și aplicînd metoda coeficienților nedeterminați obținem sistemul:

$A+G=0$, $B+H=0$, $A+C=0$, $B+D=0$, $C+E=0$, $D+F=0$, $E=0$, $F=1$, ale cărui soluții sînt:

$A=C=E=G=0$ și $B=F=-D=-H=1$. Deci

$$I=\int\frac{1}{x^2}dx-\int\frac{1}{x^4}dx+\int\frac{1}{x^6}dx-\int\frac{1}{1+x^2}dx=$$

$$=-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}-\operatorname{arctg}x+C.$$

57. Efectuăm substituția: $\begin{cases}\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};\quad t=\operatorname{tg}\frac{x}{2};\\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt\end{cases}$

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x}=\int\frac{2\,dt}{(a+b)+(a-b)t^2}$$

i) $a-b>0$. Considerînd: $a+b=u^2$ și $a-b=v^2$, obținem:

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x}=2\int\frac{dt}{u^2+v^2t^2}=\frac{2}{uv}\cdot\operatorname{arctg}\frac{vt}{u}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

ii) $a-b<0$. Considerînd $a+b=u^2$ și $a-b=-v^2$, obținem:

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x}=2\int\frac{dt}{u^2-v^2t^2}=\frac{1}{uv}\cdot\ln\frac{u+vt}{u-vt}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\cdot\ln\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x}+C.$$

58. Efectuăm substituția:

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \text{ unde } t = \operatorname{tg} x \text{ și } dx = \frac{1}{1+t^2}\cdot dt$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx = \int \frac{t^2\,dt}{(1+2t^2)(1+t^2)}$$

$$\frac{t^2}{(1+t^2)(1+2t^2)} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{Ct+D}{1+2t^2} \Rightarrow \begin{cases} A = C = 0 \\ B = -D = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx = x - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + C.$$

59. Efectuăm substituțiile:

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \text{ unde } t = \operatorname{tg} x,$$

$$dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

$$I = \int \frac{t^2+1}{t^4+1}\,dt = \int \frac{t^2+1}{(t^2-\sqrt{2}t+1)(t^2+\sqrt{2}t+1)}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,dt =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}[\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t-1) + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t+1)] + C =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{2}t}{2(1-t^2)} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\operatorname{tg} 2x\right) + C.$$

60. Fie $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2}{1+t^2}\,dt$, unde $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

$$I = \int \frac{2-\dfrac{2t}{1+t^2}}{2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = 4\int \frac{t^2-t+1}{(t^2+1)(t^2+3)}\,dt.$$

Vom descompune fracția compusă într-o sumă de fracții elementare:

$$\frac{t^2-t+1}{(t^2+1)(t^2+3)} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{t^2+3} \Rightarrow$$

$$t^2 - t + 1 = (A+C)t^3 + (B+D)t^2 + (3A+C)t + 3B + D.$$

Aplicînd metoda coeficienților nedeterminați și rezolvînd sistemul format, vom determina numărătorii fracției:

$$A = -C = -\frac{1}{2},\ B = 0,\ D = 1 \Rightarrow$$

$$I = 4\left[-\frac{1}{2}\int \frac{t}{t^2+1}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{t+2}{t^2+3}\,dt\right] =$$

$$= -\int \frac{(t^2+1)'}{t^2+1}\,dt + 2\int\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(t^2+3)'}{t^2+3} + 2\cdot\frac{1}{t^2+3}\right]dt =$$

$$= -\ln|t^2+1| + \ln|t^2+3| + \frac{4\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}t\right) + C =$$

$$= \ln\left(\frac{t^2+3}{t^2+1}\right) + \frac{4\sqrt{3}}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}t\right) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \ln\left(1+2\cos^2\frac{x}{2}\right) + \frac{4\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C =$$

$$= \ln(2+\cos x) + \frac{4\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

61. $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{pentru } x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ \sin^3 x & \text{pentru } x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \end{cases}$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^4 x\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx =$$

$$= \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{16};\ \text{unde } \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \text{ și}$$

$$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = \frac{3-4\cos 2x+\cos 4x}{4}.$$

62. $I=\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x(1+\operatorname{tg} x)}\,dx=$

$=\int \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\,(\operatorname{tg} x)'\,dx$. Fie $\operatorname{tg} x=t\Rightarrow$

$\Rightarrow I=\int \frac{t}{1+t}\,dt=\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=t-\ln|1+t|+C.$

$\Rightarrow I=\operatorname{tg} x-\ln|1+\operatorname{tg} x|+C.$

63. Efectuăm substituția: $\cos x=t\Rightarrow dx=\frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{dt}{t(1+t\sqrt{2})}=\ln\sqrt{2}+\sqrt{2}\ln 2(\sqrt{2}-1).$$

64. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$. Efectuăm substituția:

$\operatorname{tg} x=t\Rightarrow dx=\frac{dt}{1+t^2}$ și $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=1.\end{cases}$

$$\int_0^1\frac{dt}{(1+t)(1+t^2)}=\int_0^1\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+t}+\frac{1}{2}\,\frac{1-t}{1+t^2}\right)dt=\frac{\ln 2+\frac{\pi}{2}}{4}.$$

65. $\frac{1}{2}\int(2\cos x\cos 3x)\cos 6x\,dx=$

$=\frac{1}{2}\int(\cos 4x+\cos 2x)\cos 6x\,dx=$

$=\frac{1}{2}\int(\cos 4x\cos 6x+\cos 2x\cos 6x)\,dx=$

$=\frac{1}{4}\int(2\cos 4x\cos 6x+2\cos 2x\cos 6x)\,dx=$

$=\frac{1}{4}\int(\cos 10x+\cos 2x+\cos 8x+\cos 4x)\,dx=$

$=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\sin 10x}{10}+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 8x}{8}+\frac{\sin 4x}{4}\right)+C.$

66. Efectuăm substituția: $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ cu:

$$\begin{cases}\sin x=\frac{2t}{1+t^2}\\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{cases}\Rightarrow dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$I=\int\frac{dt}{2+t-t^2}=-\int\frac{dt}{(t+1)(t-2)}=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{t-2}{t+1}\right|+C=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right|+C.$$

67. Efectuînd substituția $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ obținem:

$$I=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$$

68. Fie $I_n=\int\sin^n x\,dx$. Atunci avem relația de recurență:

$$I_n=-\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n}+\frac{n-1}{n}\cdot I_{n-2}$$

$$I_2=\int\sin^2 x\,dx=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C.$$

$$I_6=-\frac{\sin^5 x\cos x}{6}+\frac{5}{6}\cdot I_4=-\frac{\sin^5 x\cos x}{6}+$$

$$+\frac{5}{6}\left(-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}+\frac{3}{4}\cdot I_2\right),$$ sau se mai poate calcula plecînd de la expresia:

$$\sin^6 x=(\sin^3 x)^2=\left(\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}\right)^2=$$

$$= \frac{9 \sin^2 x + \sin^2 3x - 6 \sin x \sin 3x}{16}$$

$$= \frac{9 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} + 3(\cos 4x - \cos 2x)}{16} =$$

$$= \frac{-\cos 6x + 6 \cos 4x - 15 \cos 2x + 10}{32},$$

iar $\int \cos(nx)\,dx = \frac{1}{n} \sin(nx) + C$.

69. $I = \int_0^{\pi} x^2 \cos^2 x\,dx = \int_0^{\pi} x^2 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} dx =$

$$= \frac{\pi^3}{6} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x^2 \cos 2x\,dx = \frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{4},$$

unde integrala a fost rezolvată aplicînd de două ori metoda integrării prin părți.

70. a) $\operatorname{tg} a = 0 \Rightarrow I = \int \operatorname{ctg}^2 x\,dx = -x - \operatorname{ctg} x + C$.

b) $\operatorname{tg} a \neq 0$.

$$I = \frac{1}{2 \operatorname{tg} a} \cdot \left[\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a} - \int \frac{dx}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} a} \right] =$$

$$= \frac{1}{2 \operatorname{tg} a} \cdot \left[\int \frac{\cos x \cos a}{\sin(x - a)} dx - \int \frac{\cos x \cos a}{\sin(x + a)} dx \right] =$$

$$= \frac{1}{2 \operatorname{tg} a} \cdot \left[\int \frac{\cos a \cos[a + (x - a)]}{\sin(x - a)} dx - \right.$$

$$\left. - \int \frac{\cos a \cos[(x + a) - a]}{\sin(x + a)} dx \right] =$$

$$= \frac{1}{2 \operatorname{tg} a} \left[\int (\cos^2 a \operatorname{ctg}(x - a) - \sin a \cos a)\,dx - \right.$$

$$\left. - \int (\cos^2 a \operatorname{ctg}(x + a) + \sin a \cos a)\,dx \right] =$$

$$= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 a} \cdot \left(\frac{1}{2 \operatorname{tg} a} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} a} \right| - x \right) + C =$$

$$= \cos^2 a \left[\frac{1}{2 \operatorname{tg} a} \cdot \ln \left| \frac{\sin(x - a)}{\sin(x + a)} \right| - x \right] + C.$$

71. $I = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2\,dx =$

$$= \int (\sin^6 x - 2 \sin^4 x + \sin^2 x)\,dx =$$

$$= \int \sin^6 x\,dx - 2 \int \sin^4 x\,dx + \int \sin^2 x\,dx,$$

unde $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

$$\sin^4 x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{\cos 4x - 4 \cos 2x + 3}{8}$$

$$\sin^6 x = \frac{-\cos 6x + 6 \cos 4x - 15 \cos 2x + 10}{32}.$$

Ținînd cont că $\int \cos(nx)\,dx = \frac{1}{n} \sin(nx) + C$, obținem:

$$I = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$$

72. $\frac{5}{16} x + \frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{64} \sin 12x + \frac{1}{144} \sin^3 6x + C.$

73. $I = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx = \int \frac{\cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x \sin^4 x} dx =$

$$= \int \left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} \right) \frac{1}{\sin^2 x} dx =$$

$$= -\int \operatorname{ctg}^2 x (\operatorname{ctg} x)'\,dx - \int \operatorname{ctg}^4 x (\operatorname{ctg} x)'\,dx =$$

$$= -\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} + C.$$

74. $I = \int \frac{1}{\sin^5 x \cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx =$

$$= \int \frac{\operatorname{tg} x}{\sin^6 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\operatorname{tg} x}{\left(\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)^3} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)^3}{\operatorname{tg}^5 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^5 x} + 3 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^3 x} + 3 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x\right) (\operatorname{tg} x)' dx =$$

$$= -\frac{1}{4 \operatorname{tg}^4 x} - \frac{3}{2} \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + 3 \ln |\operatorname{tg} x| + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C.$$

75. $I = \int \frac{1}{\sin^4 x \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx =$

$$= \int \frac{1}{\sin^4 x} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)' dx =$$

$$= \int \frac{1}{\left(\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}\right)^4} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)' dx =$$

$$= \int \frac{\operatorname{tg}^8 \frac{x}{2} + 4 \operatorname{tg}^6 \frac{x}{2} + 6 \operatorname{tg}^4 \frac{x}{2} + 4 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1}{16 \operatorname{tg}^5 \frac{x}{2}} \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)' dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{16} \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^3 \frac{x}{2}} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^5 \frac{x}{2}}\right) \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)' dx = \frac{1}{16} \cdot \frac{\operatorname{tg}^4 \frac{x}{2}}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2} +$$

$$+ \frac{3}{8} \ln \left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| -$$

$$- \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^4 \frac{x}{2}} - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{6 \operatorname{tg}^6 x} + C =$$

$$= \frac{3}{8} \ln \left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| - \frac{\cos x}{4 \sin^4 x} - \frac{3}{8} \cdot \frac{\cos x}{\sin^2 x} + C.$$

76. $I = \frac{1}{2} \int (x^2)' \sin^2(x^2) dx$ și pentru $x^2 = y$, integrala este de tipul $\int \sin^2 y \, dy = \int \frac{1 - \cos 2y}{2} dy =$

$$= \frac{1}{2} y - \frac{1}{4} \sin 2y + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{8} \sin(2x^2) + C.$$

77. Fie $\cos x = t^3$, $-\sin x \, dx = 3t^2 \, dt$

$$I = \int \sin^4 x \sqrt[3]{\cos x} \sin x \, dx = -\int (1 - t^6)^2 t \cdot 3t^2 \, dt =$$

$$= -3 \int (t^{15} - 2t^9 + t^3) \, dt =$$

$$= -\frac{3}{16} t^{16} + \frac{3}{5} t^{10} - \frac{3}{4} t^4 + C, \text{ unde } t = \sqrt[3]{\cos x}.$$

78. $I = \int \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} \cdot (\operatorname{tg} x)' dx =$

$$= 2 \sqrt{\operatorname{tg} x} + C.$$

79. Fie $t^2 = \operatorname{tg} x$. $I = 2\int \frac{dt}{1+t^4} =$

$$= 2\int \frac{dt}{(t^2+\sqrt{2}t+1)(t^2-\sqrt{2}t+1)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int\left(\frac{t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1} - \frac{t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right)dt =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}t}{t^2-1} + C, \text{ unde}$$

$$t = \sqrt{\operatorname{tg} x}.$$

80. $I = \int \cos x \cdot \frac{1+\cos 6x}{2}dx =$

$$= \frac{1}{2}\int\left[\cos x + \frac{1}{2}(\cos 7x + \cos 5x)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{20}\sin 5x + \frac{1}{28}\sin 7x + C.$$

81. $\frac{1}{24}\cos 6x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{8}\cos 2x + C.$

82. $3\sin x + 2\cos x = a(2\sin x + 3\cos x) +$
$+ b(2\sin x + 3\cos x)'$ deci:

$$\begin{cases} 2a - 3b = 3 \\ 3a + 2b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{12}{13} \\ b = -\frac{5}{13} \end{cases}$$

$$\int \frac{3\sin x + 2\cos x}{2\sin x + 3\cos x}dx = \int\left[\frac{12}{13} - \frac{5}{13}\frac{(2\sin x + 3\cos x)'}{2\sin x + 3\cos x}\right]dx =$$

$$= \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}\ln|2\sin x + 3\cos x| + C.$$

83. Împărțind expresia prin $\cos^2 x$, obținem:

$$\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{6 + \frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{4 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{(\operatorname{tg} x)'}{4 + \operatorname{tg}^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{2}\right) + C.$$

84. Fie $t = \operatorname{tg} x$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$; $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$,

$$dx = \frac{1}{1+t^2}dt \Rightarrow I = \int \frac{1}{3t^2+5}dt = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2}dt =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}t\right) + C = \frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{tg} x\right) + C.$$

85. $\frac{1}{(2-\sin x)(3-\sin x)} = \frac{1}{2-\sin x} - \frac{1}{3-\sin x}$

obținem:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{2\sqrt{2}} + C.$$

86. Efectuăm substituția $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$

$$\int \frac{e^x}{(1+e^{2x})^2}dx = \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = I$$

Pentru a determina primitiva, integrăm prin părți:

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{t}{1+t^2} + \int \frac{2t^2\,dt}{(1+t^2)^2} =$$

$$= \frac{t}{1+t^2} + 2\int \frac{1+t^2-1}{(1+t^2)^2}dt = \frac{t}{1+t^2} + 2\int \frac{dt}{1+t^2} - 2I.$$

deci $\operatorname{arctg} t = \frac{t}{1+t^2} + 2\operatorname{arctg} t - 2I \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} t + \frac{t}{1+t^2}\right) + C, \text{ unde } t = e^x.$$

87. Fie $e^{\frac{x}{2}} = t$ atunci $I = 2\int \frac{dt}{t^4+t^2} = 2\int\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2+1}\right)dt \Rightarrow$

$$= 2\cdot\left(-\frac{1}{t} - \operatorname{arctg} t\right) + C = -2\left(\frac{1}{e^{\frac{x}{2}}} + \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}\right) + C.$$

88. Fie $e^{\frac{x}{6}} = t \Rightarrow dx = 6\frac{dt}{t} \Rightarrow$

$$I = 6\int \frac{t\,dt}{1+t^2} = 3\int \frac{(1+t^2)'}{1+t^2}\,dt =$$

$$= 3\ln|1+t^2| + C = 3\ln\left|1+e^{\frac{x}{3}}\right| + C.$$

89. Efectuăm substituția: $e^x = t \Rightarrow e^x\,dx = dt$.

$$I = \int \frac{t^3}{(t+1)t}\,dt = \int\left(t - 1 + \frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= \frac{e^{2x}}{2} - e^x + \ln(e^x+1) + C.$$

90. Fie $e^x = t \Rightarrow x = \ln t \Rightarrow dx = \frac{1}{t}\,dt$.

$$I = \int \frac{t^2-1}{(t^2+1)(t^2-t+1)}\,dt =$$

$$= \int\left(-\frac{2t}{t^2+1} + \frac{2t-1}{t^2-t+1}\right)dt = \ln\frac{t^2-t+1}{t^2+1} + C =$$

$$= \ln\frac{e^{2x}-e^x+1}{e^{2x}+1} + C.$$

91. $\frac{3x}{8} + \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sh} 4x}{32} + C.$

92. $I = \int\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 dx =$

$$= \frac{1}{16}\int (e^{2x} - e^{-2x})^2\,dx = \frac{1}{16}\int (e^{4x} + e^{-4x} - 2)\,dx =$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}e^{4x} - \frac{1}{4}e^{-4x} - 2x\right) + C =$$

$$= \frac{1}{32}\cdot\frac{e^{4x} - e^{-4x}}{2} - \frac{x}{8} + C = \frac{\operatorname{sh} 4x}{32} - \frac{x}{8} + C.$$

93. $I = 16\int \frac{1}{e^{4x} + e^{-4x} - 2}\,dx = 16\int \frac{e^{4x}}{e^{8x} - 2e^{4x} + 1}\,dx =$

$$= 16\int \frac{e^{4x}}{(e^{4x}-1)^2}\,dx = 4\int \frac{(e^{4x}-1)'}{(e^{4x}-1)^2}\,dx =$$

$$= -4\cdot\frac{1}{e^{4x}-1} + C = -4\cdot\frac{1}{(e^{2x}-1)(e^{2x}+1)} =$$

$$= -4\cdot\frac{e^{2x}}{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})} = -\frac{e^{2x}}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x} + C =$$

$$= \frac{-2e^{2x}}{\operatorname{sh} 2x} + C.$$

94. $\ln(\operatorname{ch} x) - \frac{\operatorname{th}^2 x}{2} + C.$

95. Cum $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \Rightarrow I = \int \frac{dx}{2\operatorname{sh}^2 x + 1} =$

$$= 2\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}+1}\,dx = \int \frac{(e^{2x})'}{(e^{2x})^2+1}\,dx = \operatorname{arctg}(e^{2x}) + C.$$

96. $I = \int \frac{dx}{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - 1} = -\frac{1}{2}\int (e^{2x} + 1)\,dx =$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x} + x\right) + C = -\frac{1}{2}\left(\operatorname{sh}^2 x + \frac{\operatorname{sh} 2x}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} + x\right) + C = -\frac{\operatorname{sh}^2 x}{2} - \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} - \frac{x}{2} + C_1.$$

97. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln\left(\sqrt{2}\cdot \operatorname{ch} x\right)+\sqrt{\operatorname{ch} 2x}\right]+C.$

98. Efectuăm substituția:

$$\sqrt{x^2+x+1}=x+t\Rightarrow x=\frac{t^2-1}{1-2t}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}x=-2\cdot\frac{t^2-t+1}{(1-2t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}=2\int\frac{\mathrm{d}t}{t(t-2)}=\ln\left|\frac{t-2}{t}\right|,$$

unde $t=\sqrt{x^2+x+1}-x.$

99. $-\frac{3}{2\left(2x-1-2\sqrt{x^2-x+1}\right)}-\frac{3}{2}\ln\left|2x-1-\right.$

$\left.-2\sqrt{x^2-x+1}\right|+2\ln\left|x-\sqrt{x^2-x+1}\right|+C.$

100. $\frac{1-\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+C.$

101. Efectuăm substituția:

$$\sqrt{1+x^2}=t+x\Rightarrow x=\frac{1-t^2}{2t}\Rightarrow \mathrm{d}x=-\frac{t^2+1}{2t^2}\,\mathrm{d}t\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{4}\int\frac{(1-t^2)^2}{t^3}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2t^2}-2\ln t\right)+$$

$$+C,\ \text{unde } t=\sqrt{1+x^2}-x.$$

102. Efectuăm substituția:

$1+x^2=t^2$ iar limitele de integrare vor fi:

$$t=1,\ t=\sqrt{2}.$$

$$I=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t}=\sqrt{2}-1-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\ln 2.$$

103. Efectuăm substituția:

$$\sqrt{1-x^2}=t(1+x)\Rightarrow x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{-4t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$$

$$I=-\int_0^1\mathrm{d}t=-1$$

104. Efectuăm substituția:

$$x^2=t;\quad I=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{t\,\mathrm{d}t}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left[(1+t)^{-\frac{1}{2}}-(1+t)^{-\frac{3}{2}}\right]\mathrm{d}t=\frac{3}{\sqrt{2}}-2.$$

105. $\sqrt{1-x^2}=xz-1\Rightarrow x=\frac{2z}{z^2+1}\Rightarrow \mathrm{d}x=-2\cdot\frac{z^2-1}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z$

$$I=-\int\frac{\mathrm{d}z}{z}=\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{1-x^2}}+C.$$

106. Fie $x=t^6,\ \mathrm{d}x=6t^5\,\mathrm{d}t\Rightarrow$

$$I=6\int\frac{t^5}{t^2(t+1)}\,\mathrm{d}t=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=$$

$$=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+C\ \text{unde } t=\sqrt[6]{x}.$$

107. Fie $x=t^3\Rightarrow \mathrm{d}x=3t^2\,\mathrm{d}t\Rightarrow$

$$I=\int\frac{t^3-1}{t+1}\cdot 3t^2\,\mathrm{d}t=3\int\left(t^4-t^3+t^2-2t+2-2\cdot\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t\Rightarrow$$

$$=3\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}-t^2+2t-2\ln|t+1|\right)+C,\ \text{unde } t=\sqrt[3]{x}.$$

108. Fie $\frac{x-1}{x+1}=t^2\Rightarrow x=\frac{1+t^2}{1-t^2},\ \mathrm{d}x=\frac{4t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t\Rightarrow$

$$I=\int\frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot t\cdot\frac{4t}{(1-t^2)^3}\,\mathrm{d}t=4\int\frac{t^4+t^2}{(1-t)^4(1+t)^4}\,\mathrm{d}t.$$

Descompunînd fracția compusă într-o sumă de fracții elementare și substituind pe $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ obținem primitiva:

$$I = \frac{\sqrt{x^2-1}}{2}(x-2) + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C.$$

109. $\frac{1}{3}\ln\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2} + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}} + \frac{2z}{z^3-1} + C$

unde

$$z = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$$

110. $-\frac{\sqrt{2x+3}}{x} + C.$

111. Fie $\sqrt{1-x^2} = t \Rightarrow x\,dx = -t\,dt \Rightarrow$

$$I = -\int \frac{(1-t^2)^2}{t} t\,dt = -t + \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + C \Rightarrow$$

$$I = -\frac{8+4x^2+3x^4}{15}\sqrt{1-x^2} + C.$$

112. $\left(\frac{5}{16}x - \frac{5}{24}x^3 + \frac{1}{6}x^5\right)\sqrt{1+x^2} -$

$$-\frac{5}{16}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C.$$

113. $\frac{2x-1}{4}\sqrt{x^2-x+1} + \frac{19}{8}\ln(2x-1+$

$$+ 2\sqrt{x^2-x+1}) + C.$$

114. $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2} + \frac{1}{2}\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+2}) + C.$

115. $\frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x} - \frac{1}{8}\ln|2x+1+2\sqrt{x^2+x}| + C.$

116. $I = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{(x-1)(x-2)}} = \int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}}.$

Fie $\frac{x-2}{x-1} = t^2$ deci: $x = \frac{2-t^2}{1-t^2}$, $dx = \frac{2t}{(1-t^2)^2}dt$

$$\Rightarrow I = \int \frac{1}{\left(\frac{2-t^2}{1-t^2}-1\right)^2 \cdot t} \cdot \frac{2t}{(1-t^2)^2}dt =$$

$$= \int 2\,dt = 2t + C = 2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + C.$$

117. $\frac{x-1}{4\sqrt{x^2-2x+5}} + C.$

118. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} + C.$

119. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right| + C.$

Reamintesc: calculul primitivelor funcțiilor binome se reduce la calculul primitivelor funcțiilor raționale, numai în cazurile stabilite de matematicianul rus Cebîșev:

120. $I = \int x^m(ax^n+b)^p dx.$

$a \neq 0$, $ax^n + b > 0$, m, n, p, numere raționale.

1. p număr întreg. Se face substituția:

$\sqrt[r]{x} = z$, unde r este multiplul comun al numitorilor lui m și n.

2. $\frac{m+1}{n}$ număr întreg. Se face substituția:

$ax^n + b = z^k$, unde k este numitorul lui p.

3. $\frac{m+1}{n} + p$ număr întreg. Se face substituția

$a + bx^{-n} = z^k$, unde k este numitorul lui p.

Cum $m=-1,\ n=2,\ p=-\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{m+1}{n}=0$, deci vom efectua substituția: $1+x^2=z^3;\ x=\sqrt{z^3-1}$;

$$dx=\frac{3z^2}{2\sqrt{z^3-1}}dz.$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}=\frac{3}{2}\int\frac{z}{z^3-1}dz;$$

$$\frac{z}{z^3-1}=\frac{A}{z-1}+\frac{Bz+C}{z^2+z+1}\Rightarrow A=-B=C=\frac{1}{3}.$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}=\frac{1}{2}\ln\frac{|z-1|}{\sqrt{z^2+z+1}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)^{3/2}}{|x|}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+x^2}+1}{\sqrt{3}}+C.$$

121. Vom efectua substituția:

$$x^{-4}+1=z^4\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt[4]{z^4-1}}\Rightarrow dx=-\frac{z^3\,dz}{\sqrt[4]{(z^4-1)^5}},$$

deci $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\frac{z^2\,dz}{z^4-1}$

$$\frac{z^2}{z^4-1}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+1}+\frac{Cz+D}{z^2+1}\Rightarrow\begin{cases}A=-B=D=1\\C=0\end{cases}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}z+C\text{ unde}$$

$$z=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}.$$

122. Cum $m=5,\ n=3,\ p=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{m+1}{n}=2$ deci se efectuează substituția $1+x^3=t^3$ obținînd:

$$I=\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}+C.$$

123. Cum $m=\frac{3}{2},\ n=1,\ p=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{m+1}{n}+p=3$ deci se efectuează substituția:

$$\frac{1+x}{x}=t^2\Rightarrow x=\frac{1}{t^2-1},\ dx=\frac{-2t}{(t^2-1)^2}dt\Rightarrow$$

$$I=-2\int\frac{t^2}{(t^2-1)^4}dt=-2\int\frac{t^2}{(t-1)^4(t+1)^4}dt.$$

Descompunînd fracția în fracții simple și substituind $t=\sqrt[3]{\frac{1+x}{x}}$, obținem:

$$I=\frac{1}{3}(x+x^2)^3-\frac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2}+$$

$$+\frac{1}{8}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})+C.$$

124. Cum $m=-\frac{1}{2},\ n=\frac{1}{4},\ p=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{m+1}{n}=2\in\mathbf{Z}$, vom efectua substituția

$$\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}=t\Rightarrow x=(t^3-1)^4\Rightarrow$$

$$I=12\int t^3(t^3-1)\,dt\Rightarrow$$

$$I=\frac{3}{7}(4\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-3)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}+C.$$

125. $12\left(\frac{\sqrt[3]{a^{13}}}{13}-\frac{3\sqrt[3]{a^{10}}}{10}+\frac{3\sqrt[3]{a^7}}{7}-\frac{\sqrt[3]{a^4}}{4}\right)+C,$

unde $a=1+\sqrt[4]{x}$

126. Cum $\frac{m+1}{n}=0$, se efectuează substituția $1-x^2=t^2$

$$\Rightarrow dx=-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{1}{t^2-1}\,dt = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1}\right| + C = \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + C.$$

127. $-\arcsin\dfrac{2-x}{x\sqrt{5}} + C.$

128. $\arcsin\dfrac{2-x}{(1-x)\sqrt{2}} + C$ unde $x > \sqrt{2}$.

129. $-\sqrt{1-4\ln x - \ln^2 x} - 2\arcsin\dfrac{2+\ln x}{\sqrt{5}} + C.$

130. Cum $m = -1,\ n = 5,\ p = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow$

$\dfrac{m+1}{n} = 0$, deci vom efectua substituția:

$$t = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^5}} \Rightarrow x = \sqrt[5]{\frac{1-t^3}{t^3}}$$

$$dx = -\frac{3}{5}\cdot\frac{dt}{t^4\sqrt[5]{\left(\frac{1-t^3}{t^3}\right)^4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{3}{5}\int\frac{1}{t^3-1}\,dt = \frac{3}{5}\left[\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t-1} - \frac{1}{3}\int\frac{t-2}{t^2+t+1}\,dt\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{10}\ln\frac{(z-1)^2}{z^2+z+1} + \frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}} \text{ unde}$$

$$z = \sqrt[3]{1+x^5}.$$

131. $-\dfrac{1}{8}\dfrac{4+3x^3}{x(2+x^3)^{2/3}} + C.$ **132.** $-2\sqrt[3]{\left(x^{-\frac{3}{4}}+1\right)^2} + C.$

133. Fie: $I_{n-1} = \int\dfrac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}} = u\\ dx = dv\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{-2(n-1)x}{(a^2+x^2)^n}\,dx = du\\ x = v\end{cases}$$

$$I_{n-1} = \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int\frac{x^2}{(a^2+x^2)^n}\,dx =$$

$$= \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} -$$

$$- 2a^2(n-1)\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n} \Rightarrow I_{n-1} = \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} +$$

$+ 2(n-1)\cdot I_{n-1} - 2a^2(n-1)\cdot I_n$. Deci relația de recurență este $I_n = \dfrac{x}{2(a^2+x^2)^{n-1}\cdot a^2(n-1)} + \dfrac{2n-3}{2n-2}\cdot\dfrac{1}{a^2}\cdot I_{n-1}$. Condiția inițială este $I_1 = \int\dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$. Conform relației de recurență și a condiției inițiale vom determina integralele din șirul de integrale, deci $I_2 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x}{a^2(x^2+a^2)} +$

$+ \dfrac{1}{2a^2}\cdot\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$ etc.

134. $I_n = \dfrac{1}{a^2}\int\dfrac{dx}{(a^2-x^2)^{n-1}} + \dfrac{1}{a^2}\int\dfrac{x^2\,dx}{(a^2-x^2)^n} =$

$$= \frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{a^2(a^2-x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1},$$

unde primitiva integralei $\int\dfrac{x^2\,dx}{(a^2-x^2)^n}$ a fost calculată prin părți.

135. Fie $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$, $y' = \dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Derivînd expresia: $x^{n-1}y$, obținem:

$$(x^{n-1}y)' = na\cdot\frac{x^n}{y} + \left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot b\cdot\frac{x^{n-1}}{y} + (n-1)\cdot c\cdot\frac{x^{n-2}}{y}$$

și integrînd expresia obținem:

$$x^{n-1}\cdot y = na\cdot I_n + \left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot b\cdot I_{n-1} + (n-1)\cdot c\cdot I_{n-2}$$ deci

relația de recurență este: $I_n = \frac{x^{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c}}{na} - \frac{n-1}{n\cdot a}\cdot c\cdot I_{n-2} - \frac{2n-1}{2na}\cdot b\cdot I_{n-1}$.

136. $I_n = \frac{x^{n-1}\sqrt{a^2+x^2}}{n} - \frac{n-1}{n}\cdot a^2\cdot I_{n-2}$, $n \geqslant 2$.

137. $I_n = \frac{x^{n-1}\sqrt{a^2-x^2}}{n} + \frac{n-1}{n}\cdot a^2\cdot I_{n-2}$, $n \geqslant 2$.

138. $I_n = -\frac{x^{n-1}\sqrt{a^2-x^2}}{n} + \frac{n-1}{n}\cdot a^2\cdot I_{n-2}$, $n \geqslant 2$.

139. $I_n = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{(n-1)a^2x^{n-1}} - \frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot I_{n-2}$, $n \geqslant 2$.

140. $I_n = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{(n-1)a^2\,x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot I_{n-2}$, $n \geqslant 2$.

141. $I_n = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{(n-1)a^2\,x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot I_{n-2}$, $n \geqslant 2$.

142. I_n se calculează prin părți, notînd:

$$\begin{cases}(\ln x)^n = f\\ 1 = g'\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{n}{x}(\ln x)^{n-1} = f'\\ x = g\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_n = x(\ln x)^n - n\cdot I_{n-1},\quad n \geqslant 1.$$

143. Se integrează prin părți:

$$\begin{cases}x^m = f'\\ (\ln x)^n = g\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{x^{m+1}}{m+1} = f\\ \frac{n}{x}(\ln x)^{n-1} = g'\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{m,n} = \frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^n - \frac{n}{m+1}I_{m,n-1}.$$

144. Se integrează prin părți:

$$\begin{cases}e^{-x} = f'\\ x^n = g\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-e^{-x} = f\\ nx^{n-1} = g'\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_n = -x^n e^{-x} + n I_{n-1},\ n \geqslant 1.$$

145. Se integrează prin părți și obținem:

$$I_n = -\frac{e^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}I_{n-1},\ n \geqslant 1,$$ iar $I_1 = \int\frac{e^x}{x}dx$ nu se poate determina prin cuadraturi, primitiva determinîndu-se eventual prin dezvoltare în serie Taylor a funcției $\frac{e^x}{x}$, apoi integrînd în parte fiecare termen al sumei Taylor.

146. Vom calcula prin părți:

$$\begin{cases}\sin^{n-1}x = f\\ \sin x = g'\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(n-1)\sin^{n-2}x\cos x = f'\\ -\cos x = g\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_n = -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)\int\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx =$$

$$= -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)\int(\sin^{n-2}x - \sin^n x)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_n = -\frac{\sin^{n-1}x\cdot\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}I_{n-2},\ n \geqslant 2.$$

Relația de recurență stabilită este adevărată și pentru $n \in \mathbf{Z}$:

$$I_n = \int\frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}.$$

147. $I_n = \dfrac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \dfrac{n-2}{n-1} \cdot I_{n-2}$.

148. $\begin{cases} \cos^{n-1} x = u \\ \cos x\, dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -(n-1)\cos^{n-2} x \sin x\, dx = du \\ \sin x = v \end{cases}$

$$\int \cos^n x\, dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \sin^2 x\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \cos^n x\, dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x\, dx -$$

$$-(n-1) \int \cos^n x\, dx.$$

deci

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx,$$

iar formula de recurență este:

$$I_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}.$$

i) $n > 0$, pentru n par $\Rightarrow \int dx = x + C$;

pentru n impar $\Rightarrow \int \cos x\, dx = \sin x + C$.

$$I_0 = \frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{x}{2} + C$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{2} \cdot I_0,$$

$$I_4 = \frac{1}{4} \cos^3 x \sin x + \frac{3}{4} \cdot I_2, \text{ etc.}$$

ii) $n < 0$. Relația de recurență este:

$$\frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx = -\frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \int \cos^n x\, dx;$$

$$\int \cos^{n-2} x\, dx = -\frac{1}{n-1} \cos^{n-1} x \cdot \sin x + \frac{n}{n-1} \int \cos^n x\, dx$$

pentru $n - 2 = -m$ avem:

$$\int \frac{dx}{\cos^m x} = \frac{\sin x}{(m-1)\cos^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\cos^{m-2} x}.$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{\cos x} = -\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right].$$

149. Putem stabili două relații de recurență, una pentru calculul integralei prin micșorarea gradului funcției sin și a doua prin micșorarea gradului funcției cos.

Pentru primul caz:

$I_{m,n} = \int \sin^{m-1} x \cos^n x \sin x\, dx$, calculînd prin părți:

$$\begin{cases} \sin^{m-1} x = f \\ \cos^n x \sin x = g' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m-1)\sin^{m-1} x \cos x = f' \\ -\dfrac{\cos^{n+1} x}{n+1} = g \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{m,n} = \frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}$$

Analog, pentru al doilea caz obținem:

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}.$$

Dacă în integrala $I_{m,n}$ considerăm $m = -n$ se obțin integralele:

$$I_n = \int \operatorname{tg}^n x\, dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}$$

$$I_n = \int \operatorname{ctg}^n x\, dx = \frac{\operatorname{ctg}^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}.$$

150. Integrăm prin părți:

$$\begin{cases} x^n = f \\ \sin ax = g' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} nx^{n-1} = f' \\ -\dfrac{1}{a} \cos ax = g \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_n = -\frac{1}{a} x^n \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax\, dx \Rightarrow$$

$$= -\frac{1}{a} x^n \cdot \cos ax + \frac{n}{a}\left(\frac{1}{a} x^{n-1} \sin ax - \frac{n-1}{a} I_{n-2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_n = -\frac{1}{a} x^n \cos ax + \frac{nx^{n-1}}{a^2} \sin ax - \frac{n(n-1)}{a^2} I_{n-2}.$$

151. Se integrează de două ori prin părți:

$$I_n = \frac{1}{a} x^n \sin ax + \frac{nx^{n-1}}{a^2} \cos ax - \frac{n(n-1)}{a^2} I_{n-2}.$$

152. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n-2} x \operatorname{tg}^2 x \, dx =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n-2} x(1 + \operatorname{tg}^2 x) \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n-2} x \, dx.$$

Integrala $\int \operatorname{tg}^{2n-2} x(1 + \operatorname{tg}^2 x)dx = \int \operatorname{tg}^{2n-2} x(\operatorname{tg} x)'dx =$

$$= \frac{\operatorname{tg}^{2n-1} x}{2n-1} + C.$$

Obținem formula de recurență: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x \, dx =$

$$= \frac{\operatorname{tg}^{2n-1} x}{2n-1}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - I_{n-1} \Rightarrow I_n = \frac{1}{2n-1} - I_{n-1}.$$

deci

$$I_{n-1} = \frac{1}{2n-3} - I_{n-2}.$$

.....

$$I_2 = \frac{1}{3} - I_1 = \frac{1}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx =$$

$$= \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}.$$

Însumînd cele $n-1$ relații și reducînd termenii asemenea obținem:

$$I_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2n-(2k-3)} - I_1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2n-(2k-3)} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

153. $I_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}^{2n} x \, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}^{2n-2} x(1 + \operatorname{ctg}^2 x)dx -$

$$- \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}^{2n-2} x \, dx, \text{ iar}$$

$$\int \operatorname{ctg}^{2n-2} x(1 + \operatorname{ctg}^2 x) \, dx = \int \operatorname{ctg}^{2n-2} x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} \, dx =$$

$$= -\int \operatorname{ctg}^{2n-2} x \cdot (\operatorname{ctg} x)' \, dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{2n-1} x}{2n-1} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J_{2n} = \int \operatorname{ctg}^{2n} x \, dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{2n-1} x}{2n-1} - J_{2(n-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_n = J_{2n}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2n-1} - I_{n-1}.$$

Aplicînd relația de recurență pentru $I_1, I_2, \ldots, I_n$ obținem:

$$I_n = \frac{1}{2n-1} - I_{n-1}$$

$$I_{n-1} = \frac{1}{2n-3} - I_{n-2}$$

.....

$$I_2 = \frac{1}{3} - I_1 = \frac{1}{3} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}^2 x \, dx =$$

$$= \frac{1}{3} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} \, dx = \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}.$$

Însumînd cele $n-1$ egalități și reducînd termenii asemenea obținem:

$$I_n = \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-3} + \ldots + \frac{1}{2n-(2n-3)} - I_1 =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2n-(2k-3)} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}^2 x \, dx =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2n-(2k-3)} - 1 + \frac{\pi}{4}.$$

154. Funcția sgn se numește funcția semn și

$$\operatorname{sgn} : \mathbf{R} \to \{-1, 0, 1\} \text{ cu } \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{pentru } x < 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \\ 1 & \text{pentru } x > 0. \end{cases}$$

$$f(x) = (2x-1) \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 2x-1 & \text{pentru } x > 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \\ -2x+1 & \text{pentru } x < 0 \end{cases}$$

$$\int_{-5}^{5} f(x)\,dx = \int_{-5}^{0} (-2x+1)\,dx + \int_{0}^{5} (2x-1)\,dx = 30+20 = 50.$$

155. $f(x) = |x-1| \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -x+1 & \text{pentru } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \\ x-1 & \text{pentru } x \in \mathbf{R} \setminus [0, 1] \end{cases}$

$$\int_{-5}^{5} f(x)\,dx = \int_{-5}^{0} (x-1)\,dx + \int_{0}^{1} (-x+1)\,dx +$$

$$+ \int_{1}^{5} (x-1)\,dx = -\frac{35}{2} + \frac{1}{2} + 8 = -9.$$

156. $f(x) = \operatorname{sgn}(x-1) + x \operatorname{sgn}(x-2)$

x	$-\infty$		1		2	$+\infty$
$\operatorname{sgn}(x-1)$	-1		0	1		1
$\operatorname{sgn}(x-2)$	-1		-1		0	1
$x \operatorname{sgn}(x-2)$	$-x$		$-x$			x
$f(x)$	$-x-1$		$-x+1$			$x+1$

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{pentru } x \in (-\infty, 1) \\ -x+1 & \text{pentru } x \in [1, 2] \\ x+1 & \text{pentru } x \in (2, \infty) \end{cases}$$

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 (-x-1)\,dx + \int_1^2 (-x+1)\,dx +$$

$$+ \int_2^3 (x+1)\,dx = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \frac{15}{2} = \frac{11}{2}.$$

157. $\operatorname{sgn}(1-x^2) = \begin{cases} -1 & \text{pentru } 1-x^2 < 0 \\ 0 & \text{pentru } 1-x^2 = 0 \\ 1 & \text{pentru } 1-x^2 > 0 \end{cases} =$

$$= \begin{cases} -1 & \text{pentru } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ 0 & \text{pentru } x \in \{-1, 1\} \\ 1 & \text{pentru } x \in (-1, 1) \end{cases}$$

$$f(x) = (x^2+1) \operatorname{sgn}(1-x^2) =$$

$$= \begin{cases} -(x^2+1), & x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ 0, & x \in \{-1, 1\} \\ x^2+1, & x \in (-1, 1) \end{cases}$$

$$\int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 -(x^2+1)\,dx = -\left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_2^3 = -\frac{22}{3}.$$

158. $f(x) = \sin x \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -\sin x & \text{pentru } x \leqslant 0 \\ \sin x & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (-\sin x)\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx =$$

$$= \cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - \cos x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

159. Funcția σ se numește treapta unitate a lui O. Heaviside și $\sigma : \mathbf{R} \to \{0, 1\}$ cu:

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x < 0 \\ 1 & \text{pentru } x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$f(x) = x^2\,\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x < 0 \\ x^2 & \text{pentru } x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

160.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$\sigma(x)$	0	1	1	
$\sigma(x-2)$	0	0	1	
$f(x) = \sigma(x) + \sigma(x-2)$	0	1	2	

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{2} 1\,dx + \int_{2}^{3} 2\,dx = 4.$$

161. $f(x) = (2x+1)\,\sigma(x+1) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x < -1 \\ 2x+1 & \text{pentru } x \geqslant -1 \end{cases}$

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} (2x+1)\,dx = (x^2+x)\Big|_{-1}^{2} = 6.$$

162. $f(x) = |\sin x|\,\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x < 0 \\ |\sin x| & \text{pentru } x \geqslant 0 \end{cases}$

Graficul funcției $|\sin x|$ este prezentat în fig. VII.162

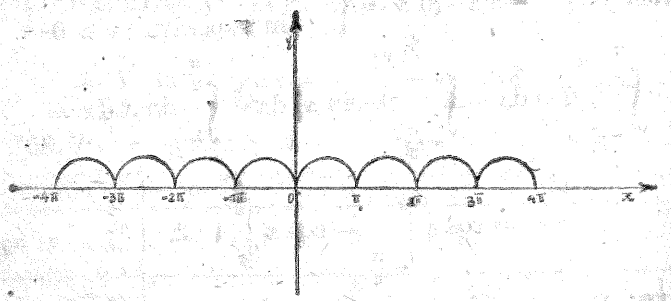


Fig. VII.162

atunci $\int_0^{4\pi} f(x)\,dx = 4\int_0^{\pi} \sin x\,dx = -4\cos x\Big|_0^{\pi} = 8.$

163. $f(x) = 1 - |\,|x| - 1\,| = \begin{cases} x+2 & \text{pentru } x \in (-\infty, -1] \\ -x & \text{pentru } x \in (-1, 0] \\ x & \text{pentru } x \in (0, 1] \\ 2-x & \text{pentru } x \in (1, \infty). \end{cases}$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{-1} (x+2)\,dx + \int_{-1}^{0} (-x)\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx +$$

$$+ \int_{1}^{2} (2-x)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{-2}^{-1} - \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1} +$$

$$+ \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{1}^{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

164. $f(x) = |x-1| + |x+1| = \begin{cases} -2x, & x \in [-2, -1] \\ 2, & x \in (-1, 1) \\ 2x, & x \in [1, 2] \end{cases}$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{-1} (-2x)\,dx + \int_{-1}^{1} 2\,dx + \int_{1}^{2} 2x\,dx = 10.$$

165. $f(x) = |x^2 - 3x + 2| = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x \in [-5, 1] \cup [2, 3] \\ -(x^2 - 3x + 2), & x \in (1, 2) \end{cases}$

$$\int_{-5}^{3} f(x) = \int_{-5}^{1} (x^2 - 3x + 2)\,dx + \int_{1}^{2} (-x^2 + 3x - 2)\,dx +$$

$$+ \int_{2}^{3} (x^2 - 3x + 2)\,dx = 91.$$

166. $f(x) = |x^2 - 9| + |x^2 - 16| =$

$$= \begin{cases} 2x^2 - 25 & \text{pentru } x \in (-\infty, -4] \cup [4, \infty) \\ 7 & \text{pentru } x \in (-4, -3] \cup [3, 4) \\ -2x^2 + 25 & \text{pentru } x \in (-3, 3) \end{cases}$$

$$\int_{-10}^{10} f(x)\,dx = \int_{-10}^{-4} (2x^2 - 25)\,dx + \int_{-4}^{-3} 7\,dx +$$

$$+ \int_{-3}^{3} (-2x^2 + 25)\,dx + \int_{3}^{4} 7\,dx + \int_{4}^{10} (2x^2 - 25)\,dx.$$

167 $f(x)=\begin{cases}0 & \text{pentru } x\in(-\infty,\ 1)\\ -2x+2 & \text{pentru } x\in[1,\ 2]\\ 2x-6 & \text{pentru } x\in(2,\ \infty)\end{cases}$

$$\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^1 0\,dx+\int_1^2(-2x+2)\,dx+\int_2^3(2x-6)\,dx=$$
$$=(-x^2+2x)\Big|_1^2+(x^2-6x)\Big|_2^3=-2.$$

168. $|\,x^2-3x+2\,|=$
$$=\begin{cases}x^2-3x+2 & \text{pentru } x\in(-\infty,\ 1]\cup[2,\ \infty)\\ -x^2+3x-2 & \text{pentru } x\in(1,\ 2)\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}2x^2-3x-7 & \text{pentru } x\in(-\infty,\ -3]\cup[3,\ \infty)\\ -3x+11 & \text{pentru } x\in(-3,\ 1]\cup[2,\ 3)\\ -2x^2+3x+7 & \text{pentru } x\in(1,\ 2).\end{cases}$$

$$\int_{-5}^{5} f(x)\,dx=\int_{-5}^{-3}(2x^2-3x-7)\,dx+\int_{-3}^{1}(-3x+11)\,dx+$$
$$+\int_1^2(-2x^2+3x+7)\,dx+\int_2^3(-3x+11)\,dx+$$
$$+\int_3^5(2x^2-3x-7)\,dx.$$

169. $|\,x^2-7x+12\,|=$
$$=\begin{cases}x^2-7x+12 & \text{pentru } x\in(-\infty,\ 3]\cup[4,\ \infty)\\ -x^2+7x-12 & \text{pentru } x\in(3,\ 4)\end{cases}$$

$$|x^2-6x+5|=\begin{cases}x^2-6x+5 & \text{pentru } x\in(-\infty,\ 1]\cup[5,\ \infty)\\ -x^2+6x-5 & \text{pentru } x\in(1,\ 5)\end{cases}$$

x	$-\infty$		1		3		4		5	
$x^2-7x+12$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
x^2-6x+5		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$

$$f(x)=\begin{cases}-x+7 & \text{pentru } x\in(-\infty,\ 1]\cup[5,\ \infty)\\ 2x^2-13x+17 & \text{pentru } x\in(1,\ 3]\cup[4,\ 5)\\ x-7 & \text{pentru } x\in(3,\ 4)\end{cases}$$

$$\int_0^{10} f(x)\,dx=\int_0^1(-x+7)\,dx+\int_1^3(2x^2-13x+17)\,dx+$$
$$+\int_3^4(x-7)\,dx+\int_4^5(2x^2-13x+17)\,dx+\int_5^{10}(-x+7)\,dx.$$

170. $|\,-x^2+3x-2\,|=$
$$=\begin{cases}-x^2+3x-2 & \text{pentru } x\in[1,\ 2]\\ x^2-3x+2 & \text{pentru } x\in(-\infty,\ 1)\cup(2,\ \infty)\end{cases}$$

$$|\,16-x^2\,|=\begin{cases}16-x^2 & \text{pentru } x\in[-4,\ 4]\\ -16+x^2 & \text{pentru } x\in(-\infty,\ -4)\cup(4,\ \infty)\end{cases}$$

x	$-\infty$		-4		1		2		4		$+\infty$
$-x^2+3x-2$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$16-x^2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	

$$f(x)=\begin{cases}2x^2-3x-14 & \text{pentru } x\in(-\infty,\ -4)\cup(4,\ \infty)\\ -3x+18 & \text{pentru } x\in[-4,\ 1)\cup(2,\ 4]\\ -2x^2+3x+14 & \text{pentru } x\in[1,\ 2]\end{cases}$$

$$\int_{-5}^{5} f(x)\,dx=\int_{-5}^{-4}(2x^2-3x-14)\,dx+\int_{-4}^{1}(-3x+18)\,dx+$$
$$+\int_1^2(-2x^2+3x+14)\,dx+\int_2^4(-3x+18)\,dx+$$
$$+\int_4^5(2x^2-3x-14)\,dx.$$

171. $f(x)=|\sin x|+|\cos x|=$
$$\begin{cases}\sin x+\cos x, & x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]\\ \sin x-\cos x, & x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right]\\ -\sin x-\cos x, & x\in\left(\pi,\ \dfrac{3\pi}{2}\right]\\ -\sin x+\cos x, & x\in\left(\dfrac{3\pi}{2},\ 2\pi\right]\end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x - \cos x)\,dx +$$

$$+ \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{2}} (-\sin x - \cos x)\,dx + \int_{\frac{5\pi}{2}}^{2\pi} (-\sin x + \cos x)\,dx = 8.$$

172. $f(x) = |\ln x| = \begin{cases} -\ln x \text{ pentru } x \in \left[\frac{1}{e}; 1\right] \\ \ln x \text{ pentru } x \in (1, e] \end{cases}$

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1} (-\ln x)\,dx + \int_1^e \ln x\,dx = 2. \quad \textbf{173.} \ \frac{5}{6}. \quad \textbf{174.} \ \frac{1}{2}.$$

175. Funcția min se numește minim și min: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin: $\min(a, a) = a$

$$\min(a, b) = \begin{cases} a & \text{pentru } a \leqslant b \\ b & \text{pentru } b < a \end{cases}$$

$$\min(a, b, c) = \begin{cases} a & \text{pentru } a \leqslant b \text{ și } a \leqslant c \\ b & \text{pentru } b < a \text{ și } b \leqslant c \\ c & \text{pentru } c < a \text{ și } c < b \end{cases}$$

analog va fi definită funcția minim pentru 4, 5,... elemente.

$$f(x) = \min(x, x^2) = \begin{cases} x & \text{pentru } x \leqslant x^2 \\ x^2 & \text{pentru } x^2 < x \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x & \text{pentru } x \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty) \\ x^2 & \text{pentru } x \in (0, 1). \end{cases}$$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} x\,dx + \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 x\,dx = -\frac{1}{6}.$$

176. $f(x) = \min(1, x, x^2) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } 1 \leqslant x \text{ și } 1 \leqslant x^2 \\ x & \text{pentru } x < 1 \text{ și } x \leqslant x^2 \\ x^2 & \text{pentru } x^2 < 1 \text{ și } x^2 < x \end{cases} =$

$$= \begin{cases} 1 & \text{pentru } x \in (1, \infty) \\ x & \text{pentru } x \in (-\infty, 0) \\ x^2 & \text{pentru } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} x\,dx + \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 1\,dx =$$

$$= -2 + \frac{1}{3} + 1 = -\frac{2}{3}.$$

177. $f(x) = \min(\sin x, \cos x) = \begin{cases} \sin x, & \sin x \leqslant \cos x \\ \cos x, & \cos x < \sin x \end{cases} =$

$$= \begin{cases} \sin x \text{ pentru } x \in \left[2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right] \\ \cos x \quad \text{pentru } x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right), \ k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos x\,dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} \sin x\,dx =$$

$$= \frac{2 + \sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} - \frac{2 + \sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}.$$

178. Funcția max se numește funcția maxim și max: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin:

$$\max(a, a) = a$$

$$\max(a, b) = \begin{cases} a & \text{pentru } a \geqslant b \\ b & \text{pentru } b > a \end{cases}$$

$$\max(a, b, c) = \begin{cases} a & \text{pentru } a \geqslant b \text{ și } a \geqslant c \\ b & \text{pentru } b > a \text{ și } b \geqslant c \\ c & \text{pentru } c > a \text{ și } c > b \end{cases}$$

analog va fi definită funcția maxim pentru 4, 5,... elemente.

$$f(x) = \max(x + 1, 2x - 1) = \begin{cases} x+1 \text{ pentru } x+1 \geqslant 2x-1 \\ 2x-1 \text{ pentru } x+1 < 2x-1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x + 1 & \text{pentru } x \in (-\infty, 2] \\ 2x - 1 & \text{pentru } x \in (2, \infty). \end{cases}$$

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^2 (x + 1)\,dx + \int_2^4 (2x - 1)\,dx.$$

179. $f(x)=\max(1, x, x^2)=\begin{cases}1 & \text{pentru } 1\geqslant x \text{ și } 1\geqslant x^2\\ x & \text{pentru } x>1 \text{ și } x\geqslant x^2\\ x^2 & \text{pentru } x^2>1 \text{ și } x^2>x\end{cases}=$

$$=\begin{cases}1 & \text{pentru } x\in(-1,\ 1)\\ x & \text{pentru } x\in\emptyset\\ x^2 & \text{pentru } x\in(-\infty,\ -1]\cup[1,\ \infty)\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}1 & \text{pentru } x\in(-1,\ 1)\\ x^2 & \text{pentru } x\in(-\infty,\ -1]\cup[1,\infty)\end{cases}$$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=\int_{-2}^{-1} x^2\,dx+\int_{-1}^{1} 1\,dx+\int_{1}^{2} x^2\,dx=$$

$$=\frac{7}{3}+2+\frac{7}{3}=\frac{20}{3}.$$

180. $f(x)=\begin{cases}3^x & \text{pentru } 0\leqslant x\leqslant 1\\ \left(\frac{1}{3}\right)^x & \text{pentru } -1\leqslant x<0\end{cases}$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{3}\right)^x dx+\int_{0}^{1} 3^x\,dx=\frac{4}{\ln 3}.$$

181. a) i)

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f	$x-1$	$2x$	$2x$	
g	x	x	$x+1$	
$f+g$	$2x-1$	$3x$	$3x+1$	
$f-g$	-1	x	$x-1$	
$f\cdot g$	x^2-x	$2x^2$	$2x^2+2x$	
$\frac{f}{g}$	$\frac{x-1}{x}$	2	$\frac{2x}{x+1}$	

deci $s(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{pentru } x\leqslant 0\\ 3x & \text{pentru } 0<x\leqslant 2\\ 3x+1 & \text{pentru } x>2\end{cases}$

$d(x)=\begin{cases}-1 & \text{pentru } x\leqslant 0\\ x & \text{pentru } 0<x\leqslant 2\\ x-1 & \text{pentru } x>2\end{cases}$

$p(x)=\begin{cases}x^2-x & \text{pentru } x\leqslant 0\\ 2x^2 & \text{pentru } 0<x\leqslant 2\\ 2x^2+2x & \text{pentru } x>2\end{cases}$

$c(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{x} & \text{pentru } x\leqslant 0\\ 2 & \text{pentru } 0<x\leqslant 2\\ \frac{2x}{x+1} & \text{pentru } x>2\end{cases}$

iii) $\int_{-5}^{5} s(x)\,dx=\int_{-5}^{0}(2x-1)dx+\int_{0}^{2}3x\,dx+\int_{2}^{5}(3x+1)dx=$

$$=-30+6+\frac{69}{2}=\frac{21}{2}.$$

$$\int_{-5}^{5} d(x)\,dx=\int_{-5}^{0}(-1)dx+\int_{0}^{2}x\,dx+\int_{2}^{5}(x-1)dx=15.$$

$$\int_{-5}^{5} p(x)\,dx=\int_{-5}^{0}(x^2-x)\,dx+\int_{0}^{2}2x^2dx+\int_{2}^{5}(2x^2+2x)dx=$$

$$=\frac{325}{5}+\frac{16}{3}+99=\frac{951}{6}=\frac{317}{2}.$$

$$\int_{-5}^{5} c(x)\,dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon<0}}\int_{-5}^{\varepsilon}\frac{x-1}{x}\,dx+\int_{0}^{2}2\,dx+\int_{2}^{5}\frac{2x}{x+1}\,dx=$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon<0}}[\varepsilon-\ln|\varepsilon|]+5+\ln 5+4+2[x-\ln|x+1|]_2^5,$$

iar valoarea sumei nu o putem determina deoarece funcția logaritm nu este definită în punctul zero, iar $\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon < 0}} \ln|\varepsilon| = -\infty$.

b)

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f	x	1	1	
g	$-x$	$-x$	0	
$f+g$	0	$1-x$	1	
$f-g$	$2x$	$1+x$	1	
$f\cdot g$	$-x^2$	$-x$	0	
$\frac{f}{g}$	-1	$-\frac{1}{x}$	funcția nu este definită.	

deci $s(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \leqslant 0 \\ 1 - x & \text{pentru } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{pentru } x > 1 \end{cases}$

$d(x) = \begin{cases} 2x & \text{pentru } x \leqslant 0 \\ 1 + x & \text{pentru } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{pentru } x > 1 \end{cases}$

$p(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{pentru } x \leqslant 0 \\ -x & \text{pentru } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{pentru } x > 1 \end{cases}$

$c(x) = \begin{cases} -1 & \text{pentru } x \leqslant 0 \\ -\frac{1}{x} & \text{pentru } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$

182. i)

a) Pentru $x \leqslant -2$, $g(x) = x^2 > 0$, iar diagrama compunerii este:

$$(-\infty, -2] \xrightarrow{g(x)=x^2} \underbrace{[4, \infty) \cap (0, \infty)}_{[4, \infty)} \xrightarrow{f(x)=7x} [0, \infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 7g(x) = 7x^2.$$

Pentru $x > -2$, $g(x) = 2x - 1$, $g(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ și se vor analiza două intervale conform semnului dat de rădăcina ecuației $g(x) = 0$:

fie $x \in \left(-2, \frac{1}{2}\right]$

$$\left(-2, \frac{1}{2}\right] \xrightarrow{g(x)=2x-1} \underbrace{(-5, 0] \cap (-\infty, 0]}_{(-5, 0]} \xrightarrow{f(x)=2x-3} (-\infty, -3] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) - 3 = 2(2x - 1) - 3 = 4x - 5.$$

fie $x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

$$\left(\frac{1}{2}, \infty\right) \xrightarrow{g(x)=2x-1} \underbrace{(0, \infty) \cap (0, \infty)}_{(0, \infty)} \xrightarrow{f(x)=7x} (0, \infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 7g(x) = 14x - 7.$$

deci $h(x) = (f \circ g)(x) = \begin{cases} 7x^2 & \text{pentru } x \in (-\infty, -2] \\ 4x - 5 & \text{pentru } x \in \left(-2, \frac{1}{2}\right] \\ 14x - 7 & \text{pentru } x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right). \end{cases}$

Pentru $x \leqslant 0 \Rightarrow f(x) = 2x - 3$, iar ecuația $2x - 3 = 0$ nu are rădăcini pe intervalul considerat $(-\infty, 0]$

$$(-\infty, 0] \xrightarrow{f(x)=2x-3} \underbrace{(-\infty, -3] \cap (-\infty, -2]}_{(-\infty, -3]} \xrightarrow{g(x)=x^2} [4, \infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 = 4x^2 - 12x + 9.$$

Pentru $x > 0 \Rightarrow f(x) = 7x$, iar ecuația $7x = 0$ nu are rădăcini pe intervalul considerat $(0, \infty)$

$$(0, \infty) \xrightarrow{f(x)=7x} \underbrace{(0, \infty) \cap (-2, \infty)}_{(0, \infty)} \xrightarrow{g(x)=2x-1} (-5, \infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x) - 1 = 14x - 1,$$

deci $p(x) = (g \circ f)(x) = \begin{cases} 4x^2 - 12x + 9 & \text{pentru } x \leqslant 0 \\ 14x - 1 & \text{pentru } x > 0. \end{cases}$

Observație: pentru stabilirea codomeniului este indicat a se trasa graficul funcției.

Altă metodă de lucru:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\begin{cases}2\,g(x)-3 & \text{pentru } g(x)\leqslant 0\\ 7\,g(x) & \text{pentru } g(x)>0\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}2x^2-3 & \text{pentru } g(x)\leqslant 0 \text{ și } x\leqslant -2\\ 2(2x-1)-3 & \text{pentru } g(x)\leqslant 0 \text{ și } x>-2\\ 7x^2 & \text{pentru } g(x)>0 \text{ și } x\leqslant -2\\ 7(2x-1) & \text{pentru } g(x)>0 \text{ și } x>-2\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}2x^2-3 & \text{pentru } x^2\leqslant 0 \text{ și } x\leqslant -2\\ 4x-5 & \text{pentru } 2x-1\leqslant 0 \text{ și } x>-2\\ 7x^2 & \text{pentru } x^2>0 \text{ și } x\leqslant -2\\ 14x-7 & \text{pentru } 2x-1>0 \text{ și } x>-2\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}4x-5 & \text{pentru } x\in\left(-2,\ \frac{1}{2}\right]\\ 7x^2 & \text{pentru } x\in(-\infty,\ -2]\\ 14x-7 & \text{pentru } x\in\left(\frac{1}{2},\ \infty\right).\end{cases}$$

b) $h(x)=(f\circ g)(x)=\begin{cases}(4x-2)^2-1 & \text{pentru } x\in(-\infty,\ 0]\\ (3x^2-2)^2-1 & \text{pentru } x\in\left(0,\ \sqrt{\frac{2}{3}}\right]\\ -5(3x^2-2)-1 & \text{pentru } x\in\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\infty\right)\end{cases}$

$p(x)=(g\circ f)(x)=\begin{cases}3(x^2-1)^2-2 & \text{pentru } x\in(-\infty,\ -1)\\ 4(x^2-1)-2 & \text{pentru } x\in[-1,\ 0]\\ 4(-5x-1)-2 & \text{pentru } x\in(0,\ \infty).\end{cases}$

c) $h(x)=(f\circ g)(x)=$

$$=\begin{cases}(5x-2)^2+6(5x-2) & \text{pentru } x\in\left(-\infty,\ -\frac{1}{5}\right)\\ -2(5x-2)-5 & \text{pentru } x\in\left[-\frac{1}{5},\ 1\right]\\ -2(x^2-2x+4)-5 & \text{pentru } x\in(1,\ \infty).\end{cases}$$

$p(x)=(g\circ f)(x)=$

$$=\begin{cases}(x^2+6x)^2-2(x^2+6x)+4 & \text{pentru } x\in(-\infty,\ -6)\\ 5(x^2+6x)-2 & \text{pentru } x\in[-6,\ -3]\\ 5(-2x-5)-2 & \text{pentru } x\in(-3,\ \infty)\end{cases}$$

d) $f(x)=\begin{cases}4x-1 & \text{pentru } x\in[0,\ \infty)\\ 2x-1 & \text{pentru } x\in(-\infty,\ 0)\end{cases}$

Pentru $x\geqslant 0$, $g(x)=x-2$, $g(x)=0\Rightarrow x=2$ și vom analiza două cazuri, în funcție de intervalele generate de rădăcina $x=2$.

Fie $x\in[0,\ 2]$

$$[0,\ 2]\xrightarrow{g(x)=x-2}\underbrace{[-2,\ 0]\cap(-\infty,\ 0)}_{[-2,\ 0)}\xrightarrow{f(x)=2x-1}(-\infty,\ -1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f\circ g)(x)=f(g(x))=2g(x)-1=2x-5$$

iar graficele funcțiilor f și g sînt prezentate în fig. VII. 182 d1

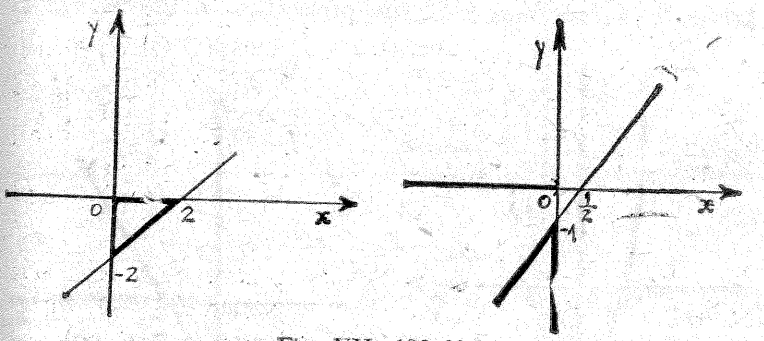


Fig. VII. 182 d1

Fie $x\in(2,\ \infty)$

$$(2,\ \infty)\xrightarrow{g(x)=x-2}\underbrace{(0,\ \infty)\cap[0,\ \infty)}_{(0,\ \infty)}\xrightarrow{f(x)=4x-1}[-1,\ \infty)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f\circ g)(x)=f(g(x))=4g(x)-1=4x-9$$

iar graficele funcțiilor f și g sînt prezentate în fig. VII. 182 d2

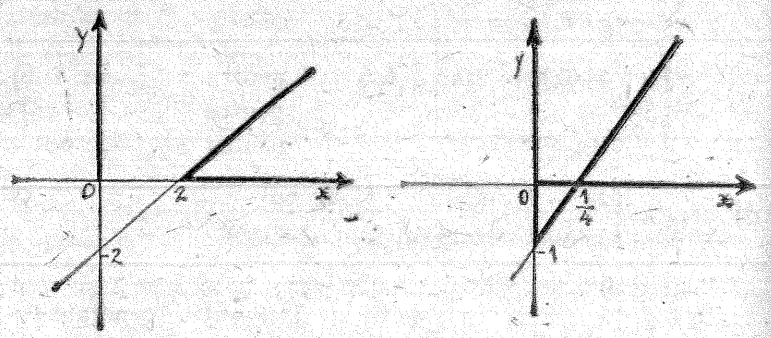


Fig. VII. 182 d2

Pentru $x < 0$, $g(x) = x^2 - 9$, $g(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 3$ și vom analiza două cazuri, în funcție de rădăcinile ± 3.

Fie $x \in (-\infty, -3)$

$$(-\infty, -3) \xrightarrow{g(x) = x^2 - 9} \underbrace{(0, \infty) \cap [0, \infty)}_{(0, \infty)} \xrightarrow{f(x) = 4x - 1} [-1, \infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 4g(x) - 1 = 4x^2 - 37,$$

iar graficele funcțiilor f și g sînt prezentate în fig. VII. 182 d3

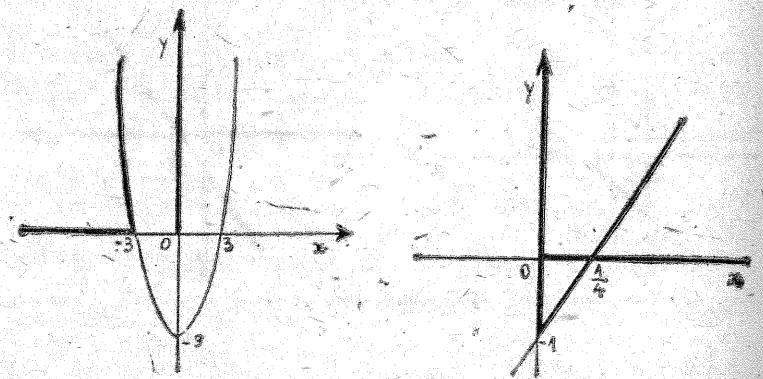


Fig. VII. 182 d3

Fie $x \in [-3, 0)$

$$[-3, 0) \xrightarrow{g(x) = x^2 - 9} \underbrace{(-9, 0] \cap (-\infty, 0)}_{(-9, 0]} \xrightarrow{f(x) = 2x - 1} (-\infty, -1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) - 1 = 2x^2 - 19;$$

deci $h(x) = (f \circ g)(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{pentru } x \in [0, 2] \\ 4x - 9 & \text{pentru } x \in (2, \infty) \\ 4x^2 - 37 & \text{pentru } x \in (-\infty, -3) \\ 2x^2 - 19 & \text{pentru } x \in [-3, 0]. \end{cases}$

Pentru $x \geqslant 0 \Rightarrow f(x) = 4x - 1$, $f(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ și vom analiza două cazuri, în funcție de intervalele determinate de rădăcina $x = \frac{1}{4}$.

Fie $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$

$$\left[0, \frac{1}{4}\right] \xrightarrow{f(x) = 4x - 1} \underbrace{[-1, 0] \cap (-\infty, 0)}_{[-1, 0)} \xrightarrow{g(x) = x^2 - 9} (-9, \infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 - 9 = 16x^2 - 8x - 8,$$

iar graficele funcțiilor f și g sînt prezentate în fig. VII. 182 d4.

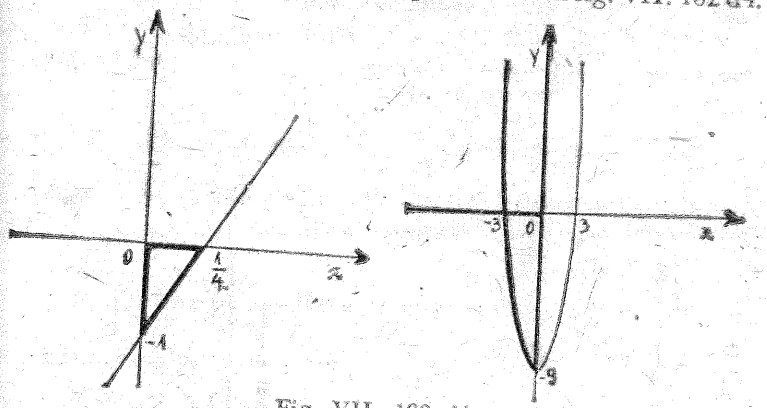


Fig. VII. 182 d4

Fie $x \in \left(\frac{1}{4}, \infty\right)$

$$\left(\frac{1}{4}, \infty\right) \xrightarrow{f(x) = 4x - 1} \underbrace{(0, \infty) \cap [0, \infty)}_{[0, \infty)} \xrightarrow{g(x) = x - 2} [-2, \infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) - 2 = 4x - 3,$$

iar graficele funcțiilor f și g sînt prezentate în fig. VII. 182 d5

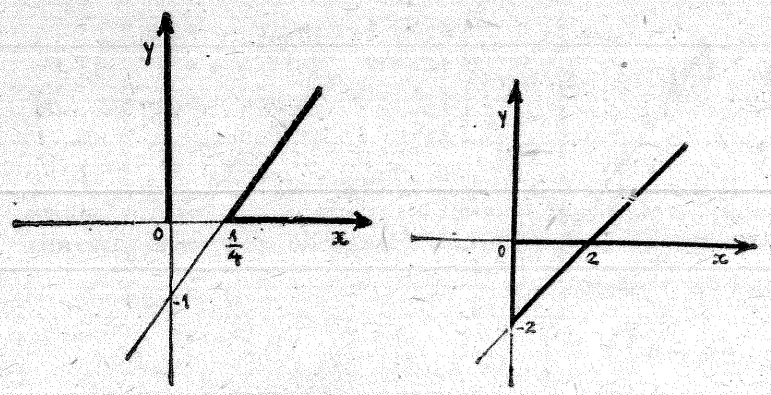


Fig. VII. 182 d5

Pentru $x < 0 \Rightarrow f(x) = 2x - 1$, $f(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ nu este rădăcina funcției pe intervalul considerat, deci vom analiza numai un interval de restricție:

$$(-\infty, 0) \xrightarrow{f(x)=2x-1} \underbrace{(-\infty, -1) \cap (-\infty, 0)}_{(-\infty, -1)} \xrightarrow{g(x)=x^2-9} (-9, \infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 - 9 = 4x^2 - 4x - 8;$$

iar graficele funcțiilor f și g sînt prezentate în fig. VII. 182 d6

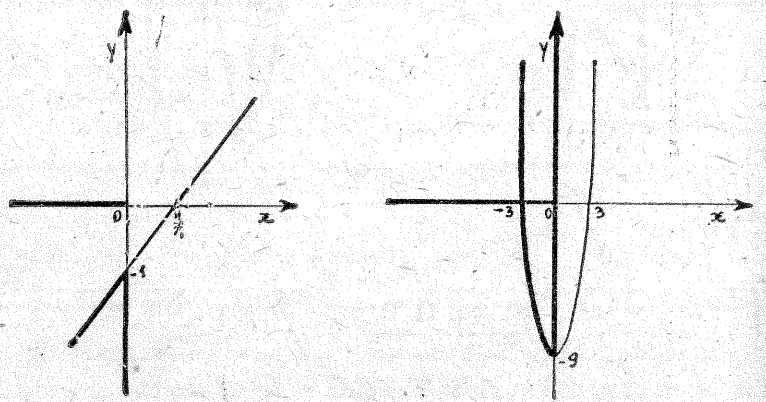


Fig. VII. 182 d6

deci $p(x) = (g \circ f)(x) = \begin{cases} 16x^2 - 8x - 8 & \text{pentru } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ 4x - 3 & \text{pentru } x \in \left(\frac{1}{4}, \infty\right) \\ 4x^2 - 4x - 8 & \text{pentru } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$

e) Conform domeniului de definiție al funcției arccos avem:

$$-1 \leqslant 4x^3 - 3x \leqslant 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+1)(2x-1)^2 \geqslant 0 \\ (x-1)(2x+1)^2 \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-1, 1]$$

$$[-1, 1] \xrightarrow{g} [-1, 1] \xrightarrow{f} [0, \pi]$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \arccos(4x^3 - 3x).$$

Cum $x \in [-1, 1]$ putem considera $x = \cos t$, $t \in [0, \pi]$ și deci

$$\arccos(4x^3 - 3x) = \arccos(4\cos^3 t - 3\cos t) = \arccos(\cos 3t) =$$

$$= \begin{cases} 3t & \text{pentru } 0 \leqslant 3t \leqslant \pi \\ 2\pi - 3t & \text{pentru } \pi < 3t \leqslant 2\pi \\ -2\pi + 3t & \text{pentru } 2\pi < 3t \leqslant 3\pi \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 3 \arccos x & \text{pentru } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \\ 2\pi - 3 \arccos x & \text{pentru } -\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{1}{2} \\ -2\pi + 3 \arccos x & \text{pentru } -1 \leqslant x < -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Deci

$$h(x) = (f \circ g)(x) = \begin{cases} -2\pi + 3 \arccos x & \text{pentru } -1 \leqslant x < -\frac{1}{2} \\ 2\pi - 3 \arccos x & \text{pentru } -\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{1}{2} \\ 3 \arccos x & \text{pentru } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

183. a) $\frac{20}{9}$; b) $2\ln\frac{6}{5}$; c) $\frac{2}{\pi}$; d) $\frac{1}{2}$; e) $2+\ln\frac{2}{e^2+1}$,

unde valoarea medie este $V_M=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

184. Cum integrala se efectuează pe $[1, 3]$, obținem:

i) $a\leqslant 1$

$$\int_1^3\frac{dx}{x-a+1}=\ln(x-a+1)\Big|_1^3=\ln\frac{4-a}{2-a}.$$

ii) $1<a\leqslant 3$

$$\int_1^3\frac{dx}{|x-a|+1}=\int_1^a\frac{dx}{-x+a+1}+\int_a^3\frac{dx}{x-a+1}=$$

$$=-\ln(-x+a+1)\Big|_1^a+\ln(x-a+1)\Big|_a^3=\ln a(4-a).$$

iii) $a>3$

$$\int_1^3\frac{dx}{-x+a+1}=-\ln(-x+a+1)\Big|_1^3=\ln\frac{a}{a-2}.$$

și $\lim\limits_{a\to\infty}I(a)=\lim\limits_{a\to\infty}\ln\frac{a}{a-2}=\ln 1=0.$

185. $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^3 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\sin^2 x)(\sin x)'\,dx=$

$$=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{11}{24},$$

deci ecuația este: $x^4+2x^3-5x^2+2=0\Rightarrow$

$$x_{1,2}=1,\quad x_{3,4}=-2\pm\sqrt{2}.$$

186. $x\in[-1, 1]$; vom efectua substituția:

$$\alpha=\arccos x\text{ cu }\alpha\in[0,\pi]$$

$$I=-\int_\pi^0|\sin n\alpha|\,d\alpha=\int_0^\pi|\sin n\alpha|\,d\alpha=$$

$$=n\cdot\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sin n\alpha\,d\alpha=-n\cdot\frac{\cos n\alpha}{n}\Big|_0^{\frac{\pi}{n}}=2,$$

Se observă din graficul funcției $|\sin nx|$ care este format din n jumătăți de sinusoidă, așezate deasupra axei Ox și egale între ele, că $\sin(n\alpha)$ se anulează de $n+1$ ori în $[0, \pi]$. Perioada principală a funcției $\sin(n\alpha)$ fiind $T=\frac{2\pi}{n}$.

187. $f(x)=\frac{1}{x}\sqrt{1-2x\cos t+x^2}\Big|_0^\pi=\frac{|x+1|-|x-1|}{x}=$

$$=\begin{cases}-\frac{2}{x} & \text{pentru } x\leqslant -1\\ 2 & \text{pentru } x\in(-1, 1)\\ \frac{2}{x} & \text{pentru } x\geqslant 1.\end{cases}$$

Funcția este continuă și are graficul din figura VII.187.

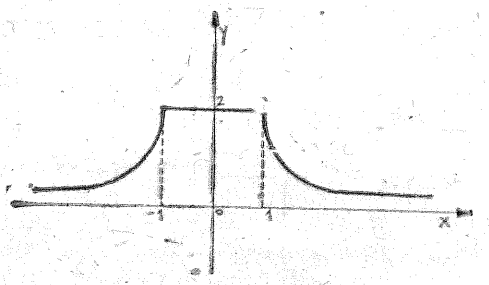


Fig. VII.18

1°	$a < -1$,	$b < -1$, $A_1 = -2\int_a^b \frac{dx}{x} = 2\ln\left\|\frac{a}{b}\right\|$ $b = -1$, $A_2 = 2\ln\|a\|$ $b \in (-1, 0)$, $A_3 = A_2 + 2\|b+1\|$ $b = 0$, $A_4 = A_2 + 2$ $b \in (0, 1)$, $A_5 = A_4 + 2b$ $b = 1$, $A_6 = A_4 + 2$ $b > 1$, $A_7 = A_6 + 2\ln b$
2°	$a = -1$	În ultimele 6 subcazuri dacă înlocuim pe a cu -1 formulele rămîn valabile.
3°	$a \in (-1, 0)$	Sînt valabile ultimele 5 subcazuri.
4°	$a = 0$	$b \in (0, 1)$, $A_8 = 2b$ $b = 1$, $A_9 = 2$ $b > 1$, $A_{10} = A_2 + 2\ln b$
5°	$a \in (0, 1)$	$b \in (0, 1)$, $A_{11} = 2(b-a)$ $b = 1$, $A_{12} = 2(1-a)$ $b > 1$, $A_{13} = A_2 + 2\ln b$
6°	$a = 1$	$b > 1$, $A_{14} = 2\ln b$
7°	$a > 1$	$b > 1$, $A_{15} = 2\ln\frac{b}{a}$.

188. $a_n = 2\int_1^n \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = 2n - 2 - 2\operatorname{arctg} n + \frac{\pi}{2}$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4\operatorname{arctg} n - \pi}{\pi}\right)^n = e^{\frac{1}{\pi}\cdot\lim\limits_{n\to\infty} n\,(4\operatorname{arctg} n - 2\pi)} =$$

$$= e^{\frac{4}{\pi}\cdot\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\operatorname{arctg} n - \frac{\pi}{2}\right)} = e^{-\frac{\pi}{4}}.$$

Fie $\operatorname{arctg} n = y$, cu $y \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\operatorname{arctg} n - \frac{\pi}{2}\right) =$

$$= \lim_{y\to\frac{\pi}{2}}\left(y - \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} y = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{y - \frac{\pi}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}\cdot\sin y\right] = -1.$$

189. Fie $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, cu $a, b, c, d \in \mathbf{R}$.

$$\frac{2b}{3} + 2d = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = A\left(-\frac{a}{2\sqrt{2}} + \frac{b}{2} - \frac{c}{\sqrt{2}} + d\right) +$$

$$+ Bd + C\left(\frac{a}{2\sqrt{2}} + \frac{b}{2} + \frac{c}{\sqrt{2}} + d\right) \Rightarrow A = B = C = \frac{2}{3}.$$

190. i) Fie $f : (-1, \infty) \to \mathbf{R}$ de forma:

$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}.$$

Cum $f(0) = 0$ și $f'(x) = \frac{x}{(1+x)^2} > 0$ pentru $x > 0$,

$f'(x) > 0$, deci f crescătoare. Deoarece $f(0) = 0$, deducem că $x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ (folosind o consecință a *teoremei lui Lagrange*) deducem că:

$$\int_1^2 \ln(1+x)\,dx > \int_1^2 \frac{x}{1+x}\,dx.$$

ii) Fie $f : [0,\infty) \to \mathbf{R}$, de forma:

$$f(x) = x\operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2);\quad f'(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} > 0.$$

Cum $f''(x) > 0$, pentru orice x real, atunci $f'(x)$ este crescătoare pe toată dreapta. Deoarece $f'(0) = 0$ și cum

$f'(x) > 0$ pentru $x > 0$, rezultă că $f(x)$ este crescătoare și cum $f(0) = 0$, înseamnă că $f(x) > 0$, pentru $x > 0$

$$\Rightarrow \int_2^{10} x \operatorname{arctg} x \, dx > \int_2^{10} \ln(1 + x^2) \, dx,$$

conform unei consecințe a *teoremei lui Lagrange.*

iii) Dacă $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \sin x < 1$ și $\sin^n x > \sin^{n+1} x$,

din monotonia funcției $\sin x$. Rezultă că:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \, dx.$$

191. i) Fie $f : \mathbf{R} \setminus \{-5\} \to \mathbf{R}$, de forma

$$f(x) = \frac{x-3}{x+5}, \quad f'(x) = \frac{8}{(x+5)^2} > 0.$$

Deci conform unei consecințe a *teoremei lui Lagrange* funcția este strict crescătoare, deci cum:

$$4 \leqslant x \leqslant 7, \text{ atunci}$$
$$f(4) \leqslant f(x) \leqslant f(7) \text{ și}$$
$$\frac{1}{9} \leqslant \frac{x-3}{x+5} \leqslant \frac{1}{3}.$$

Folosind monotonia funcției integrale obținem:

$$\int_4^7 \frac{1}{9} \, dx \leqslant \int_4^7 \frac{x-3}{x+5} \, dx \leqslant \int_4^7 \frac{1}{3} \, dx,$$

deci: $$\frac{1}{3} \leqslant \int_4^7 \frac{x-3}{x+5} \, dx \leqslant 1.$$

ii) Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, strict crescătoare.
Cum $0 \leqslant x \leqslant 1$, atunci $1 \leqslant e^{x^2} \leqslant e$.

Integrînd obținem: $\int_0^1 1 \, dx \leqslant \int_0^1 e^{x^2} \, dx \leqslant \int_0^1 e \, dx$,

deci $$1 \leqslant \int_0^1 e^{x^2} \, dx \leqslant e.$$

iii) Cum $x \in [5, 8]$, avem:

$$\frac{1}{15} = f(5) \leqslant \frac{2x-9}{2x+5} \leqslant f(8) = \frac{1}{3}$$

și aplicînd formula de medie:

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x) \, dx \leqslant M(b-a),$$

obținem:

$$\frac{1}{15} \cdot 3 \leqslant \int_5^8 \frac{2x-9}{2x+5} \, dx \leqslant \frac{1}{3} \cdot 3.$$

iv) Fie funcția $f(x) = e^{x^2} + e^{1-x^2}$, $f'(x) = 2x(e^{x^2} - e^{1-x^2})$ și $f'(x) = 0$ pentru $x \in \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{e}$	$\nearrow$	$1+e$	$\searrow$	$2\sqrt{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

Cum $x \in [0, 1]$ atunci funcția realizează valori extreme în punctele $x = 0$ și $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; deci $0 \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(0) \geqslant f(x) \geqslant f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow 1 + e \geqslant f(x) \geqslant 2\sqrt{e}$. Folosind monotonia funcției integrale obținem:

$$\int_0^1 2\sqrt{e} \, dx \leqslant \int_0^1 f(x) \, dx \leqslant \int_0^1 (1+e) \, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{e} \leqslant \int_0^1 f(x) \, dx \leqslant 1 + e.$$

Observație: primul membru se mai poate demonstra și cu ajutorul inegalităților mediilor:

$$\frac{e^{x^2} + e^{1-x^2}}{2} \geqslant \sqrt{e^{x^2} \cdot e^{1-x^2}} \Rightarrow e^{x^2} + e^{1-x^2} \geqslant 2\sqrt{e}.$$

192. $F'(x) = e^{-x}[(4b - a)\cos 4x - (4a + b)\sin 4x]$ și $F'(x) = f(x)$, pentru orice x real $\Leftrightarrow (4b - a)\cos 4x - (4a + b)\sin 4x = \cos 4x$

$$\text{deci } \begin{cases} 4b - a = 1 \\ b + 4a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{17} \\ b = \dfrac{4}{17}. \end{cases}$$

193. $f_2(x) = \displaystyle\int_1^x f_1(t)\,dt = \int_1^x dt = \frac{x-1}{1!}$

$$f_3(x) = \int_1^x f_2(t)\,dt = \frac{(x-1)^2}{2!}$$

$$f_4(x) = \int_1^x f_3(t)\,dt = \frac{(x-1)^3}{3!}$$

.....

Presupunem adevărat că:

$$f_{n+1}(x) = \frac{(x-1)^n}{n!}$$

și se demonstrează prin inducție că $f_{n+2}(x) = \dfrac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}$:

$$f_{n+2}(x) = \int_1^x f_{n+1}(t)\,dt = \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{n+1}(x) = \frac{(x-1)^n}{n!} \text{ pentru } \forall n \in \mathbf{N}.$$

Va rezulta:

$$a_n = f_{n+1}(2) = \frac{1}{n!}; \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0.$$

194. a) Cum funcția $\sin x$ este monoton crescătoare pe $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, avem: $\sin^n x > \sin^{n+1} x$ pentru $n \in \mathbf{N}$ și

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x\,dx,$$

deci $I_n > I_{n+1}$.

b) $\displaystyle\int \sin^n x\,dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx,$

deci

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}$$

și deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{I_n}{I_{n-2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1.$

Conform observației din punctul *a)*, avem

$$I_{n+1} < I_n < I_{n-1} < I_{n-2} \Rightarrow \frac{I_n}{I_{n-2}} < \frac{I_{n-1}}{I_{n-2}} < 1$$

și trecînd la limită în inegalitate, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{I_{n-1}}{I_{n-2}} = 1.$

c) Din relația de recurență: $nI_n = (n-1)\,I_{n-2}$ și înmulțind cu I_{n-1} obținem:

$$nI_n \cdot I_{n-1} = (n-1) \cdot I_{n-1} \cdot I_{n-2} = \ldots = I_1 I_0.$$

Cum $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ și $I_1 = 1$, deducem:

$$nI_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2} \text{ pentru orice } n \text{ natural.}$$

195. Cum f_n este continuă pe $[0, 1]$, rezultă că f_n este integrabilă, deci aplicînd suma Riemann obținem:

$$I_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n\,dx = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \left[1 - \left(\frac{k}{p}\right)^2\right]^n =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \left[1 - \frac{1}{p^2} k^2\right]^n \leqslant \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} 1^n$$

și $$0 \leqslant I_n \leqslant \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \underbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}_{p \text{ ori}} = 1.$$

Șirul I_n este mărginit. Vom demonstra că șirul este și monoton:

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (1-x^2)^{n+1}\,dx - \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx =$$

$$= -\int_0^1 (1-x^2)^n\, x^2\,dx \leqslant 0 \Rightarrow I_{n+1} \leqslant I_n,$$

deci este monoton descrescător. Cum șirul este monoton și mărginit este convergent.

c) Vom determina o relație de recurență:

$$I_n = \int (1-x^2)^n\,dx = \int (1-x^2)^{n-1}(1-x^2)\,dx =$$

$$= I_{n-1} - \int x^2(1-x^2)^{n-1}\,dx.$$

Integrăm prin părți:

$$\begin{cases} (1-x^2)^{n-1} = f \\ x^2 = g' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x(n-1)(1-x^2)^{n-2} = f' \\ \dfrac{x^3}{3} = g \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_n = I_{n-1} - \frac{x^3}{3}(1-x^2)^{n-1} + \frac{2(n-1)}{3}\cdot\int x^4(1-x^2)^{n-2}\,dx =$$

$$= I_{n-1} - \frac{x^3}{3}(1-x^2)^{n-1} + \frac{2(n-1)}{3}\int [(1-x^2)^2 -$$

$$- 2(1-x^2) + 1](1-x^2)^{n-2}\,dx = I_{n-1} - \frac{x^3}{3}(1-x^2)^{n-1} +$$

$$+ \frac{2(n-1)}{3}[I_{n-2} - I_{n-1} + I_{n-2}] \Rightarrow I_n = \frac{3}{5-2n}\left[\frac{7-4n}{3} I_{n-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{2(n-1)}{3} I_{n-2} - \frac{x^3(1-x^2)^{n-1}}{3}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{7-4n}{5-2n} I_{n-1} + \frac{2(n-1)}{5-2n} I_{n-2} - \frac{x^3(1-x^2)^{n-1}}{5-2n}.$$

196. a) Funcția f este pozitivă pe $[1, \infty)$.

$$e^{-t}\, t^{x-1} \geqslant 0,\ \forall\, t \in [0,\ 1] \text{ și } x \in [1, \infty).$$

$$\int_0^1 e^{-t}\, t^{x-1}\,dt \geqslant 0 \Rightarrow f(x) \geqslant 0 \text{ pentru } \forall\, x \in [1, \infty).$$

Funcția este descrescătoare pe $[1, \infty)$.

$$\forall\, x_1,\ x_2 \in [1, \infty),\quad x_1 < x_2 \Rightarrow 0 \leqslant t \leqslant 1 \Rightarrow$$

$$t^{x_1-1} \geqslant t^{x_2-1} \Rightarrow e^{-t}\, t^{x_1-1} \geqslant e^{t}\, t^{x_2-1} \Rightarrow$$

$$\int_0^1 e^{t}\, t^{x_1-1}\,dt \geqslant \int_0^1 e^{-t}\, t^{x_2-1}\,dt \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2).$$

b) Integrînd prin părți obținem:

$$f(x+1) = \int_0^1 e^{-t}\, t^x\,dt = -e^{-t}\, t^x\Big|_0^1 + x\int_0^1 e^{-t}\, t^{x-1}\,dt = xf(x) - \frac{1}{e}.$$

c) Ținînd seama de relația de la punctul b) avem:

$$f(n+1) = nf(n) - \frac{1}{e} = n\left[(n-1)f(n-1) - \frac{1}{e}\right] - \frac{1}{e} =$$

$$= n(n-1)f(n-1) - \frac{1}{e}(A_n^0 + A_n^1) = \ldots =$$

$$= n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot f(1) - \frac{1}{e}(A_n^0 + A_n^1 + \ldots + A_n^{n-1}) =$$

$$= n!\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n-1} A_n^k = n! - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n} A_n^k,$$

unde $\quad f(1) = \int_0^1 e^{-t}\,dt = 1 - \frac{1}{e}$; $n! = A_n^n$.

d) Cum $a_n = f(n+1)$ și f este o funcție descrescătoare pe $[1, \infty)$, avem:

$$f(n+1) \leqslant f(n) \text{ pentru } \forall n \in \mathbf{N}, \text{ deci } a_n \leqslant a_{n-1}.$$

Șirul este descrescător și mărginit inferior de $a_0 = 1 - \frac{1}{e}$, deci conform teoremei lui Weierstrass șirul este convergent.

CAPITOLUL VIII

SUME RIEMANN

PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

Să se calculeze limita următorului şir $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ folosind sumele Riemann:

1. $a_n = \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^{n} k^4$. **2.** $a_n = \frac{1}{n^6} \sum_{k=1}^{n} k^5$.

3. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$. **4.** $a_n = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3n^2 + k^2}$.

5. $a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n + k}$. **6.** $a_n = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n + k)^2}$.

7. $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{4n^2 - k^2}$. **8.** $a_n = n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^3 + k^3}$.

9. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n + ik}$. **10.** $a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \cdot e^{\frac{k}{n}}$.

11. $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{9n^2}{9n^2 + (3k - 1)^2}$. **12.** $a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k e^{\frac{k^2}{n^2}}$.

13. $a_n = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$. **14.** $a_n = \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{2n}$.

15. $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{k\pi}{n}$. **16.** $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg}^2 \frac{k\pi}{3n}$.

17. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k + 5n}}$.

18. $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{3k - 2}{\sqrt{9n^2 + (3k - 2)^2}}$.

19. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

20. $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n + k}}$. **21.** $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

22. $a_n = \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt[3]{\frac{n}{n + 3(k - 1)}}$.

23. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{1}{4n^2 - k^2}}$. **24.** $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$.

25. $a_n = n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n^2 + k^2)\left(\sqrt{n^2 + k^2} + n\right)}$.

26. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n + k)\sqrt{n^2 + k^2}}$.

27. $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^3} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{\sqrt{2n - k}}$.

28. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(2n + k)\sqrt{(2n + k)k}}$.

29. $a_n = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^2 \sqrt[3]{k^3 + n^3}$.

30. $a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(5n^2) + (5k - 3)^2}$.

31. $a_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sqrt[p]{i^k}}{\sqrt[p]{n^{p+k}}}$. **32.** $a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n^2 - k^2}$.

33. $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k - 1}{\sqrt{(2k - 1)^2 + (2n)^2}}$.

34. $a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \operatorname{arctg} \frac{k}{n} + \frac{\pi n}{4}$.

35. $a_n = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} \ln (k^2 + n^2) - 2(n - 1) \ln n\right]$.

36. $a_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}$.

37. $a_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(an+1)(an+2)\ldots(an+n)}$ pentru $a > 0$.

REZOLVĂRI ȘI RĂSPUNSURI

Reamintesc suma Riemann asociată funcției f, diviziunii d_n și punctelor intermediare ξ: $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{d_n}(f, \xi_k) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\ (x_k - x_{k-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, unde:

$f:[a, b] \to \mathbf{R}$ funcție continuă (deci integrabilă) σ_{d_n} suma Riemann corespunzătoare diviziunii echidistante d_n a intervalului $[a, b]$, cu punctele intermediare

$$\xi_k = a + \frac{b-a}{n}\cdot k \text{ considerate în intervalul}$$

$$\left[a + \frac{b-a}{n}(k-1),\ a + \frac{b-a}{n}k\right].$$

Caz particular: $f:[0, 1] \to \mathbf{R}$ funcție integrabilă, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

1. Fie $f:[0, 1] \to \mathbf{R}$ cu $f(x) = x^4$ și d o diviziune echidistantă a segmentului $[0, 1]$, și anume:

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n}{n} = 1.$$

Notăm punctele intermediare cu $x_i = \frac{i}{n}$, $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

Atunci $a_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^4}{n^4} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \Rightarrow f(x) = x^4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^4\ \mathrm{d}x = \frac{1}{5}.$$

2. Fie $f:[0, 1] \to \mathbf{R}$, d o diviziune echidistantă și $x_k = \frac{k}{n}$, $a_n = \frac{1}{n^6}\sum\limits_{k=1}^{n} k^5 = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5 = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$,

unde funcția f a fost aleasă de forma:

$$f(x) = x^5;\ \lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 x^5\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}.$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{3+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{3+x^2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{18}$.

5. $f:[0, 1] \to \mathbf{R}$, d o diviziune echidistantă și $x_k = \frac{k}{n}$

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

unde funcția f a fost aleasă de forma:

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x};\ \lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

6. Fie $f:[0, 1] \to \mathbf{R}$, d o diviziune echidistantă a intervalului $[0, 1]$ și punctele intermediare $x_k = \frac{k}{n}$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{1+x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{x^2}{4-x^2}\,dx =$

$$= \int_0^1 \left(-1 + \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}\right) dx = \ln 3 - 1.$$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} =$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right] dx =$$

$$= \left[\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]\Bigg|_0^1 = \frac{\ln 8 + \sqrt{3}\cdot\pi}{9}.$$

9. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{1+k\cdot\frac{i}{n}} = \int_0^1 \frac{dx}{1+kx} =$

$$= \ln \sqrt[k]{1+k}.$$

10. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\cdot e^{\frac{k}{n}} = \int_0^1 xe^x\,dx = 1,$

iar integrarea se face prin părți.

11. Fie $f:[0,\ 1]\to\mathbf{R}$, d o diviziune echidistantă a intervalului $[0,\ 1]$ și $x_k = \frac{k}{n}$

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{3k-1}{3n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

unde funcția f a fost aleasă de forma:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2};\quad \lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

12. Fie $f:[0,\ 1]\to\mathbf{R}$ d o diviziune a segmentului $[0,\ 1]$ și punctele intermediare $x_k = \frac{k}{n}$, atunci:

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\cdot e^{\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),\ \text{unde } f(x) = x\cdot e^{x^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2)'\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}.$$

13. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \sin\left(\pi\cdot\frac{k}{n}\right) = \int_0^\pi \sin x\,dx =$

$$= -\cos x\Big|_0^\pi = 2.$$

14. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2}}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k}{n}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx =$

$$= \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

15. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \sin^2\frac{k\pi}{n} = \int_0^1 \sin^2\pi x\,dx = \frac{1}{2},$

unde $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{tg}^2\frac{k\pi}{3n} = \int_0^1 \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}x\,dx =$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{3}x} - 1\right] dx = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{\pi}.$$

17. Fie $f:[0,\ 1]\to\mathbf{R}$, d o diviziune echidistantă și $x_k = \frac{k}{n}$.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k+5n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\frac{k}{n}+5}} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

unde funcția f a fost aleasă de forma: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \frac{1}{2x+5}\,dx = \sqrt{7} - \sqrt{5}.$$

18. Fie $f:[0,\ 1] \to \mathbf{R}$, d o diviziune a intervalului $[0,\ 1]$.

$$x_k = \frac{k}{n};\ a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{3\frac{k}{n} - \frac{2}{n}}{\sqrt{9 + \left(\frac{3k-2}{n}\right)^2}} \Rightarrow f(x) = \frac{3x}{\sqrt{9+9x^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{2} - 1.$$

19. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$

20. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} = \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}} =$

$$= \int_0^1 \left(\sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) dx = \frac{4-2\sqrt{2}}{3}.$$

21. $\lim\limits_{n\to} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}.$

22. Fie $f:[0,\ 1] \to \mathbf{R}$, și punctele intermediare $x_k = \frac{k}{n}$;

atunci $a_n = \frac{3}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+3\cdot\frac{k-1}{n}}} = \frac{3}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx = 2\sqrt{1+x}\Big|_0^3 = 2.$$

23. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx =$

$$= \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

24. Fie $f:[0,\ 1] \to \mathbf{R}$, d o diviziune a intervalului $[0,\ 1]$ și $x_k = \frac{k}{n}$; $a_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$;

unde funcția f a fost aleasă de forma:

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}.$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\sqrt{2}+1\right) + \sqrt{2}\right].$$

Vezi rezolvarea ex. 30.

25. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\left[1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right]\left[\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}+1\right]} =$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \frac{\pi}{4} + 1 - \sqrt{2}.$$

unde integrala s-a calculat prin schimbarea de variabilă:

$$x = \operatorname{tg} t \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 t}\,dt$$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

26. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}} =$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x^2}} = \frac{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}}.$$

unde integrala s-a rezolvat efectuînd substituția:

$$x = \operatorname{tg} t \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

27. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n\sqrt{(2n-k)n}} =$

$$= \int_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2-x}} = \frac{2}{15}(32\sqrt{2} - 43);$$

unde s-a efectuat substituția:

$$2 - x = t^2 \Rightarrow \mathrm{d}x = -2t\,\mathrm{d}t.$$

28. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(2+\frac{k}{n}\right)\sqrt{\left(2+\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n}}} =$

$$= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2+x)\sqrt{x^2+2x}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

unde s-a efectuat substituția:

$$\sqrt{x^2+2x} = x - t \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2+2t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t,$$

iar limitele de integrabilitate sînt:

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = 1+\sqrt{3}. \end{cases}$$

29. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{k}{n}\right)^3 + 1} =$

$$= \int_0^1 x^2 \cdot \sqrt[3]{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(2\sqrt[3]{2} - 1).$$

unde s-a efectuat substituția:

$$x^3 + 1 = t^3 \Rightarrow x^2\,\mathrm{d}x = t^2\,\mathrm{d}t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int x^2 \sqrt[3]{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \int t\cdot t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}t^4 + C = \frac{1}{4}(\sqrt[3]{x^3+1})^4 + C.$$

30. Fie $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, d o diviziune a intervalului $[0, 1]$

$$x_k = \frac{k}{n};\ a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{25 + \left(\frac{5k-3}{n}\right)^2},$$

unde funcția f a fost aleasă de forma: $f(x) = \sqrt{25 + (5x)^2}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \sqrt{25 + 25x^2}\,\mathrm{d}x = 5\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Fie $I = \int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x +$

$$+ \int x\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x + \int x(\sqrt{1+x^2})'\,\mathrm{d}x =$$

$$= \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + x\sqrt{1+x^2} - I \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{2}[\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + x\sqrt{1+x^2}] + C.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{5}{2} I\Big|_0^1 = \frac{5}{2}[\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}]$.

31. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt[p]{\left(\frac{i}{n}\right)^k} = \int_0^1 \sqrt{x^k}\,\mathrm{d}x = \frac{p}{p+k}$.

32. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$

Fie $x = \sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$

$$\text{pentru} \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

33. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2k}{\sqrt{(2k-1)^2+(2n)^2}} -$

$$-\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(2k-1)^2+(2n)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{(2k-1)^2+(2n)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{4k^2+4n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}} = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$

$$= \sqrt{1+x^2}\Big|_0^1 = \sqrt{2}-1.$$

34. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\cdot \operatorname{arctg}\frac{k}{n} + \frac{\pi}{4n}\right] =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\operatorname{arctg}\frac{k}{n} = \int_0^1 x \operatorname{arctg} x\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi-2}{4}.$$

35. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\sum\limits_{k=1}^{n} \ln n^2\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right) - 2(n-1)\ln n\right] =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} 2\ln n + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right) - 2(n-1)\ln n\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[2n\ln n + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right) - 2(n-1)\ln n\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right) + \frac{2}{n}\ln n\right] = \int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx =$$

$$= [x\ln(1+x^2) - 2(x-\operatorname{arctg} x)]\Big|_0^1 = \frac{\pi-4}{2} + \ln 2.$$

36. Logaritmînd obținem:

$$\ln a_n = -\ln n + \frac{1}{n}[\ln n + \ln(n+1) + \ldots + \ln(n+n)].$$

Cum $\ln(n+1) = \ln n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, înlocuind în relația precedentă, obținem:

$$\ln a_n = \frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(\ln a_n) = \int_0^1 \ln(1+x)dx =$$

$$= \ln 4 - 1 = \ln 4 - \ln e = \ln\frac{4}{e} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = e^{\ln\frac{4}{e}} = \frac{4}{e}.$$

37. Vom da pe n factor comun general și logaritmînd obținem:

$$\ln a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(a+\frac{k}{n}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty}(\ln a_n) = \int_a^{a+1} \ln x\,dx = (a+1)\ln(a+1) - a\ln a - 1 =$$

$$= \ln\frac{(a+1)^{a+1}}{e\,a^a} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{(a+1)^{a+1}}{e\,a^a}.$$

CAPITOLUL IX

APLICAȚII ALE INTEGRALELOR: ARII, VOLUME, CENTRE DE GREUTATE, FORMULELE LUI PAUL GULDIN, MOMENT STATIC, MOMENT DE INERȚIE, LUNGIMI DE CURBE, SUPRAFEȚE DE ROTAȚIE, LUCRU MECANIC, PRESIUNE, VITEZĂ, ACCELERAȚIE, CĂLDURĂ SPECIFICĂ. IDENTITĂȚI COMBINATORICE DEDUSE PRIN DERIVARE SAU PRIN INTEGRARE

PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

1. Se consideră un cerc și o hiperbolă definite prin ecuațiile:

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0 \text{ și } x^2 - 2y^2 - \frac{a^2}{4} = 0.$$

Fie A, B, C, D punctele de intersecție ale acestor curbe (A, B respectiv C, D simetrice față de yy').

Să se calculeze aria conturului curbiliniu $ABCD$, delimitat de arcele de cerc AB și CD și de arcele de hiperbolă AD și BC.

2. Să se calculeze aria domeniului mărginit de graficul funcției $f:\left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \to \mathbf{R}$, cu

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \cos x}$$, axa Ox, și dreptele $x = 0$, $x = \frac{3\pi}{4}$.

3. Să se calculeze aria domeniului mărginit de graficul funcției $f:[0, 2] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \left|\frac{x-1}{x+1}\right|$, axa Ox și dreptele $x = 0$ și $x = 2$.

4. Calculați aria limitată de axa Ox și curbele $y = \arcsin x$ și $y = \arccos x$.

5. Calculați aria limitată de curba închisă:

$$(y - \arcsin x)^2 = x - x^2.$$

6. Calculați aria limitată de astroida:

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t.$$

7. Calculați aria cuprinsă între graficul funcției $f(x) = \arccos\frac{x^3 - 3x}{2}$, axa Ox și dreptele $x = -1$, $x = 1$. Să se traseze graficul funcției.

8. Calculați aria limitată de curba:

i) $y = \frac{1}{1 + x^2}$, asimptota sa și de paralelele duse la axa Oy prin punctele de inflexiune.

ii) $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$, asimptota sa și paralelele duse la axa Oy prin punctele de inflexiune.

iii) $(2a - x)y^2 = x^3$ și dreptele de ecuații $x = a$, $y \geqslant 0$.

iv) $xy^2 = 8 - 4x$, paralela dusă la axa Oy prin punctul de inflexiune și semiplanul $y \geqslant 0$.

9. Calculați aria figurii cuprinse între curbele:

i) $y = x^3 - 7$, $y = -2x^2 + 3x$ și axa Oy.

ii) $y = x^3$ și dreapta $y = 7(x + 1)$.

iii) $y = 16 - x^2$ și $y = -\sqrt[3]{x^2}$.

iv) $y = 4 - x^4$ și $y = \sqrt[3]{x}$.

10. Fie P punctul de intersecție dintre curba $y = x^3$ și dreapta $y = rx$. Să se arate că oricare ar fi r, ariile suprafețelor determinate de dreapta dată și curbă și aceea dintre curbă, axa Ox și paralela la Oy dusă în P sînt egale.

11. Calculați aria suprafeței plane cuprinse între cercurile de ecuații $x^2 + y^2 - 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

12. Calculați aria suprafeței plane cuprinsă între curbele:

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \text{ cu } 0 < b < a.$$

13. Fie parabola de ecuație $y = ax^2 + bx + c$ cu $a > 0$. Se intersectează această parabolă cu dreapta $y = mx + n$ și se obține o porțiune de suprafață care se numește segment de parabolă.

Se cere:

i) Să se determine abscisele x_1, x_2 ale punctelor de intersecție A și B și condiția de realitate a acestora.

ii) Abscisa x_0 a punctului C al parabolei în care tangenta este paralelă cu coarda AB și ordonata y_0 corespunzătoare.

iii) Aria σ a segmentului de parabolă.

iv) Să se arate că aria segmentului de parabolă este egală cu $\frac{3}{4}$ din aria triunghiului cu baza AB și cu vîrful în punctul de contact C al tangentei la parabolă, tangentă care este paralelă cu coarda AB.

14. Se dă curba $y = ax + bx^2$ și dreapta $y = mx$. Notăm cu S_1 aria suprafeței determinate de curbă și dreaptă, cu S_2 aceea dintre dreaptă, curbă și Ox. Să se afle relația dintre a, b, m, k, astfel încît $S_1 = kS_2$.

15. Fie hiperbola echilateră $x^2 - y^2 = a^2$ și dreapta $y = kx$, $k \in (0, 1)$. Să se calculeze aria suprafeței cuprinsă între semidreapta Ox $(x > 0)$, arcul de hiperbolă $x^2 - y^2 - a^2 = 0$ $(y > 0)$ și dreapta $y = kx$.

16. Determinați volumul generat prin rotirea trapezului curbiliniu limitat de curba $y = xe^x$ și dreptele $x = 0$, $x = 1$, în jurul abscisei.

17. Rotind în jurul abscisei arcul generat de $y = \operatorname{ch} x$, se obține o suprafață numită catenoidă. Găsiți volumul limitat de catenoidă și două plane perpendiculare pe abscisă, în punctele de abscisă: $x = a$ și $x = b$.

18. Determinați volumul generat de rotirea în jurul axe Ox a trapezului situat deasupra axei Ox, determinat de curba $(x - 4)y^2 = x(x - 3)$.

19. Determinați volumul generat de rotirea în jurul axei Ox a trapezului curbiliniu de bază $[0, 1]$, limitat de curba $y = \arcsin x$.

20. Determinați volumul generat de rotirea curbei $y = \frac{1}{1 + x^2}$ în jurul asimptotei sale, mărginit de planele perpendiculare pe abscisă în punctele de inflexiune.

21. Se consideră o placă mărginită de $y = \operatorname{sh} x$, $x = 0$, $x = 2$. Se cere volumul corpului generat de această placă prin rotirea în jurul axei Ox.

22. Să se determine volumul generat de rotirea în jurul axei Ox a lemniscatei $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

23. Să se determine volumul generat de rotirea în jurul axei Ox a curbelor:

i) $x^4 + y^4 = a^2x^2$

ii) $x^4 + y^4 = x^3$.

24. Să se determine volumul generat prin rotirea astroidei $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ în jurul axei ei de simetrie.

25. Se intersectează o emisferă cu un plan paralel cu baza ei și dus prin jumătatea razei perpendiculare pe baza emisferei. Se cere volumul celor două zone sferice.

26. Să se deducă o formulă pentru calculul capacității unui butoi în care doagele au forma unui arc de parabolă, butoiul avînd dimensiunile: lungimea l, razele de la capete r, și raza centrală R $(R > r)$.

27. Să se deducă o formulă pentru capacitatea butoaielor avînd doagele de forma unui arc de elipsă.

28. Să se afle volumul corpului obținut prin rotația suprafeței determinate de cercul $x^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$ cu $b \geqslant r$, în jurul axei Ox (corpul obținut se numește *tor*).

29. Să se calculeze volumul rezultat din scăderea volumului unui elipsoid avînd semiaxele $\frac{r}{2}$, b, dintr-o jumătate de sferă de rază r.

30. Să se calculeze lungimea curbei care are ecuația:

$$f(x) = 2 \ln x, \quad 2 \leqslant x \leqslant 2\sqrt{3}.$$

31. Calculați lungimea arcului de parabolă semicubică: $y^2 = \frac{2}{3}(x - 1)^3$, cuprins în interiorul parabolei: $y^2 = \frac{x - 1}{3}$.

32. Calculați lungimea arcului de parabolă semicubică: $5y^3 = x^3$, cuprins în interiorul cercului $x^2 + y^2 = 6$.

33. Calculați lungimea unei bucle a curbei

$$9ay^2 = x(x - 3a)^2, \quad a > 0.$$

34. Calculați perimetrul unui triunghi mixtiliniu limitat de axa Ox și de curbele $y = \ln(\cos x)$, $y = \ln(\sin x)$.

35. Calculați lungimea arcului de curbă $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$, cuprins între punctul de minim și punctul de intersecție cu dreapta $x = 2$.

36. Calculați lungimea curbei $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x}$.

37. Calculați lungimea curbei $(y - \arcsin x)^2 = 1 - x^2$.

38. Determinați coordonatele unui punct de pe cicloida $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, care împarte primul arc în raportul de 1/3.

39. Calculați lungimea curbei dată de relațiile: $x = a\cos^5 t$ și $y = a\sin^5 t$.

40. Calculați lungimea arcului de curbă:

i) $y = \arcsin e^{-x}$, cuprins între dreptele $x = 0$ și $x = 1$.

ii) $x = \ln \sec y$, cuprins între dreptele $y = 0$ și $y = \frac{\pi}{3}$.

iii) $y = \ln\left(\operatorname{cth}\frac{x}{a}\right)$, cuprins între $x = a$ și $x = b$ $(0 < a < b)$.

41. Să se calculeze aria suprafeței obținute prin rotirea parabolei care are ecuația:

$$f(x) = \sqrt{2px}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 3, \text{ în jurul axei } Ox.$$

42. Să se determine ariile suprafețelor obținute prin rotirea curbelor care au ecuațiile:

i) $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{a}}$, $0 \leqslant x \leqslant a$, în jurul axei Ox.

ii) $f(x) = a\cos\frac{\pi x}{2b}$, $|x| \leqslant b$, în jurul axei Ox.

43. Să se determine aria suprafeței generată de arcul lănțișorului $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, cuprins între dreptele $x = -a$ și $x = a$, cînd acest arc se rotește în jurul axei Ox.

44. Determinați aria catenoidei (suprafață generată de rotația curbei $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ în jurul axei absciselor) între dreptele de ecuație $x = 0$ și $x = a$.

45. Determinați aria suprafeței fuziforme generată de rotirea în jurul axei absciselor a arcului de sinusoidă $y = \sin x$.

46. Să se determine aria suprafeței generate de rotația tangentoidei $y = \operatorname{tg} x$ în jurul axei Ox între punctele $(0, 0)$, $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$.

47. Să se determine aria suprafeței de rotație a buclei de curbă: $9ay^2 = x(3a - x)^2$, în jurul axei Ox.

48. Determinați aria suprafeței de rotație în jurul axei Ox a astroidei:

$$x = a\cos^3 t$$
$$y = a\sin^3 t.$$

49. Determinați aria suprafeței generate de rotația unui arc de cicloidă în jurul axei sale de simetrie:

$$x = a(t - \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t).$$

50. Determinați aria suprafeței generată de rotația arcului infinit al curbei $y = 2e^x$, în jurul abscisei, pentru planele generate de dreptele $x = 0$ și $x = 1$.

51. Să se determine aria suprafeței de rotație determinată de funcțiile:

i) $f(x) = \frac{x}{4}\sqrt{1 - x^2}$ pentru $x \in [0, 1]$

ii) $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{a}}\sqrt{x(3a - x)^2}$ pentru $x \in [0, 3a]$.

52. Să se determine aria suprafeței generată de rotirea în jurul axei Ox a arcului de curbă $y = e^{-x}$, cuprins între punctele $x = 0$ și $x = n > 0$, apoi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}$ (aria suprafeței).

53. Să se determine aria suprafeței de revoluție generată de rotația arcului de curbă $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ în jurul axei Ox și cuprins între punctele $x = 1$ și $x = e$.

54. Să se determine aria suprafeței generată de rotația elipsei: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ în jurul: i) axei Ox, ii) axei Oy (cu $a > b$).

55. Să se determine aria suprafeței de rotație a arcului de cicloidă $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ în jurul:

i) axei Ox, ii) axei Oy, iii) al tangentei la cicloidă în punctul cel mai ridicat.

56. Se dă o placă plană omogenă formată dintr-un disc semicircular de centru $(0, 0)$ și rază R, situat deasupra axei Ox, din care se scot două triunghiuri isoscele de baze $[-R, 0]$ și $[0, R]$ și înălțime $h < \frac{R}{2}$. Să se determine centrul de greutate al plăcii omogene rămase.

57. Determinați coordonatele centrului de greutate al arcului provenit din curba: $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, cuprins între punctele de abscisă: $x_1 = -a$, $x_2 = a$.

58. Să se determine centrul de greutate al sectorului circular de rază R și de deschidere α, având o latură pe Ox.

59. Se dă un cerc (C) de rază R, cu centrul pe Oy și tangent în origine axei Ox. Se împarte raza în trei părți egale și se trasează cercul (C_1) de rază $\frac{R}{3}$, tangent interior primului cerc în originea axelor. Să se afle centrul de greutate al plăcii omogene formate prin excludere, din discul (C) a discului (C_1).

60. Să se determine centrul de greutate al plăcii omogene:

i) $P_1 = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1 - x^2},\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

ii) $P_2 = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant \sin x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi\}$.

61. Să se determine coordonatele centrului de greutate al suprafeței mărginite de curba care are ecuația:

$$f(x) = \frac{x^4}{\sqrt{1 - x^2}},$$

de dreptele de ecuații $x = 0$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și axa Ox.

62. Să se determine coordonatele centrului de greutate al figurii mărginite de curba $y^2 = ax^3 - x^4$ și axa Ox.

63. a) Să se determine centrul de greutate al unei plăci plane omogene limitată de curbele $y = -x^2 + 4x$ și $y^2 = x^2 - 4x + 6$.

b) Să se afle volumul corpului obținut prin rotirea suprafeței dintre cele două curbe în jurul axei xx'.

c) Să se afle volumul corpului obținut prin rotirea suprafeței dintre cele două curbe în jurul axei yy'.

64. Să se determine centrul de greutate al ariei cuprinse între sinusoida $y = a \sin x$ și dreptele $x = 0$, $x = b$.

65. Să se determine centrul de greutate al unui segment din elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, determinat de curbă și o coardă care trece prin două vîrfuri ale elipsei, respectiv punctele $A\ (a, 0)$ și $B\ (0, b)$.

66. Să se determine centrul de greutate al figurii mărginite de cercul și de elipsa de ecuații $4x^2 + y^2 - 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 1 = 0$; cu $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

67. Determinați coordonatele centrului de greutate al figurii limitate de axele de coordonate și parabola:

$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}.$$

68. Să se determine coordonatele centrului de greutate al figurii limitate de axele de coordonate și arcul de elipsă $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, conținut în primul cadran.

69. Determinați coordonatele centrului de greutate al primului arc al cicloidei $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

70. Determinați coordonatele centrului de greutate al arcului de astroidă:

$x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, cuprins în primul cadran.

71. La ce distanță de centrul geometric se află centrul de greutate al unei semisfere de rază R?

72. Determinați poziția centrului de greutate a arcului de astroidă: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, situat în primul cadran.

73. Determinați coordonatele centrului de greutate al figurii limitate de curbele:

$$y^2 = 2px \quad \text{și} \quad x^2 = 2py.$$

74. Determinați coordonatele centrului de greutate al unui semicerc omogen, utilizînd teorema lui Guldin.

75. Să se determine coordonatele centrului de greutate al unei plăci omogene plane, formată dintr-un sfert de disc circular de centru $(0, 0)$ și rază R, din care s-a scos un dreptunghi de laturi a și b.

76. i) Să se determine coordonatele centrului de greutate al unei plăci plane omogene, mărginită de curba $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$ și axa Ox.

ii) Să se deducă volumul corpului obținut prin rotația plăcii în jurul axei Ox.

77. Să se calculeze momentul de inerție față de originea axelor al unei bare situate pe Ox între punctele $x = 0$ și $x = a$, de densitate variabilă $\rho(x) = \dfrac{k^2}{a^2 + x^2}$.

78. Să se calculeze momentul de inerție față de punctul $(0, 0)$ al unei bare situate pe Ox între punctele $x = 0$ și $x = a$, de densitate variabilă $\rho(x) = \ln(a^2 + x^2)$.

79. i) Să se calculeze momentul de inerție I_{ox} față de axa Ox al unei plăci plane omogene, mărginite de curbele: $y = \operatorname{ch} x$ și de dreptele $x = -a$, $x = a$ și $y = 0$.

ii) Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea plăcii omogene în jurul axei Ox.

80. Să se calculeze momentul de inerție al unei plăci semieliptice cu diametrul pe axa Ox, față de această axă.

81. Să se calculeze momentul de inerție al unui cilindru circular față de axa sa de simetrie Ox.

82. Să se calculeze momentul de inerție față de axa Ox al plăcii plane pentru $\{(x, y) \mid c \leqslant y \leqslant d,\ a \leqslant x \leqslant b,\ a > 0,\ c > 0\}$.

83. O elipsă se rotește în jurul axei Ox. Să se determine momentul de inerție al elipsoidului de revoluție generat.

84. Determinați momentul de inerție al unui paraboloid de revoluție, cu raza bazei R și înălțimea H, raportat la axa de rotație.

85. Determinați momentul de inerție al suprafeței laterale a unui con, cu raza bazei R și înălțimea H, raportat la axa sa.

86. Determinați momentul de inerție al suprafeței unei sfere omogene de rază R, raportat la un diametru Ox.

87. Calculați momentul de inerție al unui con circular drept, omogen, de rază R și înălțime H, în raport cu axele sale.

88. i) Să se determine momentul static al unui semicerc în raport cu diametrul său.

ii) Să se determine momentul de inerție al unui dreptunghi în raport cu o dreaptă mediană a lui, luată ca axă.

89. Să se determine momentul static și de inerție al unui triunghi echilateral de latură a, în raport cu o paralelă la una din laturi dusă prin vîrful opus acestei laturi.

90. Determinați momentul static al arcului de elipsă $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, conținut în primul cadran și raportat la axele sale.

91. Un mobil se deplasează cu o mișcare rectilinie după legea $S(t) = 3\sin\left(\dfrac{5\pi t}{6} + \dfrac{\pi}{4}\right)$. Știind că $S(0) = 0$:

i) să se determine momentul cînd viteza este nulă și cînd este maximă;

ii) să se determine momentul cînd accelerația este nulă și cînd este maximă.

92. Un punct M se mișcă pe axa Ox după legea

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Se cere ecuația acestei mișcări (ecuație independentă de t).

93. Un punct $M(x, y)$ se mișcă în planul xOy, astfel ca $x = 1 + t$ și $y = t^2 - 2t$, unde timpul $t > 0$. Să se studieze: traiectoria, viteza, accelerația.

94. Să se afle lucrul mecanic necesar pentru ridicarea unei greutăți de 12 kgf din fundul unui puț adînc de 20 m, știind că greutatea cablului este de 0,6 kgf/m.

95. Viteza la intrarea unui tren într-un strat de zăpadă este $v_1 = 54$ km/s, iar la ieșirea $v_2 = 36$ km/h. Să se afle lucrul mecanic necesar pentru străbaterea stratului de zăpadă.

96. Un punct material M, mobil pe axa Ox, este atras către O de o forță $f = -\frac{mk^2}{x^2}$. Să se calculeze lucrul mecanic executat între $x = x_0$ și $OM = x_1$.

97. Un fir elastic AB de lungimea l_0, are extremitatea fixă A, iar în B se exercită o tensiune proporțională cu alungirea. Ce lucru mecanic trebuie să efectuăm pentru ca lungimea firului să devină $l > l_0$?

98. Comprimarea unui arc spiral este proporțională cu forța aplicată. Să se afle lucrul mecanic necesar pentru a comprima arcul cu 3 cm, știind că pentru a-l comprima cu 0,5 cm este necesară o forță de 1 kg.

99. Un resort are un capăt fix, iar la celălalt capăt este atîrnată o greutate de 4 kgf, care l-a întins cu 10 cm. Se cere lucrul mecanic necesar pentru a-l întinde cu 15 cm.

100. Să se determine lucrul mecanic efectuat pentru întinderea unui resort elastic cu 5 cm, știind că pentru a-l întinde cu 1 cm este necesară o forță de 1 kgf.

101. Un stăvilar are lățimea de 20 m și înălțimea de 10 m. Să se calculeze presiunea asupra stăvilarului, dacă fața superioară este la suprafața apei.

102. Să se determine presiunea exercitată asupra unui baraj de formă parabolică, cu axa verticală, în care baza este $2a$ și înălțimea h.

103. Un luminator circular, care are diametrul de 30 cm, se află în peretele vertical al unei nave și este cufundat în apă pînă la jumătate. Să se determine presiunea pe partea cufundată în apă.

104. Căldura specifică a unui kilogram de apă variază în funcție de temperatura t, după legea: $f(t) = 1 + 4 \cdot 10^{-5} t + 9 \cdot 10^{-7} t^2$. Să se determine cantitatea de căldură necesară pentru a încălzi 1 m³ de apă de la 10° la 60°.

105. Benzina are căldura specifică c, legată de temperatura t, prin relația:

$c = 0{,}2336 + 0{,}0010228\, t$, presiunea fiind constantă.

Să se afle căldura specifică medie a benzinei pentru temperaturi cuprinse între $t_1 = 116°$ C și $t_2 = 218°$ C (Batuner-Pozin).

Identități combinatorice deduse prin derivare sau prin integrare.

106. Să se demonstreze egalitățile ($n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$):

i) $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n \cdot 2^{n-1}$.

ii) $\sum_{k=2}^{n} (k-1)kC_n^k = n(n-1) \cdot 2^{n-2}$

iii) $\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k = n(n+1) \cdot 2^{n-2}$

iv) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)C_n^k = n(n+3) \cdot 2^{n-2}$

v) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)C_n^k = n(n^2+13n+34) \cdot 2^{n-3}$

vi) $\sum_{k=1}^{n} k^3 C_n^k = n^2(n+3) \cdot 2^{n-3}$

vii) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k kC_n^k = 0$

viii) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 C_n^k = 0$

ix) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k(k+1)\cdot(k+2) C_n^k = 0$

x) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

xi) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} C_n^k = \frac{2^{n+2}-1}{(n+1)(n+2)}$

xii) $\sum_{k=0}^{n} \frac{k+3}{(k+1)(k+2)} C_n^k = \frac{n+4}{(n+1)(n+2)} \cdot 2^{n+1}$

xiii) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1}$

xiv) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k} C_n^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

xv) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{k+3}{(k+1)(k+2)} \cdot C_n^k = 0.$

107. Să se calculeze următoarele sume trigonometrice ($n \in \mathbf{N}$):

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} k \sin kx$$

$$C_1 = \sum_{k=1}^{n} k \cos kx$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 \sin kx$$

$$C_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 \cos kx$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 \sin kx$$

$$C_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 \cos kx.$$

1. Reamintesc aria unei suprafețe:

a) Dacă $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcție pozitivă și continuă atunci:

i) $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ mulțimea numită subgraficul funcției f are arie și:

ii) aria $(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)\,dx.$

b) Dacă $f, g:[a, b] \to \mathbf{R}$ sînt funcții continue și $f(x) \leqslant g(x)$ pentru $\forall\, x \in [a, b]$ atunci mulțimea $\Gamma_{f,g} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$ cuprinsă între graficele funcțiilor f, g și dreptele paralele la Oy care intersectează axa Ox în punctele a și b, are arie și aria $(\Gamma_{f,g}) =$ $= \text{aria}\,(\Gamma_g) - \text{aria}\,(\Gamma_f) = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx.$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - a^2 = 0 \\ x^2 - 2y^2 = \frac{a^2}{4} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}\right)$$

$$A_{MAN} = \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \frac{\sqrt{x^2 - \frac{a^2}{4}}}{2}\,dx + \int_{\frac{a\sqrt{3}}{2}}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx =$$

$$= \frac{a^2}{8\sqrt{2}}[\sqrt{6} + \ln(\sqrt{3} - \sqrt{2})] + \frac{a^2}{2}\left[\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right].$$

Aria căutată se obține din aria cercului, din care scădem $4 \cdot A_{MAN}$.

2. $A = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \left|\frac{\cos x}{1 + \cos x}\right| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \cos x}\,dx -$

$- \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 + \cos x}\,dx = -2 + \operatorname{tg}\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{4}$. Unde primitiva s-a determinat cu ajutorul substituției $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x+1} & \text{pentru } x\in(-\infty,-1)\cup[1,\infty)\\ -\dfrac{x-1}{x+1} & \text{pentru } x\in(-1,1)\end{cases}$

$$A=\int_0^1\left(-\frac{x-1}{x+1}\right)dx+\int_1^2\frac{x-1}{x+1}dx=$$

$$=\int_0^1\left[-1+2\frac{1}{x+1}\right]dx+\int_1^2\left[1-2\frac{1}{x+1}\right]dx=$$

$$=[-x+2\ln|x+1|]\Big|_0^1+[x-2\ln|x+1|]\Big|_1^2=$$

$$=4\ln 2-2\ln 3=\ln\frac{16}{9}.$$

4. Integrăm prin părți:

$$\text{fie } I=\int \arcsin x\,dx$$

$$\begin{cases}\arcsin x=f\\ 1=g'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=f'\\ x=g\end{cases}$$

$$I=x\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=x\operatorname{acrsin}x+\int\frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

$$\text{fie } J=\int\arccos x\,dx$$

$$\begin{cases}\arccos x=f\\ 1=g'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=f'\\ x=g\end{cases}$$

$$J=x\arccos x+\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C.$$

Acum vom determina punctele de intersecție ale celor două curbe:

$$\begin{cases}y=\arcsin x\\ y=\arccos x\end{cases}\Rightarrow\arcsin x=\arccos x\Rightarrow x=\sin(\arccos x)=$$

$$=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Aria domeniului}=(I-J)\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1-$$

$$-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)=\sqrt{2}-2.$$

5. $\dfrac{\pi}{4}$. **6.** $f(x)=\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

$$A=4\int_0^a f(x)dx=4\int_0^a\sqrt{a^2-3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}-x^2}\,dx=$$

$$=\frac{3\pi}{8}a^2.$$

7. $A=\int_{-1}^{1}\arccos\dfrac{x^3-3x}{2}\,dx$. Vom integra prin părți:

$$\begin{cases}\arccos\dfrac{x^3-3x}{2}=f\\ 1=g'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'=\dfrac{-3(x^2-1)}{\sqrt{(x^2-1)^2(x^2-2)}}\\ g=x\end{cases}$$

$$f'=-3\cdot\frac{x^2-1}{|x^2-1|}\cdot\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Dar conform domeniului de definiție avem:

$$\begin{cases}\dfrac{x^3-3x}{2}\geqslant-1\\ \dfrac{x^3-3x}{2}\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-1)^2(x+2)\geqslant 0\\ (x+1)^2(x-2)\leqslant 0\end{cases}\Rightarrow x\in[-2,2]$$

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{3}{\sqrt{4-x^2}} & \text{pentru } x\in(-2,-1)\cup(1,2)\\ \dfrac{3}{\sqrt{4-x^2}} & \text{pentru } x\in[-1,1]\end{cases}$$

iar aria este: $A = \int_{-1}^{1} \frac{3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = 3 \arcsin \frac{x}{2}\Big|_{-1}^{1} =$

$= 3\left[\arcsin \frac{1}{2} - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right]_{-1}^{1} = 3\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \pi.$

8. i) Graficul admite ca asimptotă orizontală dreapta $y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, iar graficul funcției este: determinat astfel:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2},\quad f''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		∞
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	0
$f''(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

Vezi figura IX. 8 i)

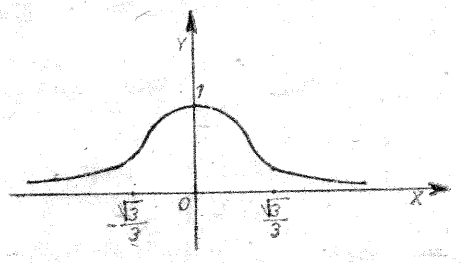


Fig. IX.8i)

Aria cerută este: $A = 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2 \operatorname{arctg} x\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\pi}{3}.$

Reamintesc: Fie $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă, atunci

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx & \text{dacă } f \text{ este pară} \\ 0 & \text{dacă } f \text{ este impară.} \end{cases}$$

ii) $y = \lim_{x\to\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{xe^{\frac{x^2}{2}}} = 0$, unde în calcule s-a aplicat teorema lui l'Hospital.

$$y = \lim_{x\to-\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}} = 0.$$

$$y' = (1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y'' = x(x^2-3)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		∞
y'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y	0	$\searrow$		$-\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\searrow$			0
y''		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

Vezi graficul IX. 8.ii)

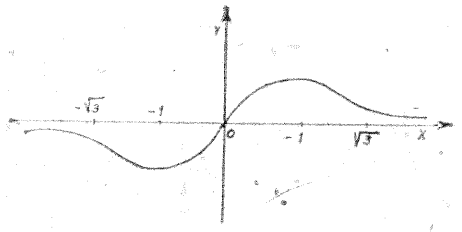


Fig. IX. 8ii)

$$A = 2\int_0^{\sqrt{3}} xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 2\int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{x^2}{2}\right)' e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = -2e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= 2\left(-e^{-\frac{3}{2}} + e^0\right) = 2\left(1 - \frac{1}{e^{\frac{3}{2}}}\right).$$

iii) $y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{2a-x}}$ pentru $x \in [0, 2a)$ dacă $a > 0$.

Trasăm graficul funcției:

$$y' = \pm\frac{-2x^2(x-2a)}{2(2a-x^2)\sqrt{\frac{x^3}{2a-x}}} = \pm\sqrt{\frac{x}{2a-x}}$$

$$y'' = \pm\frac{a}{\sqrt{x}(2a-x)^{\frac{3}{2}}}$$

iar graficul admite ca asimptotă verticală dreapta de ecuație $x = 2a$. Trasăm tablourile de variație și graficele funcției pentru cele două ramuri:

x	0		$2a$
y'	$+$	$+$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$
y''	$+$	$+$	

x	0		$2a$
y'	$-$	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\infty$
y''	$-$	$-$	

Vezi graficele IX. 8. iii)

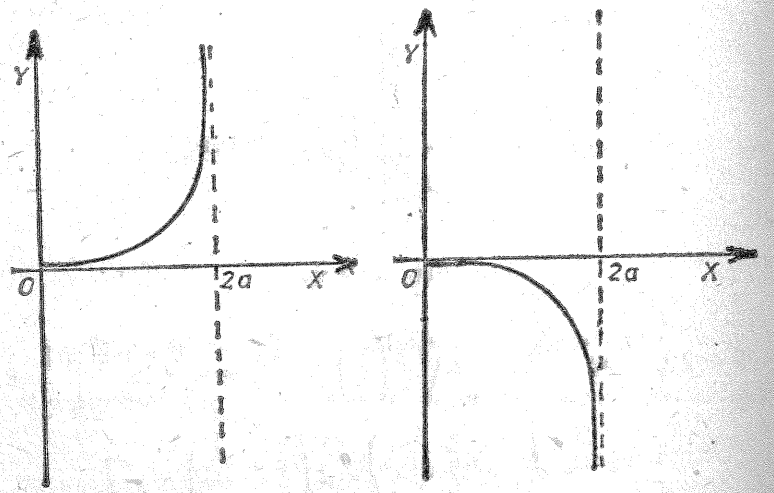


Fig. IX. 8iii)

$$A = \int_0^a \sqrt{\frac{x^3}{2a-x}}\,dx. \text{ Fie } \frac{x}{2a-x} = t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2at^2}{1+t^2},\ dx = \frac{4at}{(1+t^2)^2}dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 8a^2\int_0^1 \frac{t^4}{(1+t^2)^3}dt = 8a^2\int_0^1 \frac{(t^2+1-1)^2}{(1+t^2)^3}dt =$$

$$= 8a^2\int_0^1\left[\frac{1}{1+t^2} - 2\cdot\frac{1}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{(1+t^2)^3}\right]dt,$$

iar în calculele vom ține cont de relația de recurență:

$$I_n = \int\frac{dx}{(a^2+b^2x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)\cdot a^2(a^2+b^2x^2)^{n-1}} +$$

$$+\frac{2n-3}{2(n-1)a^2}\cdot I_{n-1},\ n \geqslant 2.$$

Deci $Y_3 = \int\frac{1}{(1+t^2)^3}dt = \frac{t}{4(1+t^2)^2} + \frac{3}{4}\cdot Y_2$;

$$Y_2 = \int\frac{1}{(1+t^2)^2}dt = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t^2}dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_2 = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C.$$

Deci $Y_3 = \frac{t}{4(1+t^2)^2} + \frac{3}{4}Y_2 = \frac{3t^2+2t+3}{8(1+t^2)^2} +$

$$+\frac{3}{8}\operatorname{arctg} t + C \Rightarrow A = 8a^2(\operatorname{arctg} t - 2Y_2 + Y_3) =$$

$$= 8a^2\left(\frac{3}{8}\operatorname{arctg} t - \frac{8t^3-3t^2-2t-5}{8(1+t^2)^2}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 8a^2\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \left|\frac{3\pi-16}{4}\right|\cdot a^2.$$

Dacă $a < 0$, domeniul de definiție este $x \in (-2a, 0]$, iar calculul se va efectua analog cazului precedent.

iv) $y = \pm 2\sqrt{\frac{2-x}{x}}$, $x \in (0, 2]$

$$y' = \mp 2 \frac{1}{x\sqrt{x(2-x)}}$$

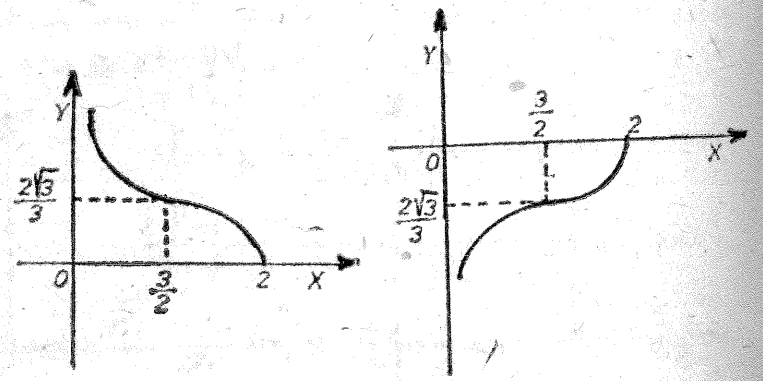
$$y'' = \mp 2 \cdot \frac{2x-3}{x^2(2-x)\sqrt{x(2-x)}}.$$

Trasăm tablourile de variație și graficele pentru cele două ramuri ale funcției:

x	0		$\frac{3}{2}$		2
y'	|	−		−	
y	| $+\infty$	↘		↘	0
y''	|	+	0	−	

x	0		$\frac{3}{2}$		2
y'	|	+		+	
y	| $-\infty$	↗		↗	0
y''	|	−	0	+	

iar $f\left(\frac{3}{2}\right) = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Vezi graficele IX. 8 iv)



FIg, IX.8 iv)

$$A = \int_{\frac{3}{2}}^{2} 2\sqrt{\frac{2-x}{x}}\,dx. \text{ Fie } \frac{2-x}{x} = t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{1+t^2},\ dx = -\frac{4t}{(1+t^2)^2}\,dt$$

și pentru $\begin{cases} x = 2 \Rightarrow t = 0 \\ x = \frac{3}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases} \Rightarrow$

$$A = -8\int_{\sqrt{\frac{1}{3}}}^{0} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = 8\int_{0}^{\sqrt{\frac{1}{3}}} \left[\frac{t^2+1}{(1+t^2)^2} - \frac{1}{(1+t^2)^2}\right]dt =$$

$$= 8\int_{0}^{\sqrt{\frac{1}{3}}} \left[\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t^2)^2}\right]dt = 8\left[\operatorname{arctg} t - \frac{t}{2(1+t^2)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\right]\Bigg|_0^{\sqrt{\frac{1}{3}}} = 8\left[\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right] = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{3}.$$

9. Pentru a determina limitele de integrabilitate vom folosi, pentru rezolvarea sistemului și în particular pentru rezolvarea ecuațiilor, metode de calcul aproximativ (metoda înjumătățirii intervalului, metoda coardei, metoda tangentei sau metoda lui Newton, metoda combinată).

i) 10,9. ii) 36,2. iii) 98,2. iv) 9,2.

10. $y = x^3$, $y' = 3x^2 > 0$, $y'' = 6x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		+	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
y''		−	0	+	

Vezi graficul IX.10.

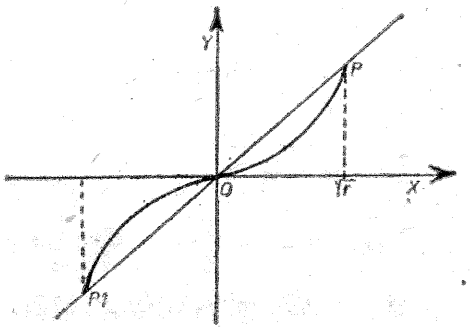


Fig. IX.10

Punctele de intersecție au coordonatele:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = rx \end{cases} \Rightarrow x(x^2 - r) = 0 \Rightarrow$$

$$P(\sqrt{r},\ r\sqrt{r}),\quad P_1(-\sqrt{r},\ -r\sqrt{r}).$$

$$S_1 = \int_0^{\sqrt{r}} (rx - x^3)\,dx = \left(r\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^{\sqrt{r}} = \frac{r^2}{4}.$$

$$S_2 = \int_0^{\sqrt{r}} x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{r}} = \frac{r^2}{4}.$$

11. $A = \int_{-2}^{0} 2\sqrt{4 - x^2}\,dx + \int_0^2 2(\sqrt{4 - x^2} - \sqrt{2x - x^2})\,dx = 3\pi.$

12. $A = 2\left(1 - \frac{b}{a}\right)\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \pi(a - b)x.$

13. i) Ecuația care determină pe x_1 și x_2 este: $ax^2 + bx + c - (mx + n) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{m - b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ iar condiția cerută este $\Delta = (m - b)^2 - 4a(n - c) \geqslant 0$.

ii) Dacă $n = n_0$ anulează această expresie, obținem două puncte confundate în C; dreapta considerată este tangentă la parabolă în punctul C de abscisă $x_0 = \frac{m - b}{2a} = \frac{x_1 + x_2}{2}$ și de ordonată $y_0 = 2x_0^2 + bx_0 + c = \frac{m^2 - b^2 + 4ac}{4a}$.

Tangenta în C are ecuația: $y = mx + n_0$.

iii) Aria segmentului de parabolă este:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} [mx + n - (ax^2 + bx + c)]\,dx.$$

Dar $ax^2 + bx + c - (mx + n) = a(x - x_1)(x - x_2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow A = -\int_{x_1}^{x_2} a(x - x_1)(x - x_2)\,dx.$$

Efectuînd schimbarea de variabilă: $x = x_1 + (x_2 - x_1)t$, $dx = (x_2 - x_1)dt \Rightarrow A = -a(x_2 - x_1)^3 \int_0^1 t(t - 1)\,dt = \frac{a}{6}(x_2 - x_1)^3$, unde $x_2 - x_1 = \frac{1}{a}\sqrt{(m - b)^2 + 4a(n - c)}$.

iv) Distanța h de la punctul C la dreapta AB este dată de relația $h = \frac{|y_0 - mx_0 - n|}{\sqrt{1 + m^2}}$. Fie α unghiul dreptei AB cu axa Ox, atunci $m = \operatorname{tg}\alpha$, $\frac{1}{\sqrt{1 + m^2}} = \cos\alpha$, deci ținînd cont de valorile lui x_0 și y_0 obținem:

$$h = \cos\alpha \cdot |y_0 - mx_0 - n| = \cos\alpha \cdot \frac{(m - b)^2 + 4a(n - c)}{4a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{4} \cdot a \cdot (x_2 - x_1)^2 \cdot \cos\alpha.$$

Dar lungimea bazei AB a triunghiului ABC este:

$$AB\cos\alpha = x_2 - x_1 \Rightarrow \sigma[ABC] = S = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_2 - x_1}{\cos\alpha} \cdot h =$$

$$= \frac{a}{8}(x_2 - x_1)^3 \Rightarrow A = \frac{4}{3}S.$$

14. Fie $a > 0$, $b > 0$. Punctele de intersecție sînt:

$$\begin{cases} y = ax + bx^2 \\ y = mx \end{cases} \Rightarrow bx^2 + (a - m)x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ și } x_1 = \frac{m - a}{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_1 = \int_0^{x_1} (ax + bx^2 - mx)\,dx = (a - m)\frac{x^2}{2} + b \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^{x_1} =$$

$$= \frac{a - m}{2} \cdot x_1^2 + \frac{b}{3}x_1^3.$$

$$S_2 = \int_0^{x_1} mx\,dx + \int_{x_1}^{-\frac{a}{b}} (ax + bx^2)\,dx =$$

$$= \frac{m}{2}x_1^2 + \frac{(3b - 2)a^3}{6b^2} - \frac{a}{2}x_1^2 - \frac{b}{3}x_1^3 \Rightarrow S_1 = kS_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2b^2x_1^3(k + 1) - 3b^2(a - m)x_1^2(k - 1) - (3b - 2)a^3k = 0$$

cu

$$x_1 = \frac{m-a}{b} \Rightarrow (m-a)^2(b+k) + a^3k = 0.$$

15. Abscisele punctelor de intersecție ale hiperbolei cu dreapta sînt:

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{1-k^2}},$$

$$A = \int_0^{\frac{a}{\sqrt{1-k^2}}} kx\,dx - \int_0^{\frac{a}{\sqrt{1-k^2}}} \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{k}{2}\cdot\frac{a^2}{1-k^2} -$$

$$-\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{a}{\sqrt{1-k^2}}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}\right) = \frac{k}{2}\cdot\frac{a^2}{1-k^2} -$$

$$-\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{a}{\sqrt{1-k^2}}} =$$

$$= \frac{k}{2}\cdot\frac{a^2}{1-k^2} - \left[\frac{ka^2}{2(1-k^2)} - \frac{a^2}{2}\left(\ln\frac{a(1+k)}{\sqrt{1-k^2}} - \ln a\right)\right] =$$

$$= \frac{a^2}{2}\cdot\ln\frac{1+k}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{a^2}{2}\ln\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}.$$

16. Reamintesc: dacă $f:[a,\ b]\to[0,\ \infty)$ este o funcție continuă, atunci corpul de rotație determinat de f, $C_f = \{(x, y, z)\in \mathbf{R}^3 \mid \sqrt{y^2+z^2} \leqslant f(x),\ a\leqslant x\leqslant b^2\}$ are volum și

$$\text{vol}\,(C_f) = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Dacă $f,\ g:[a,\ b]\to[0,\ \infty)$ sînt funcții continue și $f(x)\leqslant g(x)$ pentru $\forall\, x\in[a,\ b]$, atunci corpul de rotație $C_{f,g}$ are volum și

$$\text{vol}\,(C_{f,g}) = \pi\int_b^a [g^2(x) - f^2(x)]dx.$$

Deci $V = \pi\int_0^1 x^2e^{2x}dx.$

Vom integra prin părți:

$$\begin{cases} x^2 = f \\ e^{2x} = g' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = f' \\ \frac{1}{2}e^{2x} = g \end{cases} \Rightarrow V = \pi\left[\frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int_0^1 xe^{2x}dx\right] =$$

$$= \pi\left[\frac{1}{2}x^2e^{2x} - \left(\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}\right)\right]\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{4}(2x^2-2x+1)\cdot e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}(e^2-1).$$

17. $V = \pi\int_a^b \text{ch}^2x dx = \pi\int_a^b \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 dx =$

$$= \frac{\pi}{4}\int_a^b (e^{2x}+e^{-2x}+2)dx = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + 2\right)\Bigg|_a^b =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{e^{2b}-e^{-2b}}{2} - \frac{e^{2a}-e^{-2a}}{2} - 2(b-a)\right] =$$

$$= \frac{\pi}{4}[\text{sh}(2b) - \text{sh}(2a) - 2(b-a)].$$

18. $y^2 = \frac{x(x-3)}{x-4}$,

$$V = \pi\int_0^3 \frac{x(x-3)}{x-4}dx = \pi\int_0^3 \left(x+1+4\cdot\frac{1}{x-4}\right)dx =$$

$$= \pi\left(\frac{x^2}{2} + x + 4\ln|x-4|\right)\Bigg|_0^3 = \frac{\pi}{2}(15 - 16\ln 2).$$

19. $V = \pi\int_0^1 \arcsin^2 x dx = \pi\,[x\arcsin^2 x - 2x +$

$+ 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x]\Big|_0^1 = \pi\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2\right] = \frac{\pi(\pi^2-8)}{4}$ (unde integrarea s-a efectuat prin părți).

20. $V = 2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = 2\pi\left[\frac{x}{2(1+x^2)} +\right.$

$\left. + \frac{1}{2}\arctg x\right]\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{(3\sqrt{3}+2\pi)\pi}{12}$. (Vezi relația de recurență din ex. 8iii)).

21. Figura IX.21

$$A\begin{cases} y = \operatorname{sh} x \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{sh} x = 2 \Rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = \ln(2 + \sqrt{1 + 2^2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A[\ln(2 + \sqrt{5}),\ 2].$$

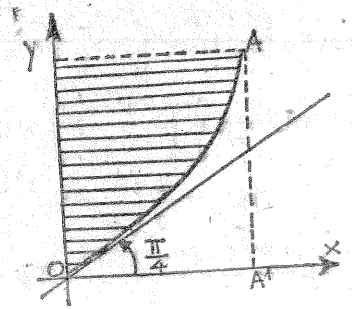


Fig. IX.21.

Volumul $V = V_1 - V_2$, unde V_2 este obținut din rotirea plăcii mărginită de OA și AA_1 iar V_1 este obținut din rotirea dreptunghiului OA_1AB.

$$V_2 = \pi \int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \operatorname{sh}^2 x\, dx = \frac{\pi}{4} \int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} (e^{2x} + e^{-2x} - 2)dx =$$

$$= \pi \frac{4 + 2\sqrt{5}}{4} - \frac{\pi}{2} \ln(2 + \sqrt{5}).$$

$$V_1 = 4\pi \ln(2 + \sqrt{5}).$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{9}{2}\pi \ln(2 + \sqrt{5}) - \pi\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

22. $\dfrac{\pi a^3}{4}\left[\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2}) - \dfrac{2}{3}\right]$. **23.** i) $\dfrac{2}{3}\pi a^3$. ii) $\dfrac{\pi^2}{16}$.

24. $f(x) = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

$$V = \pi \int_{-a}^{a} f^2(x)dx = 2\pi \int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx = \frac{32}{105}\pi a^3.$$

25. Fie ecuația cercului cu centrul în origine (fig. IX.25): $x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y = +\sqrt{r^2 - x^2}$, deoarece am considerat sfertul de cerc din primul cadran.

$$V_1 = \pi \int_0^{\frac{r}{2}} (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \frac{11r^3\pi}{24},\ V_2 = \pi \int_{\frac{r}{2}}^{r} (r^2 - x^2)dx = \frac{5\pi r^3}{24}.$$

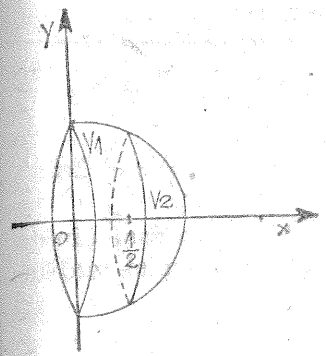


Fig. IX.25

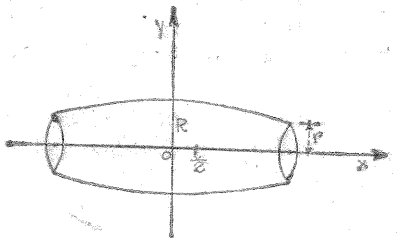


Fig. IX.26

26. Figura IX.26. Fie ecuația parabolei: $x^2 = ay + b$, pentru care vom determina pe a și b. Pentru aceasta vom scrie că parabola conține punctele $A\left(\dfrac{l}{2}, r\right)$, $B(0, R)$ și vom deduce sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{l^2}{4} = ar + b \\ 0 = aR + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{l^2}{4(r-R)} \\ b = \dfrac{-l^2R}{4(r-R)} \end{cases};$$

iar ecuația parabolei este:

$$y = \frac{4(r-R)}{l^2}x^2 + R.$$

Din cauza simetriei:

$$V = 2\pi \int_0^{\frac{l}{2}} \left[\frac{4(r-R)}{2}x^2 + R\right]^2 dx = \frac{\pi l}{15}(8R^2 + 4Rr + 3r^2).$$

27. $\frac{\pi l}{8}(2R^2 + r^2)$.

28. Figura IX.28. Din ecuația cercului:

$y_1 = b - \sqrt{r^2 - x^2}$; $y_2 = b + \sqrt{r^2 - x^2}$;

y_1 fiind ecuația semicercului inferior;

y_2 fiind ecuația semicercului superior.

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (y_2^2 - y_1^2)\mathrm{d}x = \pi \int_{-r}^{r} 4b\sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 8\pi b \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi^2 b r^2 \text{ și scriind: } V = \pi r^2 \cdot 2\pi b,$$

rezultă că volumul torului este egal cu produsul dintre aria cercului care-l generează și lungimea cercului median al său.

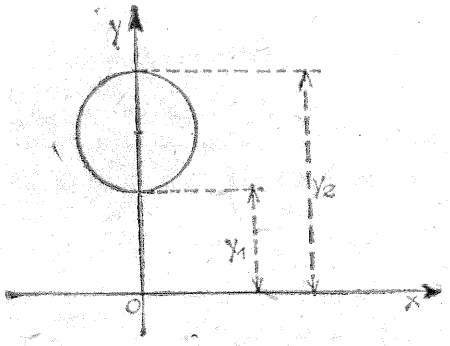


Fig. IX.28

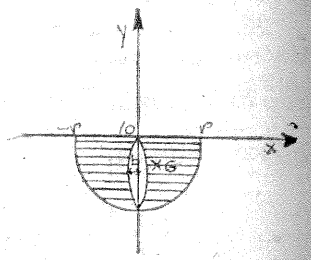


Fig. IX.29

29. Figura IX.29. Aplicînd teorema lui Guldin (vezi problema 56) obținem distanța de la centrul G la axa de rotație care este:

$$x_G\left(\frac{\pi r^2}{4} - \frac{\pi r b}{4}\right) = \frac{\pi r^2}{4} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \cdot r\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r}{2} \cdot b \cdot \frac{4b}{3\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_G = \frac{4}{3\pi}(r + b), \text{ deci } V = \frac{2\pi r}{3}(r^2 - b^2).$$

30. Reamintesc: dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este derivabilă, cu derivata continuă atunci graficul funcției f are lungime finită și $l(f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$.

$$l = \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Efectuăm substituția: $x = 2\operatorname{tg} t$.

$$l = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t \cos^2 t} = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t} +$$

$$+ 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = 2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| - \frac{2}{\cos t}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= 2\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - 2\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + 4 - \frac{4}{\sqrt{2}}.$$

31. Intersecția celor două curbe, va genera abscisele: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$, $x_3 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$; $f(x) = \sqrt{\frac{2}{3}(x - 1)^3}$

$$f'(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{x - 1} \Rightarrow l(f) = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_1^{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} \sqrt{3x - 1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{9}(3x - 1)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{9}\left[\left(\frac{4 + 3\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right].$$

32. $4\frac{26}{37}$. **33.** $y^2 = \frac{x(x - 3a)^2}{9a} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = \pm\frac{1}{3\sqrt{a}} \cdot |x - 3a| \cdot \sqrt{x} =$$

$$= \begin{cases} \pm\dfrac{(x - 3a)\sqrt{x}}{3\sqrt{a}} & \text{pentru } x \in [3a, \infty) \\ \mp\dfrac{(x - 3a)\sqrt{x}}{3\sqrt{a}} & \text{pentru } x \in [0, 3a), \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} \pm\dfrac{x-a}{2\sqrt{ax}} & \text{pentru } x \in [3a, \infty) \\ \mp\dfrac{x-a}{2\sqrt{ax}} & \text{pentru } x \in [0, 3a). \end{cases}$$

$$= 2\int_0^{3a} \sqrt{1 + \frac{(x-a)^2}{4ax}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\left[\int_0^{3a} \sqrt{x}\,dx + a\int_0^{3a} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{a}}\left(2x^{\frac{3}{2}} + 6ax^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_0^{3a} = 4a\sqrt{3}.$$

34. Fie $I_1 = \int \sqrt{1 + [(\ln\cos x)']^2}\,dx = \int \sqrt{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}\,dx =$

$$= \int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}\,dx = -\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right| + C.$$

$$I_2 = \int \sqrt{1 + [(\ln\sin x)']^2}\,dx = \int \sqrt{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{\sin x}\,dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Vom trasa graficele celor două funcții:

$$f_1(x) = \ln(\sin x),\ f_1'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f_1'(x)$	|	$+$	0	$-$	|
$f_1(x)$	|	$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$	|
$f_1''(x)$	|	$-$	$-$	$-$	|

Vezi figura IX.34. i)

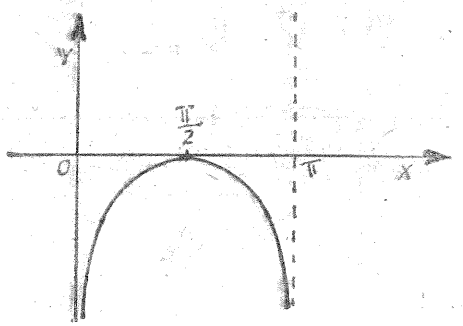


Fig. IX.34 i)

$$f_2(x) = \ln(\cos x),\ f_2'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}$$

Vezi figura IX.34 ii)

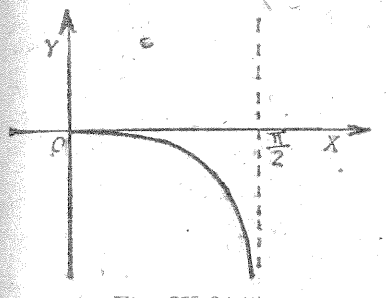


Fig. IX.34 ii)

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f_2'(x)$	|	$-$	|
$f_2(x)$	0	↘	$-\infty$ |
$f_2''(x)$	|	$-$	|

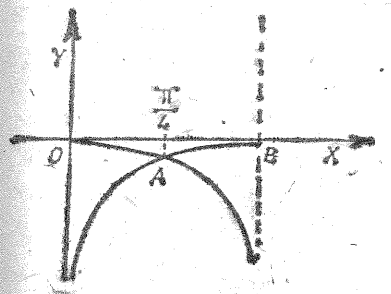


Fig. IX.34 iii)

Deci perimetrul triunghiului mixtiliniu este (Vezi figura IX.34 iii)):

$$l = \widehat{OA} + AB + OB =$$

$$= I_1\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + I_2\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2} =$$

$$= -\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right| - \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right| + \frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right|.$$

Dar $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}} =$

$$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{2}-1.$$

Deci $l = \frac{\pi}{2} - 2\ln(\sqrt{2}-1) = \frac{\pi}{2} + 2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right) =$

$$= \frac{\pi}{2} + 2\ln(\sqrt{2}+1).$$

35. $y' = \frac{x^2-1}{2x}$ avînd punctul de minim, de abscisă $x = 1$

$$y'' = \frac{x^2+1}{2x^2} > 0$$

x	0		1		∞
y'	‖	$-$	0	$+$	
y	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$
y''	‖	$+$	$+$	$+$	

$$l = \int_1^2 \sqrt{1+\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x^2+1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\ln 2\right) = \frac{3+\ln 4}{4}.$$

36. $y' = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ pentru $x \in (0, 1]$

$$l = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{1-x}{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2.$$

37. $y = \pm\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$, cu $x \in [-1, 1]$

$$y' = \frac{1 \mp x}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \\ \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \end{cases}$$

$$l_1 = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \sqrt{2}\int_0^1 \frac{x_0}{\sqrt{1+x}}\,dx =$$

$$= 2\sqrt{2}\sqrt{1+x}\Big|_0^1 = 4-\sqrt{2}.$$

$$l_2 = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \sqrt{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx =$$

$$= -2\sqrt{2}\sqrt{1-x}\Big|_0^1 = 2\sqrt{2}$$

$$l_3 = \int_{-1}^0 \sqrt{1+\frac{1-x}{1+x}}\,dx = 2\sqrt{2}\sqrt{1+x}\Big|_{-1}^0 = 2\sqrt{2}$$

$$l_4 = \int_{-1}^0 \sqrt{1+\frac{1+x}{1-x}}\,dx = -2\sqrt{2}\sqrt{1-x}\Big|_{-1}^0 = 4-2\sqrt{2}$$

Lungimea totală a curbei este: $l = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = 8$.

38. Pentru $t = \frac{2\pi}{3}$; $x = a\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $y = \frac{3a}{2}$.

39. $a\cos t = x^{\frac{1}{5}}$, $a\sin t = y^{\frac{1}{5}} \Rightarrow x^{\frac{2}{5}} + y^{\frac{2}{5}} = a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \left(a^2 - x^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{5}{2}}$

$y' = -x\left(a^2 - x^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

$$l = \int \sqrt{1+x^2\left(a^2-x^{\frac{2}{5}}\right)^3}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l = 5a\left[1+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})\right].$$

40. i) $y' = \dfrac{-e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{e^{-2x}}{1-e^{-2x}}}\,dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{(e^x)^2-1}}\,dx = \ln\left|e^x + \sqrt{e^{2x}-1}\right|\Big|_0^1 =$$

$$= \ln\left(e + \sqrt{e^2-1}\right).$$

ii) $x' = \left(\ln\dfrac{1}{\cos y}\right)' = \operatorname{tg} y$

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 y}\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos y}\,dy =$$

$$= -\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}\right)\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}\right|$$

dar $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}}} = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} =$

$= 2-\sqrt{3} \Rightarrow l = -\ln(2-\sqrt{3}) = \ln\left(\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}\right) = \ln(2+\sqrt{3}).$

iii) $y = \ln\dfrac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}$

$$y' = \frac{4}{a}\cdot\frac{1}{e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}}$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{16}{a^2}\cdot\frac{1}{e^{\frac{4x}{a}} + e^{-\frac{4x}{a}} - 2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{a}\int_a^b \frac{\sqrt{a^2\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right)^2 + 16}}{e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}}\,dx.$$

Se va efectua substituția:

$$e^{\frac{2x}{a}} = t \Rightarrow \frac{2x}{a} = \ln t \Rightarrow dx = \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{t}\,dt.$$

Pentru $x = a \Rightarrow t = e^2$

$$x = b \Rightarrow t = e^{\frac{2b}{a}} \Rightarrow$$

$$l = \frac{1}{a}\int_{e^2}^{e^{\frac{2b}{a}}} \frac{\sqrt{a^2\left(t-\frac{1}{t}\right)^2 + 16}}{t-\frac{1}{t}}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{e^2}^{e^{\frac{2b}{a}}} \sqrt{\frac{a^2(t^2-1)^2 + 16t^2}{t^2(t^2-1)^2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{e^2}^{e^{\frac{2b}{a}}} \sqrt{a^2 + \frac{1}{t^2} + 16\cdot\frac{1}{(t^2-1)^2}}\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l = \ln\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1} + a - b = \ln\frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} a}.$$

41. Reamintesc: dacă $f:[a, b] \to [0, \infty)$ este o funcție derivabilă, cu derivata continuă, atunci suprafața de rotație determinată de f, $S_f = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \sqrt{y^2+z^2} = f(x), \forall\, x \in [a, b]\}$ are arie și este egală cu:

$$A = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx,$$

iar dacă funcția nu este derivabilă la capetele intervalului, atunci va fi prelungită prin continuitate la o funcție $h : [a, b] \to [0, \infty)$ de forma:

$$h(x) = \begin{cases} h(a) = \lim\limits_{x\to a} h(x) & \text{pentru } x = a \\ f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2} & \text{pentru } x \in (a, b) \\ h(b) = \lim\limits_{x\to b} h(x) & \text{pentru } x = b \end{cases}$$

Deci: $A = 2\pi\int_1^3 \sqrt{2px}\cdot\sqrt{1+\dfrac{p}{2x}}\,dx = \dfrac{2\pi}{3p}\left[\sqrt{(6p+p^2)^3} - \sqrt{(p^2+2p)^3}\right].$

Pentru determinarea primitivei s-a efectuat substituția $t = \sqrt{p^2 + 2px}$.

42. i) $A = \frac{4\pi a^2}{243}\left(21\sqrt{13} + 2\ln\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$.

ii) $A = 2a\sqrt{\pi^2a^2+4b^2} + \frac{8b^2}{\pi}\ln\frac{\pi a + \sqrt{\pi^2a^2+4b^2}}{2b}$.

43. Lungimea lănțișorului cuprins între cele două drepte este: $S = a(e - e^{-1})$, iar coordonatele centrului de greutate sînt: $x_G = 0$, $y_G = \frac{a}{4}(e + e^{-1}) + \frac{a^2}{a(e - e^{-1})}$.

Aplicînd prima teoremă a lui Guldin (relativă la suprafețe), avem: $A = 2\pi dl$; $A = S \cdot 2\pi y_G = \frac{\pi a^2}{2}(e^2 + e^{-2} + 4)$.

44. $\frac{\pi a^2}{4}(e^2 - e^{-2} + 4)$. **45.** $2\pi[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})]$.

46. $\pi\left[\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln\frac{2\sqrt{2}+2}{\sqrt{5}+1}\right]$. **47.** $3\pi a^2$.

48. $\frac{12}{5}\pi a^2$. **49.** $8\pi a^2\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$.

50. $A = 2\pi\int_0^1 2e^x\sqrt{1+(2e^x)^2}\,dx =$

$= 2\pi\int_0^1 (2e^x)'\sqrt{1+(2e^x)^2}\,dx.$

Integrala este de tipul:

$$\int\sqrt{1+g^2(x)}\,g'(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[g(x)\sqrt{1+g^2(x)} + \ln\left|g(x)+\sqrt{1+g^2(x)}\right|\right] + C.$$

(s-a aplicat metoda integrării prin părți)

$$A = \pi\left[2e^x\sqrt{1+e^{2x}} + \ln\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right)\right]\Big|_0^1 =$$

$$= \pi\left[\ln\frac{e+\sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}} + 2\left(e\sqrt{1+e^2} - 2\right)\right].$$

51. i) $f'(x) = \frac{1-2x^2}{4\sqrt{1-x^2}}$.

$$A = 2\pi\int_0^1 \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\frac{(1-2x)^2}{16(1-x^2)}}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{8}\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{\sqrt{17-4x-12x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{8}\int_0^1 x\sqrt{17-4x-12x^2}\,dx =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\pi\int_0^1 x\sqrt{\frac{13}{9}-\left(x+\frac{1}{6}\right)^2}\,dx.$$

Primitiva determinîndu-se printr-o integrare prin părți.

$$A = \frac{\pi}{8}\left(\frac{5\sqrt{17}-3}{8} + \ln\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right).$$

ii) $f'(x) = \frac{a-x}{2\sqrt{a}\sqrt{x}}$

$$A = 2\pi\int_0^a \frac{1}{3\sqrt{a}}\sqrt{x}(3a-x)\sqrt{1+\frac{(a-x)^2}{4ax}}\,dx =$$

$$= \frac{2\pi}{3\sqrt{a}}\int_0^{3a}\sqrt{x}(3a-x)\cdot\frac{a+x}{2\sqrt{ax}}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{3a}\int_0^{3a}(3a^2+2ax-x^2)\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{3a}(9a^3+9a^3-9a^3) = 3\pi a^2.$$

52. $A = 2\pi\int_{\ln}^{\ln} e^{-x}\sqrt{1+(e^{-x})^2}\,dx$. Se efectuează substituția $e^{-x} = u$, obținînd $-2\pi\int\sqrt{1+u^2}\,du$ și respectiv substituția $1+u^2=(u+t)^2 \Rightarrow u = \frac{1-t^2}{2t}$ și $du = \frac{-t^2-1}{2t^2}dt \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\pi\int\frac{(t^2+1)^2}{4t^3}dt = \frac{\pi}{2}\int\left(t + 2\cdot\frac{1}{t} + \frac{1}{t^3}\right)dt.$

53. $y' = \dfrac{x^2-1}{2x}$

$$A = 2\pi\int_1^e \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x\right)\sqrt{1+\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2}\,dx =$$

$$= 2\pi\int_1^e \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x\right)\frac{x^2+1}{2x}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_1^e (x^3+x)dx - \frac{\pi}{2}\int_1^e \frac{x^2+1}{x}\ln x\,dx =$$

$$= \frac{\pi(e^4+2e^2-3)}{16} - \frac{\pi}{2}\left[\int_1^e x\ln x\,dx + \int_1^e \frac{1}{x}\ln x\,dx\right]$$

unde $\int_1^e \frac{1}{x}\ln x\,dx = \int_1^e (\ln x)'\cdot\ln x\,dx = \frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^e = \frac{1}{2}$ și

$$\frac{1}{2}\int_1^e x\ln x\,dx = \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right)\Big|_1^e = \frac{e^2+1}{4} \Rightarrow A = \frac{\pi(e^4-9)}{16}.$$

54. i) $2\pi b^2 + \dfrac{2\pi ab}{e}\cdot\arcsin e$; ii) $2\pi a^2 + \pi\dfrac{b^2}{e}\ln\dfrac{1+e}{1-e}$,

unde $e = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ este excentricitatea elipsei.

55. i) $\dfrac{64}{3}\pi a^2$; ii) $16\pi^2a^2$; iii) $\dfrac{32}{3}\pi a^2$.

56. Reamintesc: dacă A este o placă omogenă care se identifică cu o mulțime $\Gamma_{f,g}$ unde $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ sînt funcții continue atunci centrul de greutate al plăcii omogene este punctul de coordonate:

$$X_G = \frac{\int_a^b x[g(x)-f(x)]dx}{\int_a^b [g(x)-f(x)]dx}$$

$$Y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [g^2(x)-f^2(x)]dx}{\int_a^b [g(x)-f(x)]dx}.$$

Teoremele lui Paul Guldin:

1°. Dacă l este lungimea unui arc de curbă plană (C) care se rotește în jurul unei axe (D) din planul său și care nu o intersectează și dacă d este distanța de la centrul de greutate al arcului de curbă pînă la axa (D), atunci aria S a suprafeței de rotație generată de (C) este: $S = 2\pi dl$.

2° Dacă S este aria unei suprafețe plane (F) care se rotește în jurul unei axe (D) din planul său și care nu o intersectează, și dacă d este distanța de la centrul de greutate al lui (F) pînă la axa (D), atunci volumul V al solidului generat de (F) este: $V = 2\pi dS$.

(Fig. IX.56). Pentru determinarea centrului de greutate al plăcii, folosim teorema lui Guldin.

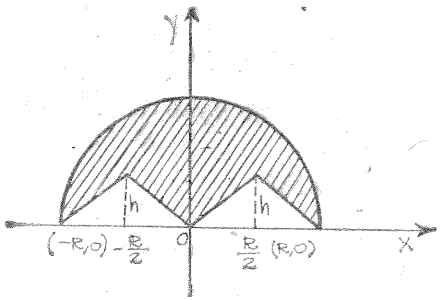


Fig. IX.56

Evident, $x_G = 0$, deoarece G se află pe Oy, din motive de simetrie

Coordonata y_G o obținem din relația $2\pi y_G S = V$, unde $V = V_1 - 2V_2$.

$V_1 = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ — fiind volumul sferei obținută prin rotația semicercului.

$V_2 = \dfrac{1}{3}\cdot 2\cdot\dfrac{R}{2}\pi h^2$ este volumul celor două conuri obținute prin rotația unuia din triunghiurile isoscele în jurul axei Ox.

$S = S_1 - 2S_2 = \dfrac{1}{2}\pi R^2 - 2\cdot\dfrac{1}{2}hR$ adică suprafața rămasă disponibilă.

$$2\pi y_G\left(\frac{1}{2}\pi R^2 - Rh\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi Rh^2 \Rightarrow y_G = \frac{2}{3}\cdot\frac{2R^2-h^2}{\pi R-2h}.$$

57. $x_G = 0,\ y_G = a\dfrac{e^4 + 4e^2 - 1}{8e(e^2 - 1)}$.

58. Fie sectorul circular OAB; B' proiecția punctului B pe axa Ox, având abscisa $b' = R\cos\alpha$.

$$f(x) = \begin{cases} x\operatorname{tg}\alpha & \text{pentru } 0 \leqslant x < b' \\ \sqrt{R^2 - x^2} & \text{pentru } b' \leqslant x \leqslant R. \end{cases}$$

Aria sectorului circular este:

$$S = \int_0^{b'} x\operatorname{tg}\alpha\,dx + \int_{b'}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \frac{\alpha}{2}R^2;$$

$$S\cdot x_G = \int_0^{b'} x^2\operatorname{tg}\alpha\,dx + \int_{b'}^{R} x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}R^3\sin\alpha \Rightarrow x_G = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}R.$$

Analog se calculează y_G:

$$y_G = \frac{4}{3}R\cdot\frac{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\alpha}.$$

59. Centrul de greutate se află pe axa de simetrie a plăcii. Se aplică teorema lui Guldin luînd ca axă de rotație tangenta comună Ox la cele două cercuri (C_1), (C). Volumul corpului generat de solid prin rotație în jurul axei Ox este egal cu:

$$V = 2\pi^2R^3 - 2\pi^2\frac{R^2}{9}\cdot\frac{R}{3} = \frac{52}{27}\pi^2R^3,$$

dar conform teoremei lui Guldin

$$V = 2\pi y_G\left[\pi R^2 - \pi\left(\frac{R}{3}\right)^2\right] \Rightarrow y_G = \frac{13}{12}R.$$

60. i) $x_G = y_G = \dfrac{4}{3\pi}$;

ii) $x_G = \dfrac{\pi}{2},\ y_G = \dfrac{\pi}{8}$.

61. $$x_G = \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}{\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx} = \frac{\dfrac{8}{15} - \dfrac{43}{60\sqrt{2}}}{\dfrac{3\pi}{32} - \dfrac{1}{4}}$$

$$y_G = \frac{\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^8}{1-x^2}\,dx}{\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx} = \frac{-\dfrac{1\,037}{840\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2}\cdot\ln\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}{\dfrac{3\pi}{32} - \dfrac{1}{4}},$$

unde integralele au fost rezolvate, efectuînd substituția

$$x = \sin t.$$

62. $x_G = \dfrac{5}{8},\ y_G = 0.$

63. a) Parabolele y_1, y_2 se intersectează în punctele $A(1, 3)$ și $B(3, 3)$, iar dreapta $y = 3$ este axă de simetrie a celor două parabole. Tot axă de simetrie pentru cele două parabole este și dreapta $x = 2$. Deci centrul de greutate se află la intersecția dreptelor $x = 2$ și $y = 3$, deci centrul de simetrie are coordonatele (2, 3)

b) Aria plăcii este: $S = \dfrac{8}{3}$; $V_x = S\cdot 2\pi y = \dfrac{8}{3}\cdot 2\pi\cdot 3 = 16\pi$.

c) $V_y = S\cdot 2\pi x = \dfrac{8}{3}\cdot 2\pi\cdot 2 = \dfrac{32}{3}\pi$ (cf. teoremei lui Guldin).

64. $x_G = \dfrac{\sin b - b\cos b}{1 - \cos b},\ y_G = \dfrac{2b - \sin 2b}{8(1 - \cos b)}\cdot a.$

65. (Fig. IX.65). Coarda are ecuația:

$$y = \frac{b}{a}(a - x).$$

$$x_G = \frac{\displaystyle\int_0^a x\left[\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{b}{a}(a - x)\right]dx}{\displaystyle\int_0^a\left[\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{b}{a}(a - x)\right]dx} = \frac{2a}{2(\pi - 2)};$$

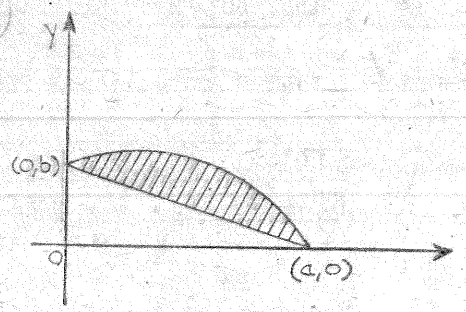


Fig. IX.65

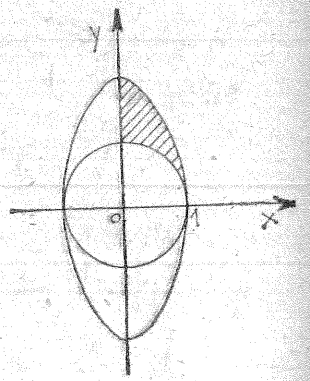


Fig. IX.66

$$y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_0^a \left[\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) - \frac{b^2}{a^2}(a-x)^2\right]dx}{\frac{b}{a}\int_0^a \left[\sqrt{a^2 - x^2} - (a - x)\right]dx} = \frac{2b}{3(\pi - 2)}.$$

66. (Fig. IX.66). $y = 2\sqrt{1 - x^2}$; $y = \sqrt{1 - x^2}$.

$$x_G = \frac{\int_0^1 x\left[2\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - x^2}\right]dx}{\int_0^1 \left(2\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - x^2}\right)dx} = \frac{4}{3\pi},\ y_G = \frac{4}{\pi}.$$

67. $x_G = \frac{a}{5}$, $y_G = \frac{a}{5}$. **68.** $x_G = \frac{4a}{3\pi}$, $y_G = \frac{4b}{3\pi}$.

69. $x_G = \pi a$, $y_G = \frac{4}{3}a$. **70.** $x_G = \frac{2}{5}a$, $y_G = \frac{2}{5}a$.

71. $\frac{3}{8}R$. **72.** $x_G = y_G = \frac{2}{5}a$. **73.** $x_G = y_G = \frac{9}{10}p$.

74. $x_G = 0$, $y_G = \frac{4}{3}\cdot\frac{r}{\pi}$.

Axele de coordonate sînt alese astfel încît axa Ox coincide cu un diametru, iar originea axelor de coordonate cu centrul cercului.

75. Folosim teorema lui Guldin. Dacă $G(x_G, y_G)$ este centrul de greutate al plăcii, atunci prin rotația plăcii în jurul axei Ox avem: $2\pi y_G S = V$, unde $S = \frac{1}{4}\pi R^2 - ab$ este suprafața plăcii,

$V = V_1 - V_2 = \frac{2}{3}\pi R^3 - \pi b^2 a$ fiind volumul generat de placă prin rotirea în jurul axei Ox.

Deci: $2\pi y_G\left(\frac{1}{4}\pi R^2 - ab\right) = \frac{2}{3}\pi R^3 - \pi b^2 a \Rightarrow$

$$\Rightarrow y_G = \frac{2}{3}\cdot\frac{2R^3 - 3b^2 a}{\pi R^2 - 4ab}.$$

Dacă rotim placa în jurul axei Oy, avem

$$2\pi x_G S = V',$$

unde S este suprafața plăcii.

$V' = V_1 - V_2' = \frac{2}{3}\pi R^3 - \pi a^2 b$ este volumul generat de placă prin rotirea în jurul axei Oy.

Deci: $2\pi x_G\left(\frac{1}{4}\pi R^2 - ab\right) = \frac{2}{3}\pi R^3 - \pi a^2 b \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_G = \frac{2}{3}\cdot\frac{2R^3 - 3a^2 b}{\pi R^2 - 4ab}.$$

Coordonatele centrului de greutate sînt:

$$G\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2R^3 - 3a^2 b}{\pi R^2 - 4ab}, \frac{2}{3}\cdot\frac{2R^3 - 3ab^2}{\pi R^2 - 4ab}\right).$$

76. i) Fig. IX.76. Din motive de simetrie, centrul de greutate se află pe dreapta $x_G = \frac{\pi}{2}$.

$$y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_0^\pi f^2(x)dx}{\int_0^\pi f(x)dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2 x\,dx}{\int_0^\pi \sin x\,dx} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G\left(x_G = \frac{\pi}{2},\ y_G = \frac{\pi}{8}\right).$$

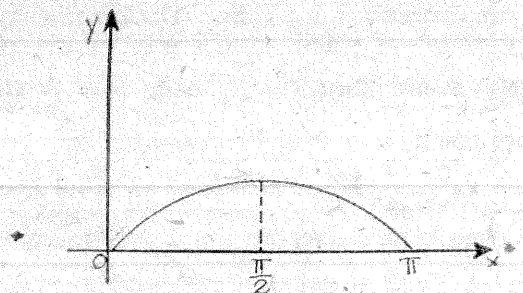


Fig. IX.76

ii) Pentru determinarea volumului corpului de rotație în jurul axei Ox, aplicăm teorema lui Guldin: $2\pi y_G S = V$.

$$S = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2 \Rightarrow \text{reprezintă suprafața plăcii,}$$

$$\text{deci } V = 2\pi \cdot \frac{\pi}{8} \cdot 2 = \frac{\pi^2}{2}.$$

77. Reamintesc: Momentul de inerție al unei plăci omogene de forma unui trapez curbiliniu, față de axa Ox, placă limitată de curbele (C_1), (C_2) și de dreptele $x = a$ și $x = b$ este:

$$I_{Ox} = \frac{\mu_0}{3} \int_a^b [g^3(x) - f^3(x)]dx,$$

unde constanta pozitivă μ_0 se numește masă specifică sau densitatea corpului.

Momentul de inerție al unui corp de rotație omogen față de axa de rotație Ox; corp generat prin rotația curbei $y = f(x) \geqslant 0$, $x \in [a, b]$ în jurul axei Ox, este:

$$I_{Ox} = \frac{\pi}{2} \mu_0 \int_a^b f^4(x)dx.$$

Momentul de inerție este: $I_{Ox} = \int_0^a x^2 \cdot \rho(x) \, dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow I_{Ox} = k^2 \int_0^a \frac{x^2}{a^2 + x^2} dx = k^2 \int_0^a \left(1 - \frac{a^2}{a^2 + x^2}\right) dx =$$

$$= \left(k^2 x - k^2 a \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\right)\Big|_0^a \Rightarrow I_{Ox} = k^2 \cdot a\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

78. Momentul de inerție este: $I_{Ox} = \int_0^a x^2 \ln(a^2 + x^2)dx$.

Integrînd prin părți:

$$\begin{cases} x^2 \, dx = du \\ v = \ln(a^2 + x^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \dfrac{x^3}{3} \\ dv = \dfrac{2x}{a^2 + x^2} dx \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{Ox} = \frac{1}{3} x^3 \ln(a^2 + x^2)\Big|_0^a - \frac{2}{3} \int_0^a \frac{x^4}{a^2 + x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{3} a^3 \ln(2a^2) - \frac{2}{3} \int_0^a \left(x^2 - a^2 + \frac{a^4}{x^2 + a^2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} a^3 \ln(2a^2) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3} x^3 - a^2 x + a^3 \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\right)\Big|_0^a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{Ox} = \frac{a^3}{3}\left[\frac{4}{3} - \frac{\pi}{2} + \ln(2a^2)\right].$$

79. i) $I_{Ox} = \frac{\mu_0}{3} \int_{-a}^a \operatorname{ch}^3 x dx = \frac{\mu_0}{3} \int_{-a}^a \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^3 dx =$

$$= \frac{\mu_0}{18} (\operatorname{sh} 3a + 9 \operatorname{sh} a).$$

ii) $V = \pi \int_{-a}^a \operatorname{ch}^2 x dx = \pi \int_{-a}^a \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2} (\operatorname{sh} 2a + 2a).$

80. Ecuația elipsei este: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. $I_{Ox} = \frac{b^2}{4} m$, unde $m = \mu_0 \pi ab$ (m fiind masa plăcii, iar aria elipsei este πab).

81. Fie R — raza bazei, H — înălțimea. $f(x) = R$, $H = b - a$.

$$I_{Ox} = \frac{\pi}{2} \mu_0 \int_a^b R^4 \, dx = \frac{\pi}{2} \mu_0 R^4 (b - a) =$$

$$= \mu_0 \pi R^2 H \cdot \frac{R^2}{2} = m \frac{R^2}{2}.$$

82. $I_{Ox} = m(c^2 + cd + d^2)$ unde $m = \mu_0(b - a)(d - c)$.

83. Din ecuația elipsei deducem:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \Rightarrow I_{Ox} = \frac{\pi}{2}\mu_0 \int_{-a}^{a} y^4\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \mu_0 \cdot \frac{b^4}{a^4} \cdot \frac{16a^5}{15} = \frac{8}{15}\pi\mu_0 ab^4.$$

Deci $I_{Ox} = \frac{2}{5} mb^2$ unde $m = \mu_0 V = \mu_0 \cdot \frac{4\pi}{3} ab^2$.

84. $\frac{1}{6}\pi R^4 \cdot H$.

85. Să considerăm conul circular generat prin rotația segmentului de dreaptă $y = \frac{R}{H}x$ cu $0 \leqslant x \leqslant H$.

$$I_{Ox} = \frac{\pi}{2}\mu_0 \int_0 \frac{R^4}{H^4} x^4\,dx = \frac{\pi}{10}\mu_0 R^4 H =$$

$$= \mu_0 \frac{\pi}{3} R^2 H \cdot \frac{3}{10} \cdot R^2 = \frac{3}{10} R^2 m,\ m \text{ fiind masa corpului.}$$

86. Se consideră cercul de ecuație:

$$y^2 = R^2 - x^2,\ I_{Ox} = \frac{\pi}{2}\mu_0 \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)^2 dx =$$

$$= \frac{8}{15}\pi\mu_0 R^5 = \mu_0 \cdot \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \frac{2}{5} R^2 = m \cdot \frac{2}{5} R^2.$$

87. Împărțim conul în cilindri elementari, paraleli cu axa conului. Volumul unui cilindru elementar este: $dV = 2\pi r h\,dr$, unde r este raza cilindrului (distanța pînă la axa conului); $h = H\left(1 - \frac{r}{R}\right)$ — (înălțimea cilindrului elementar).

Atunci momentul de inerție este: $I = \mu_0 \int_0^R 2\pi H \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot r^3 dr = \frac{\mu_0 \pi R^4 H}{10}$, unde μ_0 este densitatea conului.

88. $m_S = \int_a^b xf(x)\,dx;\ m_i = \int_a^b x^2 f(x)dx$.

i) Luăm diametrul pe axa Oy. Din cauza simetriei față de Ox, avem (fig. IX.88 a): $m_S = 2\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{2}{3}a^2$.

ii) Figura IX.88b. $m_i = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 b\,dx = \frac{1}{12}a^3 b$.

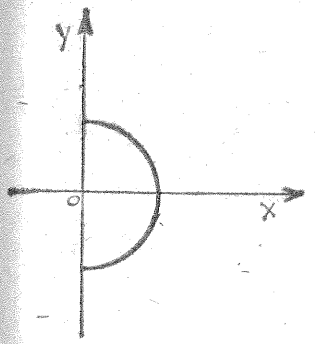


Fig. IX.88 a

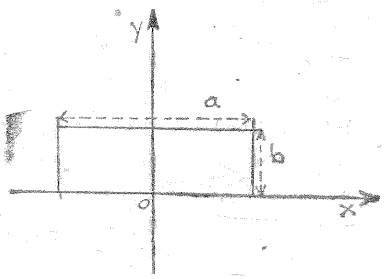


Fig. IX. 88 b

89. Figura IX.89. $f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,x$, $m_S = \frac{1}{4}a^3$, $m_i = \frac{3}{32}\sqrt{3}\,a^4$.

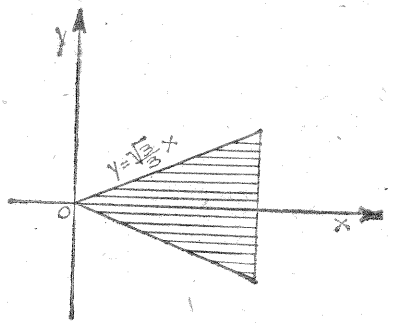


Fig. IX.89.

90. $\frac{b^2}{2} + \frac{ab}{2e} \cdot \arcsin e$, unde e este excentricitatea elipsei $\left(e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right)$.

91. i) $v = S'(t) = 3 \cdot \frac{5\pi}{6} \cdot \cos\left(\frac{5\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$.

$v = 0$ pentru $\frac{5\pi t}{6} + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

$v = \max.$ pentru $\frac{5\pi t}{6} + \frac{\pi}{4} = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

ii) $a = v'(t) = S''(t) = -3 \cdot \left(\frac{5\pi}{6}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{5\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$;

$a = 0$ pentru $\frac{5\pi}{6} t + \frac{\pi}{4} = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

$a = \max.$ pentru $\frac{5\pi}{6} t + \frac{\pi}{4} = (4k-1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

92. Derivînd în raport cu t obținem:

$x' = -C_1\omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t$.

$x'' = -C_1 \cdot \omega^2 \cos \omega t - C_2\omega^2 \sin \omega t$.

$x'' = -\omega^2(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t)$.

$x'' = -\omega^2 x$.

93. Figura IX.93. $y = (x-1)^2 - 2(x-1) = (x-1)(x-3)$, $x \geqslant 1$. Traiectoria este o parabolă cu vîrful în $(2, -1)$.

Vectorul viteză $\overrightarrow{MV}$ are ca proiecții: $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dy}{dt} = 2t - 2$.

$$|\overrightarrow{MV}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{4(t-1)^2 + 1} = \sqrt{4t^2 - 8t + 5}$$

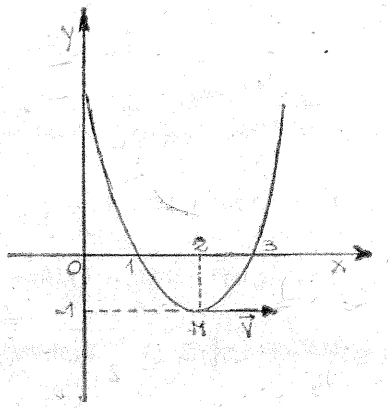


Fig. IX.93.

Mișcarea este accelerată cînd MV crește, deci pentru $t > 1$ și întîrziată cînd MV descrește, adică $t \in [0, 1)$.

Vectorul accelerației are coordonatele $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = 2$ (unde accelerația se determină derivînd spațiul de două ori în raport cu timpul, deci $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ și $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$),

94. *Reamintesc*: fie $F : [a, b] \to \mathbf{R}$ o forță care este considerată ca o funcție continuă și P o particulă care se mișcă în intervalul $[a, b]$ sub acțiunea forței F. Atunci lucrul mecanic efectuat de forța F pentru deplasarea particulei P din punctul a în punctul b, este numărul real:

$$L(F) = \int_a^b F(x)\mathrm{d}x.$$

Lucrul mecanic este necesar pentru greutatea G și pentru greutatea cablului. Într-o poziție oarecare, după parcurgerea unui drum x de la pornire, greutatea cablului este $p(h - x)$, unde p este greutatea pe unitate de lungime a cablului. Astfel avem:

$$L = -\int_0^h [G + p(h-x)]\mathrm{d}x = -\left(Gh + \frac{1}{2} ph^2\right),$$

iar pentru aplicația numerică:

$$L = -\left(120 \cdot 20 + 0{,}6 \cdot \frac{20^2}{2}\right) = -2\,520 \text{ kg} \cdot \text{m}.$$

95. Forța = masa × accelerația; $L = \int_{v_2}^{v_1} mv\,\mathrm{d}v = \frac{m}{2}(v_1^2 - v_2^2)$.

96. $L(f) = \int_{x_0}^{x_1} \left(-\frac{mk^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x = mk^2\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0}\right)$.

97. Figura IX.97. $f = k(l - l_0)$, unde k este factorul de proporționalitate. Lucrul mecanic este:

$$L = \int_{l_0}^{l} k(l - l_0)\mathrm{d}l = \frac{1}{2} k(l - l_0)^2.$$

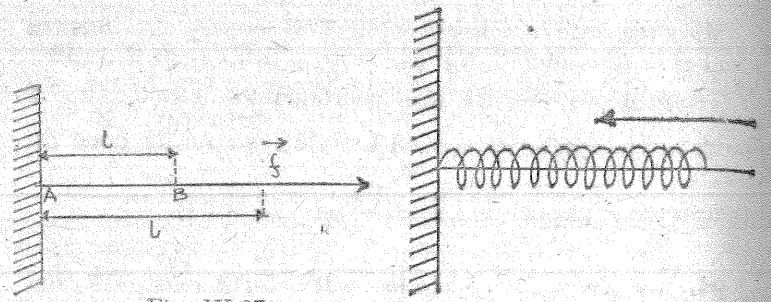


Fig. IX.97

Fig. IX.98.

98. Figura IX.98. Fie x comprimarea arcului; atunci forța de comprimare este: $f = kx$, din care pentru $f = 1$ kg și $x = 0{,}5$ cm, deducem: $k = 2$ kg $\cdot$ cm^{-1}. Lucrul mecanic:

$$L = \int_0^3 2x\,dx = 9 \text{ kg}\cdot\text{cm}.$$

99. 9 kg $\cdot$ cm.

100. Forța necesară pentru a întinde un resort de lungime dată l pînă la lungimea $l + x$ este proporțională cu lungimea x, adică $F(x) = kx$, (Constanta $k > 0$, depinde de resort și poate fi determinată dacă se cunosc unele date suplimentare despre resort, adică dacă se știe că pentru a întinde resortul cu a cm este nevoie de o forță de b kgf, atunci $k \cdot \frac{a}{100} = b \Rightarrow k = 100\frac{b}{a}$).

Deci lucrul mecanic necesar pentru a întinde resortul pînă la lungimea $l + l_0$ $(l_0 > 0)$ este:

$$L = \int_0^{l_0} kx\,dx = k\frac{x^2}{2}\Big|_0^{l_0} = \frac{k}{2}l_0^2.$$

$L = \int_0^5 kx\,dx = \frac{25}{2}k$. Vom determina constanta k:

$k : \frac{1}{100} = 1 \Rightarrow k = 100 \Rightarrow L = \frac{25}{2} \cdot 100 = 1\,250 \Rightarrow L = 0{,}125$ J.

101. $P = \int_0^{10} 20x\,dx = 1\,000$ t.

Reamintesc: presiunea exercitată de un lichid (gaz) asupra unui element de arie ΔS.

Vom considera o placă omogenă, de forma indicată în figura IX. 101, cufundată într-un lichid a cărui greutate a unității de volum este γ (constantă pentru un anumit lichid, în particular $\gamma = 1$ pentru apă). Elementul de arie ΔS suportă presiunea $\gamma \cdot x \cdot \Delta x$, unde x reprezintă adîncimea. Presiunea totală P este dată de:

$$P = \lim_{n\to\infty} \sum_{x_c}^{x_n} \gamma \cdot x \cdot \Delta x = \int_a^b \gamma \cdot x \cdot dS = \gamma \cdot \int_a^b x \cdot dS$$

unde dS trebuie exprimat în funcție de x.

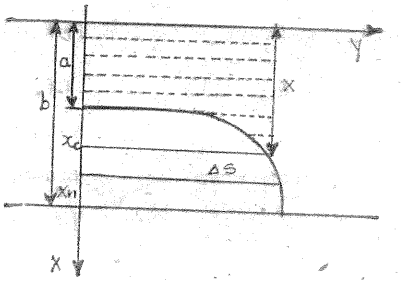


Fig. IX.101

102. Figura IX.102. Din geometria analitică se știe că: pătratele a două coarde oarecare, perpendiculare pe axa parabolei sînt în același raport ca și distanțele lor de la vîrful parabolei:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{(2y_1)^2}{(2y_2)^2}.$$

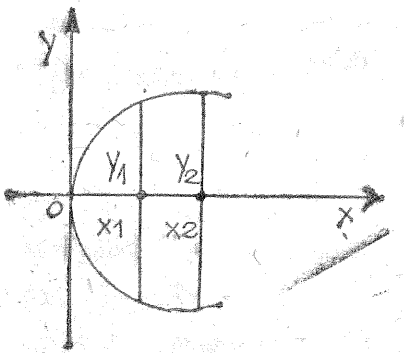


Fig. IX.102 a.

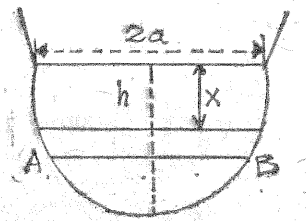


Fig. IX.102 b.

Deci $AB = \frac{2ax^{\frac{1}{2}}}{h^{\frac{1}{2}}}$, și $P = \gamma \int_0^h \frac{2a}{\sqrt{h}}(h-x)\sqrt{x}\,dx = \frac{8}{15}\gamma a b^2$.

103. Figura IX.103. $BC = 2\sqrt{15^2 - h^2}$;

$$ds = 2\sqrt{15^2 - h^2}\,dh; \quad \gamma = 1.$$

Aplicăm formula: $P = \gamma \int_a^b h\,ds$, unde γ este greutatea specifică a lichidului, h înălțimea coloanei, ds element de arie. Obținem: $P = 2\int_0^{15} h\sqrt{225 - h^2}\,dh = 2\,250$ g.

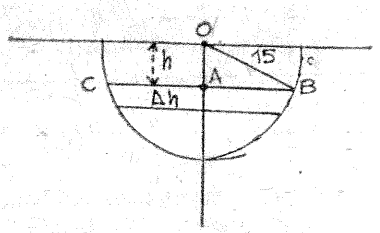


Fig. IX.103.

104. Pentru 1 m³ de apă, căldura specifică este dată de:

$$f_1(t) = 1\,000 f(t) = 1\,000 + 0{,}04\,t + 0{,}0009\,t^2.$$

Căldura specifică se determină derivînd cantitatea de căldură $Q(t)$ în raport cu t, deci: $\frac{dQ(t)}{dt} = 1\,000 + 0{,}04\,t + 0{,}0009\,t^2$.

Integrînd obținem: $Q = \int_a^b f(t)dt$;

$$Q = \int_{10}^{60} (1\,000 + 0{,}04\,t + 0{,}0009\,t^2)dt = 50\,134{,}5 \text{ kcal}.$$

105. $C_{med} = \frac{1}{218 - 116} \cdot \int_{116}^{218} c\,dt = 0{,}3945.$

106. Fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

a) dacă funcțiile f și g sînt derivabile pe un același interval $[a, b]$ și $f = g$ pe $[a, b]$ atunci $f' = g'$ pe $[a, b]$.

b) dacă funcțiile f și g sînt integrabile pe un interval $[a, b]$ și $f = g$ pe $[a, b]$ atunci

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

i) Fie $f(x) = (1 + x)^n$ care este o funcție derivabilă; conform binomului lui Newton

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

Derivînd ambii membri ai egalității obținem:

$$n(1 + x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot C_n^k x^{k-1} \qquad (1)$$

și pentru $x = 1$ obținem: $n \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k$.

ii) Derivînd egalitatea (1) obținem:

$$\sum_{k=2}^{n} (k-1)kC_n^k x^{k-2} = n(n-1)(1 + x)^{n-2}$$

și pentru $x = 1$ obținem:

$$\sum_{k=2}^{n} (k-1)k \cdot C_n^k = n(n-1) \cdot 2^{n-2}.$$

iii) Înmulțind egalitatea (1) cu x și apoi derivînd ambii membri obținem:

$$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k x^k = nx(1 + x)^{n-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k x^{k-1} = n[1 + x + x(n-1)](1 + x)^{n-2}$$

și pentru $x = 1$ obținem:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k = n(n+1) \cdot 2^{n-2}.$$

iv) Înmulțind egalitatea (1) cu x^2 și apoi derivînd egalitatea obținem:

$$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k x^{k+1} = nx^2(1+x)^{n-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)C_n^k x^k = nx[2+(1+n)x](1+x)^{n-2}$$

și pentru $x=1$ obținem:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)C_n^k = n(n+3)2^{n-2}.$$

v) Înmulțind egalitatea (1) cu x^3 și apoi derivînd de două ori egalitatea obținem:

$$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k x^{k+2} = nx^3(1+x)^{n-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+2)C_n^k x^{k+1} = nx^2(1+x)^{n-2}[3+(n+2)x]$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)C_n^k x^k = nx(1+x)^{n-2}[(n^2+7n+10)x^2 + 6(n+3)x+6]$$

și pentru $x=1$ obținem:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)C_n^k = n(n^2+13n+34)\cdot 2^{n-2}.$$

vi) Înmulțind egalitatea (1) cu x și apoi derivînd egalitatea obținem:

$$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k x^k = nx(1+x)^{n-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2C_n^k x^{k-1} = n(1+nx)(1+x)^{n-2}$$

egalitate pe care o înmulțim cu x, apoi o derivăm:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2C_n^k x^k = n(1+nx)x(1+x)^{n-2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3C_n^k x^{k-1} = n(1+x^{n-3})[n^2x^2+(3n-1)x+1]$$

și pentru $x=1$ obținem:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3C_n^k = n^2(n+3)2^{n-3}.$$

vii) Fie $f(x)=(1-x)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^k$. Derivînd egalitatea obținem:

$$-n(1-x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k kC_n^k x^{k-1} \qquad (2)$$

și pentru $x=1$ obținem:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k kC_n^k = 0.$$

viii) Înmulțind egalitatea (2) cu x și apoi derivînd obținem:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^n kC_n^k x^k = -nx(1-x)^{n-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2C_n^k x^{k-1} = -n(1-nx)(1-x)^{n-2}$$

și pentru $x=1$ obținem:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2C_n^k = 0 \;:/-1$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} k^2C_n^k = 0.$$

ix) Înmulțind egalitatea (2) cu x^3 și apoi derivînd de două ori obținem:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k kC_n^k x^{k+2} = (-n)(1-x)^{n-1}x^3$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k(k+2)C_n^k x^{k+1} = -nx^2(1-x)^{n-2}[3-(n+2)x]$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k(k+1)(k+2)C_n^k x^k = -nx(1-x)^{n-3}[(n^2+3n+2)x^2 - 6(n+1)x+6]$$

și pentru $x = 1$ obținem:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k(k+1)(k+2)C_n^k = 0 \cdot /-1$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k(k+1)(k+2)C_n^k = 0.$$

x) Fie $f(x) = (1+x)^n$ care este o funcție integrabilă pe intervalul $[0, 1]$.

Aplicînd binomul lui Newton obținem:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k. \tag{3}$$

Integrînd ambii membri obținem:

$$\int_0^1 (1+x)^n \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \int_0^1 x^k \,\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_0^1 \Rightarrow \frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \cdot C_n^k.$$

xi) Integrînd de două ori egalitatea (3) obținem:

$$\frac{(1+x)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\Big|_0^1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \frac{x^{k+2}}{(k+1)(k+2)}\Big|_0^1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2^{n+2}-1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \cdot C_n^k.$$

xii) Integrăm de două ori egalitatea (3) apoi ecuația rezultată o înmulțim cu x, apoi noua ecuație o vom deriva:

$$\frac{(1+x)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{x^{k+2}}{(k+1)(k+2)} \cdot /x$$

$$\frac{(1+x)^{n+2} \cdot x}{(n+1)(n+2)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{x^{k+3}}{(k+1)(k+2)} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k+3}{(k+1)(k+2)} \cdot C_n^k \cdot x^{k+2} = \frac{[1+(n+3)x](1+x)^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$$

și pentru $x = 1$ obținem:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k+3}{(k+1)(k+2)} \cdot C_n^k = \frac{(n+4) \cdot 2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}.$$

xiii) Fie funcția $f(x) = (1-x)^n$ care este o funcție integrabilă pe intervalul $[0, 1]$ și aplicînd binomul lui Newton obținem:

$$(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^k \tag{4}$$

și integrînd ambii membri obținem:

$$\sum_{k=0}^{k} (-1)^k C_n^k \int_0^1 x^k \mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)^n \mathrm{d}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{k+1} \cdot x^{k+1}\Big|_0^1 = -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{1}{k+1} \cdot C_n^k = \frac{1}{n+1}.$$

xiv) $(1-x)^n = 1 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - C_n^3 x^3 + \ldots \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 - (1-x)^n = x(C_n^1 - C_n^2 x + C_n^3 x^2 - \ldots) \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x} \mathrm{d}x = \int_0^1 (C_n^1 - C_n^2 x + C_n^3 x^2 - \ldots)\mathrm{d}x$$

și $\int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x[1+(1-x)+\ldots+(1-x)^{n-1}]}{x} \mathrm{d}x =$

$$= x + \frac{(1-x)^2}{2} + \frac{(1-x)^3}{3} + \ldots + \frac{(1-x)^n}{n}\Big|_0^1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \cdot C_n^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

xv) Integrînd de două ori egalitatea (4) apoi ecuația rezultat o înmulțim cu x, apoi noua ecuație o derivăm:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \cdot C_n^k \cdot x^{k+1} = -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)} \cdot C_n^k \cdot x^{k+2} = \frac{(1-x)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \cdot /x$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)} \cdot C_n^k \cdot x^{k+3} = \frac{x(1-x)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (k+3)}{(k+1)(k+2)} \cdot C_n^k \cdot x^{k+2} = \frac{[1-(n+3)x](1-x)^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$$

și pentru $x = 1$ obținem:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (k+3)}{(k+1)(k+2)} \cdot C_n^k = 0.$$

107. $$S = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$C = \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}},$$

derivînd ambii membri ai egalităților precedente obținem:

$$S' = \sum_{k=1}^{n} x \cos kx \Rightarrow C_1 = S'(x).$$

$$S'' = -\sum_{k=1}^{n} k^2 \sin kx \Rightarrow S_2 = -S''(x).$$

$$S''' = -\sum_{k=1}^{n} k^3 \cos kx \Rightarrow C_3 = -S'''(x).$$

$$C' = -\sum_{k=1}^{n} k \sin kx \Rightarrow S_1 = -C'(x).$$

$$C'' = -\sum_{k=1}^{n} k^2 \cos kx \Rightarrow C_2 = -C''(x).$$

$$C''' = \sum_{k=1}^{n} k^3 \sin kx \Rightarrow S_3 = C'''(x).$$

Sumele inițiale S și C se calculează înmulțind egalitățile cu $\sin \frac{x}{2}$, apoi termenul general $\sin \frac{x}{2} \cdot \sin kx$ respectiv $\sin \frac{x}{2} \cos kx$ se scrie ca o diferență de doi termeni. Efectuînd sumele și reducînd termenii asemenea vom obține valorile ireductibile ale sumelor.

CAPITOLUL X

METODE DE CALCUL APROXIMATIV

DETERMINAREA VALORILOR APROXIMATIVE ALE RĂDĂCINILOR ECUAȚIILOR, CALCULUL APROXIMATIV AL INTEGRALELOR DEFINITE, FOLOSIND METODE DE CALCUL NUMERIC

I. Metoda înjumătățirii intervalului

Fie ecuația $f(x) = 0$, unde f este o funcție continuă pe $[a, b]$, și $f(a) \cdot f(b) < 0$ (adică funcția admite o rădăcină în intervalul considerat conform unei consecințe a proprietății lui Darboux). Pentru a determina rădăcina ecuației, se împarte intervalul în două segmente $\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ și se verifică semnul funcției la capetele intervalelor, alegîndu-se intervalul la capetele căruia funcția își schimbă semnul. Raționamentul continuă pînă se obține:

$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0, \; n \in \mathbf{N},$$

cu $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a)$ și $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n = x_0$, unde x_0 este rădăcina căutată.

Această metodă este comodă pentru a obține o estimare grosieră a unei rădăcini a ecuației date.

Exemplu:

Fie $f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$.

Să se aproximeze rădăcina ecuației date cuprinsă în intervalul $[0, 1]$.

$f(0) = -1$, $f(1) = 1$; $f(0,5) = -1,19$; $f(0,75) = -0,59$; $f(0,875) = +0,05$; $f(0,8125) = -0,304$; $f(0,8438) = -0,135$; $f(0,8594) = -0,043$.

Putem considera rădăcina:

$$x_0 = \frac{1}{2}(0,859 + 0,875) = 0,867.$$

II. Metoda coardei

Fie f o funcție continuă pe $[a, b]$ și $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ (fig. X.II). (Analog se tratează cazul $f(a) > 0$, $f(b) < 0$).

$x_1 = a + h_1$ unde

$$h_1 = -\frac{f(a)}{f(b) - f(a)} \cdot (b - a).$$

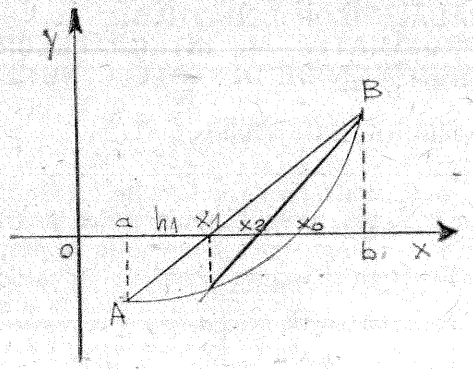


Fig. X. II.

Aplicînd metoda pe unul dintre segmentele $[a, x_1]$ sau $[x_1, b]$, interval pe care funcția își schimbă semnul la extremități, se obține o a doua aproximare x_2 a rădăcinii x_0 și procedeul continuă pînă cînd rădăcina va fi aproximată prin adaus sau lipsă, cu precizia cerută (sau cu aproximația cerută).

Exemplu: Determinați rădăcina pozitivă a ecuației:

$f(x) = x^3 - 0{,}2x^2 - 0{,}2x - 1{,}2 = 0$, cu precizia de 0,002.

Mai întîi separăm rădăcinile:

$$f(1) = -0{,}6 < 0,\ f(2) = 5{,}6 > 0.$$

Rădăcina $x_0 \in (1, 2)$. Cum intervalul ales este mare, considerînd $f(1{,}5) = 1{,}425$ și $1 < x_0 < 1{,}5$. Aplicînd formula în mod succesiv obținem:

$$x_1 = 1 + \frac{0{,}6}{1{,}425 + 0{,}6}(1{,}5 - 1) = 1{,}15 \Rightarrow f(x_1) = -0{,}173.$$

$$x_2 = 1{,}15 + \frac{0{,}173}{1{,}425 + 0{,}173}(1{,}5 - 1{,}15) = 1{,}190 \Rightarrow f(x_2) = -0{,}036.$$

$$x_3 = 1{,}190 + \frac{0{,}036}{1{,}425 + 0{,}036}(1{,}5 - 1{,}190) = 1{,}198 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_3) = -0{,}0072.$$

Cum $f'(x) = 3x^2 - 0{,}4x - 0{,}2$ și

$x_3 < x < 1{,}5$ avem: $f'(x) \geqslant 3 \cdot (1{,}198)^2 - 0{,}4 \cdot 1{,}5 - 0{,}2 = 3{,}49$.

Punînd: $0 < x_0 - x_3 < \frac{0{,}0072}{3{,}49} \approx 0{,}002$, obținem

$$x_0 = 1{,}198 + 0{,}002 \cdot c, \text{ unde } c \in (0, 1].$$

III. Metoda tangentei *(sau metoda lui Newton)*

Fie f o funcție continuă pe $[a, b]$ și $x_0 \in [a, b]$, rădăcina funcției, pe care urmează să o aproximăm, iar $f'(x)$ și $f''(x)$ sînt continue și păstrează semn constant pe intervalul $[a, b]$.

Scriind ecuațiile tangentelor la curbă în punctele $A(a, f(a))$ și $B(b, f(b))$ și intersectînd cu abscisa obținem (fig. X.III):

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}, \text{ respectiv}$$

$$x_1' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

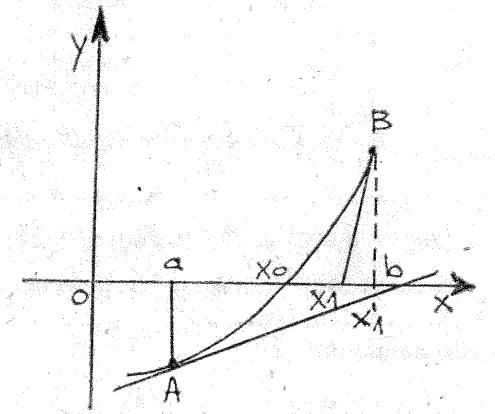


Fig. X. III.

Se alege x_1 sau x_1', care aproximează mai bine rădăcina x_0, adică pentru care diferența $|x_0 - x_1|$ sau $|x_0 - x_1'|$ este mai mică. Raționamentul continuă pînă cînd rădăcina este aproximată cu precizia cerută.

Exemplu: Calculați prin metoda tangentei rădăcina negativă a ecuației:

$f(x) = x^4 - 3x^2 + 75x - 10\,000 = 0$, cu cinci cifre.

Fie intervalul $(-100, -10)$.

$$f(-10) = -1\,050,\ f(-100) \approx +10^8$$

Reducînd intervalul, obținem: $f(-11) = 3\,453$ deci rădăcina $x_0 \in (-11, -10)$.

Cum pe acest ultim interval:

$f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$, putem considera ca aproximație inițială $x_0 = -11$. Calculăm aproximațiile succesive după schema:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	−11	3 453	−5 183	0,7
1	−10,3	134,3	−4 234	0,03
2	−10,27	37,8	−4 196	0,009
3	−10,261	0,2	—	—

Optînd pentru $n = 3$, vom verifica semnul valorii

$$f(x_n + 0{,}001) = f(-10{,}260) < 0.$$

Deci $x_0 \in (-10{,}261;\ -10{,}260)$, iar procedeul continuă.

IV. Metoda combinată

Fie $f(a) \cdot f(b) < 0$, atunci cînd $f'(x)$ și $f''(x)$ au același semn pe intervalul $[a, b]$. Combinînd metoda coardei cu metoda tangentei, obținem o metodă mai rapidă care permite determinarea prin lipsă sau prin adaus a rădăcinii x_0 a ecuației $f(x) = 0$. În timp ce metoda tangentei sau a coardei restrînge intervalul considerat doar la un capăt, metoda combinată restrînge intervalul la ambele capete.

Se vor deosebi cazurile din figura X.IV.

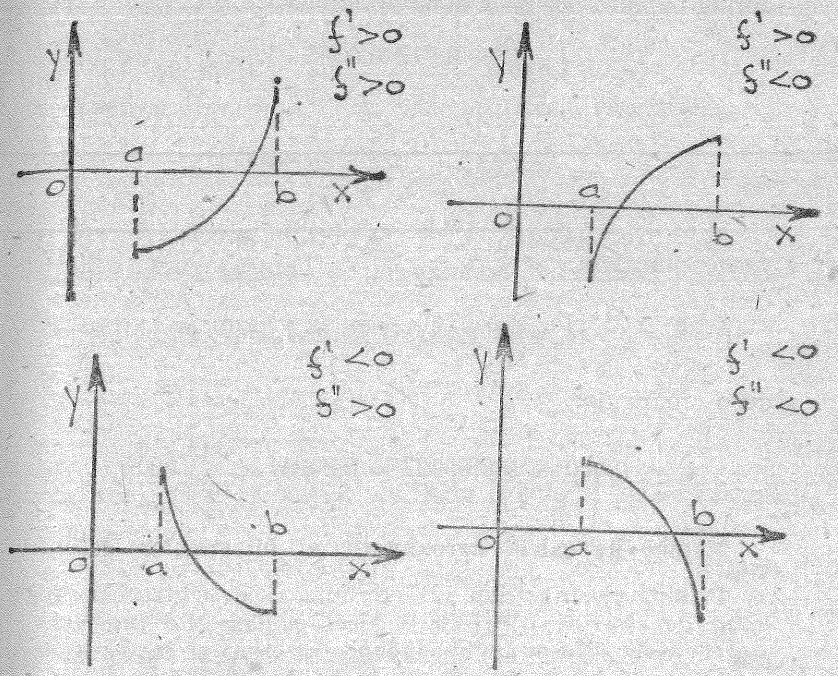


Fig. X. IV.

Exemplu: Calculați cu o aproximație de cel mult 0,0005 rădăcina pozitivă a ecuației:

$$f(x) = x^5 - x - 0{,}2 = 0$$

Pentru $x_0 \in (1,\ 1{,}1)$ avem: $f(1) < 0$ și $f(1{,}1) > 0$.

$$f'(x) = 5x^4 - 1 > 0$$

$$f''(x) = 20x^3 > 0$$

Pentru $x \in (1;\ 1{,}1)$, aplicăm metoda combinată:

$$x_1 = 1,\ \bar{x}_1 = 1{,}1.$$

$$f(x_1) = f(1) = -0{,}2;\ f(\bar{x}_1) = f(1{,}1) = 0{,}3105$$

$$f'(\bar{x}_1) = f'(1{,}1) = 6{,}3205$$

și

$$x_2 = 1 + \frac{0{,}1 \cdot 0{,}2}{0{,}5105} \approx 1{,}039;$$

$$\bar{x}_2 = 1{,}1 - \frac{0{,}31051}{6{,}3205} \approx 1{,}051;$$

deci $\bar{x}_2 - x_2 = 0{,}012$, iar precizia este insuficientă. Vom forma cuplul celei de a doua aproximări:

$$x_3 = 1{,}039 + \frac{0{,}012 \cdot 0{,}0282}{0{,}0595} \approx 1{,}04459;$$

$$\bar{x}_3 = 1{,}051 - \frac{0{,}0313}{5{,}1005} \approx 1{,}04487;$$

$\bar{x}_3 - x_3 = 0{,}00018$. Deci s-a obținut precizia cerută. Se poate considera:

$$x_0 = \frac{1}{2}(1{,}04459 + 1{,}04487) = 1{,}04478 \approx 1{,}045.$$

cu o eroare de:

$$\frac{1}{2} \cdot 0{,}00018 + 0{,}00022 = 0{,}00031 < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}.$$

Metode de calcul aproximativ al integralelor definite.

Primitivele funcțiilor se determină doar pentru clase extrem de restrînse de funcții, deci pentru alte funcții nu putem aplica formula lui Leibniz-Newton, și în acest caz vom calcula integrala prin procedee de calcul aproximativ.

Problemele de aproximare sînt indisolubil legate de evaluarea erorilor comise, deci nu are sens să spunem că am calculat cu aproximație valoarea integralei decît dacă precizăm gradul de aproximare al valorii integrale.

Deci procedeele de calcul al integralelor prin metode aproximative sînt legate de procedeele de evaluare a erorii.

În principiu, metodele de calcul aproximativ al integralei unei funcții f constau în a aproxima funcția f cu o funcție mai simplă g, căreia i se poate calcula mai ușor integrala și a lua integrala funcției g în locul integralei funcției f.

V. Metoda dreptunghiurilor constă în aproximarea funcției date cu o funcție în scară, adică în a aproxima graficul funcției cu o linie poligonală cu laturile paralele cu axele.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right];$$

dacă punctele $\zeta_i = x_i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i$ în cadrul sumei Riemann, sau

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right],$$ dacă punctele

$$\zeta_i = x_{i+1} = a + \frac{b-a}{n} \cdot (i+1).$$

Cele două formule de aproximare se numesc *formulele dreptunghiurilor*.

Evaluarea erorii rezultă din inegalitatea

$$\left|\int_a^b f(x)dx - D_n(f)\right| \leqslant \frac{M'(b-a)^2}{n},$$

unde $M' = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|$ și n este numărul de diviziuni al intervalului $[a, b]$, dacă f este derivabilă și dacă derivata sa este mărginită, iar $D_n(f)$ este suma din formula trapezelor.

Pentru o diviziune aleasă, eroarea este cu atît mai mică, cu cît panta tangentei la grafic este mai mică, dar, mai ales, cu cît intervalul de integrare $[x_i, x_{i+1}]$ este mai mic.

VI. Metoda trapezelor constă în aproximarea unei funcții date cu o funcție poligonală, liniară pe intervale și ale cărei vîrfuri se găsesc pe graficul funcției,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right].$$

Evaluarea erorii comise prin această metodă rezultă din inegalitatea:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - T_n(f)\right| \leqslant \frac{M''(b-a)^3}{12\,n^2},$$

unde $M'' = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f''(x)|$ și n este numărul de diviziuni a intervalului $[a, b]$, dacă f are derivata de ordinul doi integrabilă, iar $T_n(f)$ este suma din formula trapezelor.

VII. Formula lui Simpson. Metoda constă în aproximarea funcției date pe anumite intervale cu un polinom de gradul doi, adică aproximarea funcției pe anumite intervale cu o parabolă.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{(b-a)^3}{6n}\left[f(a)+f(b)+4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1})+2\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k})\right].$$

unde $x_i (i \in \{1, 2, \ldots, n\})$ sînt punctele unei diviziuni a intervalului $[a, b]$.

Evaluarea erorii prin această metodă este dată de inegalitatea:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S_n(f)\right| \leqslant \frac{M_4^{(IV)}(b-a)^5}{2\,880\,n^4},$$

unde $M^{(IV)} = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(IV)}(x)|$, $S_n(f)$ este suma din formula lui Simpson, iar f admite derivata de ordinul patru mărginită.

Observație: Formula lui Simpson necesită în general calcule mai puține decît formula trapezelor sau formula dreptunghiurilor.

PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

1. Să se determine numărul rădăcinilor reale și să se separe aceste rădăcini din ecuațiile următoare:

a) $x^3 + 2x^2 - 7x + 1 = 0$.

b) $x^2 - x - \ln x + m = 0$, pentru $x > 0$ și m real.

c) $2mx^3 + x^2 - 4m = 0$, pentru m real.

d) $x^6 + 2x^4 + x^2 - 3 = 0$.

e) $x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 2 = 0$.

f) $2 \ln x + mx^2 + 7 = 0$, pentru $x > 0$ și m real.

2. Fie ecuația $\ln x + x - 2 = 0$. Să se arate că în intervalul $(1, 2)$ ecuația are o singură rădăcină reală. Să se determine această rădăcină cu o aproximație de 0,02.

3. Să se determine cu aproximație de cinci zecimale exacte rădăcina reală a ecuației:

$$x^3 + 2x - 1 = 0.$$

4. Să se determine cu aproximație de trei zecimale exacte rădăcinile reale ale ecuației:

a) $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$.

b) $x^3 + 2x + 1 = 0$.

5. Calculați valoarea minimă a expresiei: $y = x^4 + x^2 + x + 1$ cu o aproximație de 0,001.

6. Calculați valoarea maximă a expresiei: $y = x + \ln x - x^3$, cu o aproximație de 0,001.

7. Calculați valorile de minim și maxim ale expresiei: $y = x^2 + 3 \cos x$, în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, cu o aproximație de 0,001.

8. Calculați valorile de maxim și minim ale funcției $y = x - e^{x^2}$, în intervalul $[0,2, 0,5]$, cu o aproximație de 0,001.

9. Calculați coordonatele punctului de inflexiune al curbei $y = \frac{e^x}{10}(x^3 - 6x^2 + 19x - 30)$, cu o aproximație de 0,01.

10 Calculați coordonatele punctului de inflexiune al curbei $y = 6x^2 \ln x + 2x^3 - 9x^2$ cu o aproximație de 0,01.

11. Să se calculeze cu o aproximație de două zecimale rădăcina reală a ecuației:

$$x^3 - 2x - 9 = 0$$

(Facultatea de matematică)

12. Într-un triunghi dreptunghic diferența dintre ipotenuză și o catetă este de 5 cm, iar aria triunghiului de 4 cm². Să se determine o catetă a triunghiului.

13. Să se ducă într-un semicerc o coardă paralelă cu diametrul care să împartă semicercul în două părți echivalente (adică de aceeași arie).

14. Să se ducă într-un cerc de rază 1 o coardă AB astfel încît lungimea arcului AB să fie dublul distanței de la centrul cercului la coardă.

15. Se consideră un triunghi dreptunghic OAB cu $m(\hat{A}) = 90°$. Se duce un arc de cerc cu centrul în O și cu raza OA, și se notează cu C punctul lui de intersecție cu OB. Să se determine unghiul O astfel încît aria sectorului OAC să fie jumătate din aria triunghiului OAB.

16. Să se intersecteze o sferă cu un plan astfel încît volumul părții din sferă, situată de o parte a planului să fie a n-a parte din volumul sferei ($n \in \mathbb{N}$).

17. Aplicînd metoda dreptunghiurilor să se calculeze valoarea aproximativă a integralei:

i) $I_1 = \int_0^2 x \sin x \, dx$ pentru $n = 12$.

ii) $I_2 = \int_0^1 x^3 \, dx$ pentru $n = 30$.

18. Aplicînd metoda trapezelor să se calculeze valoarea aproximativă a integralei:

i) $I_1 = \int_0^1 x^2 \, dx$ pentru $n = 5$.

ii) $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{4}\sin^2 x} \, dx$ pentru $n = 6$.

19. Aplicînd metoda lui Simpson să se calculeze valoarea aproximativă a integralei:

i) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \, dx$ pentru $n = 10$.

ii) $I_2 = \int_0^1 \frac{x}{\ln(1+x)} \, dx$ pentru $n = 10$.

iii) $I_3 = \int_0^1 \frac{1}{24} x^4 \, dx$ pentru $n = 5$.

20. i) Să se calculeze valoarea aproximativă a numărului π, folosind integrala:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

ii) Cum trebuie ales n pentru ca din calculul integralei I să se obțină numărul π cu două zecimale exacte (se va aplica formula trapezelor).

REZOLVĂRI ȘI RĂSPUNSURI

1. a) Fie $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 1$.

$f'(x) = 3x^2 + 4x - 7$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{7}{3}$, $x_2 = 1$.

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Șirul lui Rolle este:

x	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$		1		$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$		
f	$-\infty$	⌒	$\frac{419}{27}$	⌣	-3	⌒	$+\infty$

Deoarece apar trei schimbări de semn, înseamnă că ecuația are trei rădăcini reale:

$x_1 \in \left(-\infty, -\frac{7}{3}\right)$, $x_2 \in \left(-\frac{7}{3}, 1\right)$, $x_3 \in (1, \infty)$.

b) Fie $f(x) = x^2 - x - \ln x + m$, definită pe $(0, \infty)$.

$f'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x}$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$, $f(1) = m$.

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Șirul lui Rolle este:

m	Rădăcini reale
$m \in (-\infty, 0)$	$x_1 \in (0, 1)$ și $x_2 \in (1, \infty)$
$m = 0$	$x = 1$ rădăcină dublă
$m \in (0, \infty)$	nu are rădăcini reale

Observație: Se poate folosi și metoda grafică intersectînd graficul funcției $f(x) = \ln x + x - x^2 (x > 0)$ cu dreapta variabilă $y = m$.

c) Fie $f(x) = 2mx^3 + x^2 - 4m$.

$f'(x) = 6mx^2 + 2x$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ și $x_2 = -\frac{1}{3m}$, pentru $m \neq 0$.

Dacă $m = 0$, ecuația admite rădăcină dublă.

Dacă $m < 0$, șirul lui Rolle este:

x	$-\infty$	0	$-\frac{1}{3m}$	$+\infty$
f / f'	$+\infty$	$-4m$	$\frac{-108m^3+1}{27m^2}$	$-\infty$

Cum $f(m) > 0$, rezultă că ecuația admite o singură rădăcină reală, situată în intervalul $\left(-\frac{1}{3m}, \infty\right)$.

Dacă $m > 0$, șirul lui Rolle este:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3m}$	0	$+\infty$
f / f'	$-\infty$	$\frac{-108m^3+1}{27m^2}$	$-4m$	$+\infty$

iar pentru $\frac{-108m^3+1}{27m^2} = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{\sqrt[3]{108}}$.

m	Rădăcini reale
$m \in \left(-\infty, \frac{1}{\sqrt[3]{108}}\right)$	$x_1 \in \left(-\infty, -\frac{1}{3m}\right)$, $x_2 \in \left(-\frac{1}{3m}, 0\right)$, $x_3 \in (0, \infty)$
$m = \frac{1}{\sqrt[3]{108}}$	$x_1 = x_2 = -\frac{1}{3m}$, $x_3 \in (0, \infty)$
$m \in \left(\frac{1}{\sqrt[3]{108}}, \infty\right)$	$x_1 \in (0, \infty)$

d) $x_1 \in (-\infty, 0)$, $x_2 \in (0, \infty)$. e) $x_1 \in (0, \infty)$.

f) $f'(x) = \frac{2(1+mx^2)}{x}$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{-\frac{1}{m}}$;

$f\left(\sqrt{-\frac{1}{m}}\right) = \ln\left(\frac{e^6}{-m}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 7 + \lim\limits_{x\to+\infty}(2\ln x + mx^2) =$

$= 7 + \ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{-mx^2}}\right) = 7 + \ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{-2mx\,e^{-mx^2}}\right) =$

$= \begin{cases} -\infty \text{ pentiu } m<0 \\ +\infty \text{ pentru } m>0. \end{cases}$

m	Discuție
$m \in (-\infty, -e^6)$	Ecuație nu are rădăcini reale
$m = -e^6$	$x_1 = x_2 = \sqrt{-\frac{1}{m}} = \frac{1}{e^3}$
$m \in (-e^6, 0)$	$x_1 \in \left(0, \sqrt{-\frac{1}{m}}\right)$, $x_2 \in \left(\sqrt{-\frac{1}{m}}, \infty\right)$
$m \in [0, \infty)$	$x_1 \in (0, \infty)$

De fapt tabloul se mai poate obține și dacă intersectăm graficul funcției $y = -\frac{2\ln x + 7}{x^2}$ cu dreapta variabilă $y = m$.

2. Ecuația este echivalentă cu:

$$\ln x = 2 - x$$

deci soluția se află în intervalul $\left[\frac{3}{2}, \frac{13}{8}\right]$. Înjumătățind segmentul obținem: $x_1 = \frac{25}{16}$.

$$f(x_1) \approx 0{,}0072 > 0; f\left(\frac{3}{2}\right) < 0,$$

deci rădăcina se află în intervalul

$$\left[\frac{3}{2}, \frac{25}{16}\right], \text{ adică } [1{,}5,\ 1{,}56].$$

Putem considera $a = \frac{1{,}5 + 1{,}56}{2} = 1{,}53$

$$m = \inf_{1 \leqslant x \leqslant 2} |f(x)| > 1{,}63.$$

iar eroarea este mai mică decît $\frac{|f(1{,}53)|}{m}$; deci decît 0,02.

3. Fie $f(x) = x^3 + 2x - 1$, $x \in \mathbf{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 + 2 > 0;\ f''(x) = 6x.$$

f este strict crescătoare. Cum $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, ecuația admite o singură rădăcină reală. Fie a acea rădăcină.

Cum $f(0) = -1$, $f(1) = 2 \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0$, deci $a \in (0, 1)$. Folosind metoda înjumătățirii intervalului: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$. deci $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Pentru a determina primele cinci zecimale ale lui a vom aplica simultan metoda tangentei și a coardei. Fie A și B puncte de pe graficul funcției: $A(0, -1)$, $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$.

Coarda care trece prin A, B intersectează abscisa în $X_1\left(\frac{4}{9}, 0\right)$. Tangenta la graficul funcției f în punctul B

taie axa Ox în $X_1'\left(\frac{5}{11}, 0\right)$. Avem $f\left(\frac{4}{9}\right) = -\frac{17}{729} < 0, f\left(\frac{5}{11}\right) = \frac{4}{1331} > 0$, prin urmare $a \in \left(\frac{4}{9}, \frac{5}{11}\right) \approx (0{,}44\frac{4}{9},\ 0{,}45)$, iar prima cifră este 4. Pentru a determina și celelalte zecimale vom continua raționamentul. Fie A_1, B_1 punctele de pe graficul funcției f.

$$A_1\left(\frac{4}{9}, -\frac{17}{729}\right);\ B_1\left(\frac{5}{11}, \frac{4}{1331}\right).$$

Coarda care trece prin A_1 și B_1 intersectează abscisa în $X_2\left(\frac{11\,581}{25\,543}, 0\right)$, iar tangenta la graficul funcției în punctul B_1, intersectează abscisa în $X_2'\left(\frac{1\,581}{3\,487}, 0\right)$. Cum funcția este convexă pe intervalul $(0, \infty)$, rezultă că:

$$\frac{11\,581}{25\,543} < \alpha < \frac{1\,581}{3\,487},$$

adică aproximînd obținem:

$0{,}453392 < \alpha < 0{,}453398$. Deci rădăcina ecuației date, cu aproximație de cinci zecimale exacte este 0,45339. Evident, dacă primele cinci zecimale nu ar coincide, atunci raționamentul ar fi continuat, pînă se obține aproximația cerută.

4. a) $x_1 = 0{,}532$, $x_2 = 0{,}652$, $x_3 = 2{,}879$

b) $x_1 = -0{,}453$

Fie funcțiile $f(x) = \ln x$ și $g(x) = 2 - x$. Din reprezentarea grafică a celor două funcții (fig. X.2) se observă că soluția ecuației este $a \in (1, 2)$.

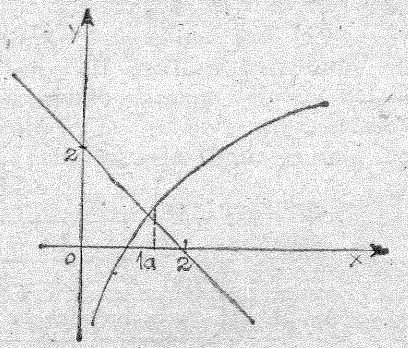


Fig. X.2

Fie $h(x) = \ln x + x - 2$

$h'(x) = \dfrac{1+x}{x} > 0$, deci funcția este strict crescătoare, și ecuația admite o singură soluție. Folosim metoda înjumătățirii intervalului. Deci, pentru intervalul $[1, 2]$ considerăm $x_1 = \dfrac{3}{2}$.

$$f(x_1) = -0{,}0945$$

$f(2) = \ln 2 > 0$. Cum funcția își schimbă semnul la capetele intervalului, înseamnă că soluția $a \in \left(\dfrac{3}{2}, 2\right)$. Din nou intervalul este înjumătățit, deci $x_2 = \dfrac{7}{4}$.

$$f(x_2) = 0{,}3096 > 0.$$

$f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -0{,}0945 < 0$, deci soluția $a \in \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{7}{4}\right)$.

Înjumătățind segmentul, obținem: $x_3 = \dfrac{13}{8}$.

$$f(x_3) = 0{,}1074 > 0;\ f\left(\frac{3}{2}\right) < 0.$$

5. Fie $f(x) = x^4 + x^2 + x + 1, \quad x \in \mathbf{R}$

$f'(x) = 4x^3 + 2x + 1.$

Pentru a determina numărul de rădăcini reale ale primei derivate vom aplica șirul lui Rolle:

fie $g(x) = f'(x) = 4x^3 + 2x + 1$

$g'(x) = 12x^2 + 2 > 0 \Rightarrow g(x)$ admite o singură rădăcină reală. Vom trasa graficul funcției g pentru a putea localiza rădăcina reală (punct în care graficul funcției intersectează abscisa).

$g''(x) = 24x.$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	

Vezi graficul din fig. X.5.

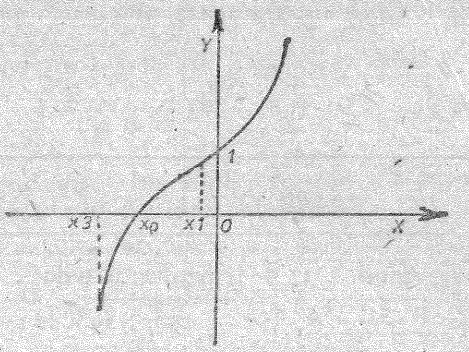


Fig. X. 5

Deci rădăcina $x_0 \in (-\infty, 0)$. Vom diminua intervalul aplicînd o consecință a proprietății lui Darboux și anume dacă o funcție își schimbă semnul la capetele unui interval atunci în acel interval ea admite o rădăcină reală, deci

$g(0) = 1,\ g(-1) = -5,\ x_0 \in (-1, 0)$. Vom aplica metoda înjumătățirii intervalului:

$x_1 = \dfrac{-1+0}{2} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow g(x_1') = -\dfrac{1}{2} < 0 \Rightarrow x_0 \in (x_1, 0) =$

$= \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$; fie $x_2 = \dfrac{-\frac{1}{2}+0}{2} = -\dfrac{1}{4} \Rightarrow g(x_2) =$

$= \dfrac{7}{16} > 0,\ x_0 \in \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$; fie $x_3 = \dfrac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{2} =$

$= -\dfrac{3}{16} \Rightarrow g(x_3) = \dfrac{2\,352}{4\,096} > 0 \Rightarrow x_0 \in \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{16}\right)$, iar pe intervalul obținut (care în mod evident poate fi în continuare divizat prin metoda înjumătățirii) vom aplica metoda combinată:

fie $A(x_1, g(x_1)) = A\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$ și

$B(x_3, g(x_3)) = B\left(-\dfrac{3}{16}, \dfrac{2\,352}{4\,096}\right) = B(-0{,}1875;\ 0{,}5742).$

Aplicăm metoda coardei:

dreapta (AB) intersectează abscisa în punctul x_1^c:

$$x_1^c : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{3}{16} & \frac{2\,352}{4\,096} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^c = -\frac{\frac{2\,352}{2\cdot 4\,096} - \frac{3}{32}}{\frac{1}{2} + \frac{2\,352}{4\,096}} = -\frac{0{,}2871 - 0{,}0938}{0{,}5 + 0{,}5742} = -0{,}1799.$$

Aplicăm metoda tangentei:

în punctul A, ecuația tangentei este: $y - y_1 = g'(x_1)(x - x_1)$, tangentă care intersectează abscisa în punctul $x_1^T = -0{,}6$, punct care nu convine deoarece nu aparține intervalului determinat prin metoda înjumătățirii.

În punctul B, ecuația tangentei este $y - g(x_3) = g'(x_3)(x - x_3)$, tangentă care intersectează abscisa în punctul

$$x_1^T = \frac{\frac{3}{16}}{12\cdot\frac{9}{256} + 2}\cdot\frac{3}{16} = \frac{0{,}1875}{2{,}4224} - 0{,}1875 = 0{,}0774 - 0{,}1875 =$$

$$= -0{,}1101 \Rightarrow x_0 \in (-0{,}1799,\ -0{,}1101) \subset (-0{,}5;\ -0{,}1875).$$

Aplicăm metoda coardei: ecuația dreptei care trece prin punctele

$A_1(x_1,\ g(x_1)) \equiv A_1(-0{,}5;\ -0{,}5)$

$B_1(x_1^c,\ g(x_1^c)) \equiv B_1(-0{,}1799,\ 0{,}6344) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (A_1B_1) : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 1 \\ -0{,}1799 & 0{,}6344 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2^c = -\frac{0{,}5 - 0{,}6\,344 - 0{,}5\cdot 0{,}1799}{-0{,}5 - 0{,}6\,344} =$$

$$= -\frac{0{,}31720 - 0{,}08995}{1{,}1344} = -\frac{0{,}32725}{1{,}1344} = -0{,}2884 \text{ punct}$$

care nu convine deoarece nu aparține intervalului $(-0{,}1799,\ -0{,}1101)$.

Aplicăm metoda coardei pentru:

$A_1(-0{,}5,\ -0{,}5)$ și $B_2(-0{,}1101;\ g(-0{,}1101)) \equiv$

$\equiv B_2(-0{,}1101,\ 0{,}7745)$ și continuînd raționamentul vom determina $f(x_0) = 0{,}785$.

6. 0,073. **7.** (3,00; 2,46). **8.** (−0,773, −0,841). **9.** (1,38, 4,99). **10.** (0,57; −3,62).

11. Aplicînd șirul lui Rolle, rezultă că ecuația are o singură rădăcină reală în intervalul (2, 3).

Aplicînd de două ori metoda înjumătățirii intervalului determinăm $x_0 \in \left(\frac{9}{4}, \frac{10}{4}\right)$ cu $A\left(\frac{9}{4}, -\frac{135}{64}\right)$, $B\left(\frac{10}{4}, \frac{104}{64}\right)$.

Aplicînd metoda coardei determinăm: $x_1^c = \frac{1143}{478} \approx 2{,}3912$.

Aplicînd metoda tangentei determinăm: $x_1^T = 2{,}4029$, pentru tangenta dusă din B și $x_{1A}^T = 2{,}4099$ pentru tangenta dusă din A. Deci $x_0 \in (2{,}3912,\ 2{,}4029) \Rightarrow x_0 = \frac{x_1^T + x_1^c}{2} =$

$= \frac{2{,}4029 + 2{,}3912}{2} = 2{,}39705 \Rightarrow x_0 \approx 2{,}39$. Procedeul continuă pînă cînd $|x_n^T - x_n^c| < 10^{-k}$, $k \in \mathbf{N}$.

12. Fie x, y catetele triunghiului și z ipotenuza, atunci:

$$\begin{cases} z - x = 5 \\ \frac{xy}{2} = 4 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 5 + x \\ y = \frac{8}{x} \\ x^2 + \left(\frac{8}{x}\right)^2 = (5 + x)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10x^3 + 25x^2 - 64 = 0.$$

Aplicăm șirul lui Rolle pentru a determina numărul de rădăcini reale:

$f(x) = 10x^3 + 25x^2 - 64$

$f'(x) = 30x^2 + 50x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -\frac{5}{3}$

$f(0) = -64,\ f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{1\,103}{27} \Rightarrow$

Tabloul de variație:

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		0		$+\infty$
f'	$-\infty$	$-$	0	$-$	0	$-$	$+\infty$
f							

deci ecuația admite o singură rădăcină reală $x_0 \in (0, \infty)$ Restricționăm intervalul prin încercări succesive:

$$f(0) < 0,\ f(2) = 116 > 0 \Rightarrow x_0 \in (0, 2),$$

dar folosind metoda înjumătățirii intervalului observăm că $f\left(\frac{3}{2}\right) = 26 > 0 \Rightarrow x_0 \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$. Aplicînd metoda combinată, vom determina prin metoda coardei $x_c = 1{,}2979$, iar prin metoda tangentei $x_T = 1{,}2981$, deci vom putea aproxima $x_0 = \frac{x_c + x_T}{2} \approx 1{,}298$.

13. Fie AB diametrul, CD — coarda paralelă, $\mu(\widehat{BD}) = x$. Aria porțiunii cuprinsă între AB și CD se descompune în două sectoare circulare egale, BOD și AOC, și triunghiul ODC (O fiind centrul cercului) $\Rightarrow \sigma[ABCD] = \sigma[OBD] + \sigma[DOC] + \sigma[AOC] = \frac{1}{2} R^2 \cdot x + \frac{R^2 \cdot \sin(\pi - 2x)}{2} + R^2 x =$ $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \pi R^2 \Rightarrow R^2 x + \frac{R^2}{2} \sin 2x = \frac{1}{4} \pi R^2 \Rightarrow x + \frac{\sin 2x}{2} =$ $= \frac{1}{4} \pi$. Fie $2x = u$, atunci ecuația este $u + \sin u = \frac{\pi}{2}$ deci $\sin u = \frac{\pi}{2} - u$. Soluțiile acestei ecuații transcendente se determină intersectînd graficele funcțiilor $f(u) = \sin u$ și $g(u) = \frac{\pi}{2} - u$, apoi aplicînd metodele de calcul numeric. Reamintesc: aria unui triunghi ABC cînd se cunoaște un unghi și laturile sale adiacente este egală cu $\sigma[ABC] = \frac{bc \sin A}{2}$

sau permutări circulare; aria unui sector circular de unghi la centru de n° este

$$\sigma = \pi R^2 \cdot \frac{n}{360} \text{ sau dacă unghiul este măsurat în radiani:}$$

$$\sigma = R^2 \cdot \frac{n}{2};$$

14. Fie $\mu(\widehat{AOB}) = 2x$, unde coarda a fost notată cu AB. Atunci ecuația care se obține este:

$2x = 2R \cos x$, cu $R = 1 \Rightarrow \cos x = x$. Soluțiile ecuației le vom determina: fie $f(x) = \cos x - x$, $f'(x) = -\sin x - 1$, iar din intersecția graficelor funcțiilor $y = \cos x$ și $y = x$ constatăm existența unei singure rădăcini reale $x_0 \in (0, 90^\circ)$; restricționînd intervalul observăm că $f(0) = 1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2} - \pi}{4} < 0$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{6} > 0$, deci $x_0 \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$, iar pentru comoditate vom lucra cu grade sexagesimale deci $x_0 \in (30^\circ, 45^\circ)$. Aplicînd metoda combinată vom determina pentru metoda coardei $x_c = 42^\circ 20' 43''$ iar pentru metoda tangentei $x_T = 42^\circ 20' 8'' \Rightarrow$ $\Rightarrow x_0 = \frac{x_c + x_T}{2} \approx 42^\circ 20' 25''$.

15. Fie $OA = R$, $\mu(\widehat{AOB}) = x$ (măsura în radiani), atunci $AB = R \operatorname{tg} x$ și $\sigma[AOB] = \frac{R^2 \operatorname{tg} x}{2}$. Aria sectorului circular este: $R^2 \cdot \frac{x}{2} \Rightarrow R^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2 \operatorname{tg} x}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} x - 2x = 0$. Fie funcția $f(x) = \operatorname{tg} x - 2x$ cu $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci prin intersecția graficelor $y = \operatorname{tg} x$ și $y = 2x$ se determină o rădăcină reală $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Restricționînd intervalul,

determinăm $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}-2\pi}{3}<0$ și $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=2+\sqrt{3}-$

$-2\cdot\frac{5\pi}{12}=\frac{6+6\sqrt{3}-5\pi}{6}>0\Rightarrow x_0\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{12}\right)$ sau transformînd în grade sexagesimale $x_0\in(60°, 75°)$.

Aplicînd metoda combinată vom obține:

$x_c=66°46'8''$ și $x_T=66°47'51''$, deci

$$x_0\approx\frac{x_c+x_T}{2}=66°46'36''.$$

16. Volumul segmentului de sferă este

$V=\frac{\pi h^2}{3}(3R-h)$ unde h este înălțimea segmentului iar R este raza sferei.

Fie x — distanța de la centrul sferei pînă la planul de secțiune, atunci vom obține:

$$V_2=nV_1\Rightarrow\frac{\pi(R-x)^2}{3}[3R-(R-x)]=n\cdot\frac{\pi(R+x)^2}{3}[3R-$$

$$-(R+x)]\Rightarrow(1+n)x^3-3R^2(1+n)x+2R^3(1+n)=0$$

$$\Rightarrow x^3-2R^2x+\left(1-\frac{2n}{n+1}\right)2R^3=0.$$

Fie funcția $f(x)=x^3-2R^2x+2aR^3$, $a\leqslant 0$, $a=\frac{1-n}{n+1}$.

Aplicăm șirul lui Rolle, pentru a determina numărul de rădăcini reale:

$$f'(x)=3x^2-2R^2,\ f'(x)=0,\ x=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}R.$$

$$f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}R\right)=\frac{2}{9}(9a-2\sqrt{6})R^3<0,$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}R\right)=\frac{2}{9}(9a+2\sqrt{6})R^3.$$

x / f	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{6}}{3}R$		$\frac{\sqrt{6}}{3}R$		$+\infty$	Discuție
f		−	0		0	+		
a		−	$-\frac{2\sqrt{6}}{9}$		$\frac{2\sqrt{6}}{9}$	+		
$a\in\left(\infty,-\frac{2\sqrt{6}}{9}\right)$		−		−		+	+	$x_1\in\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}R,\ \frac{\sqrt{6}}{3}R\right)$
$a=-\frac{2\sqrt{6}}{9}$		−		−	0	+	+	$x_1=x_2=\frac{\sqrt{6}}{3}R$
$a\in\left(-\frac{2\sqrt{6}}{9},0\right)$		−		−		−	+	$x_1\in\left(\frac{\sqrt{6}}{3}R,\infty\right)$
$a=0$		−		−		−	+	$x_1\in\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}R,\ \frac{\sqrt{6}}{3}R\right)$

Apoi se vor analiza cazurile:

i) $a\in\left(-\infty,-\frac{2\sqrt{6}}{9}\right)$; ii) $a=-\frac{2\sqrt{6}}{9}$,

iii) $a\in\left(-\frac{2\sqrt{6}}{9},0\right)$; iv) $a=0$, iar în fiecare situație se va aplica metoda combinată pentru a se aproxima distanța x.

17. i) $I=\int_0^{2\pi}x\sin x\,dx$ — vom aplica metoda integrării prin părți:

$$\begin{cases}x=f\\ \sin x=g'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1=f'\\ -\cos x=g\end{cases}\Rightarrow$$

$$I=-x\cos x+\int_0^{2\pi}\cos x\,dx=-x\cos x+\sin x\Big|_0^{2\pi}=-2\pi.$$

Aplicăm metoda dreptunghiurilor:

fie $f(x) = x \sin x$, $f'(x) = \sin x + x \cos x$,

$f''(x) = 2\cos x - x \sin x$. Cum $f''(x) = 0 \Rightarrow \operatorname{ctg} x = -\frac{x}{2}$

(ecuație transcendentă) ecuație care admite două rădăcini x_1, x_2 pentru $x \in [0, 2\pi]$, rădăcini care se vor determina prin metode de calcul aproximativ, folosind în mod necesar și graficele funcțiilor.

(Vezi graficul prezentat în fig. X.17 i)

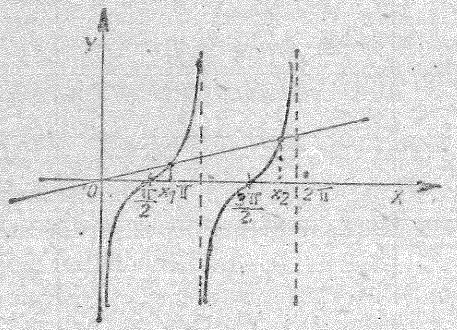


Fig. X.17 i).

Rezultă că $f'(x)$ va admite două extreme în punctele x_1 și x_2, iar $M' = \sup_{x\in[0,\,2\pi]} |f'(x)| = \sup_{x\in[0,\,2\pi]} |\sin x + x\cos x| = 2\pi$. Deci, luînd în formula dreptunghiurilor $n = 12$, eroarea maximă este: $\frac{M'(b-a)^2}{n} = \frac{2\pi\cdot(2\pi)^2}{12} = \frac{2}{3}\pi^3$.

$$\int_0^{2\pi} x \sin x \, dx \approx \frac{2\pi}{12}\left[f(0) + \sum_{k=1}^{11} f\left(0 + k\frac{2}{12}\right)\right] =$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[\sum_{k=1}^{11} \frac{\pi}{6} k \sin\left(\frac{\pi}{6}k\right)\right] = \frac{\pi^2}{36}\left(\sin\frac{\pi}{6} + 2\sin\frac{\pi}{3} + 3\sin\frac{\pi}{2} + \right.$$

$$+ 4\sin\frac{2\pi}{3} + 5\sin\frac{5\pi}{6} + 6\sin\pi + 7\sin\frac{7\pi}{6} + 8\sin\frac{4\pi}{3} +$$

$$\left. + 9\sin\frac{3\pi}{2} + 10\sin\frac{5\pi}{3} + 11\sin\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{6+\sqrt{3}}{18}\pi^2.$$

ii) $I_2 = \int_0^1 x^3 \, dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$

Aplicăm metoda dreptunghiurilor:

fie $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$.

Pentru $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$ care este un punct de minim. $M' = \sup_{x\in[0,\,1]} |f'(x)| = \sup_{x\in[0,\,1]} |3x^2| = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{M'(b-a)^2}{30} = \frac{1}{10}$, deci eroarea maximă este de $\frac{1}{10}$.

$$\int_0^1 x^3 \, dx \approx \frac{1}{30}\left[f(0) + \sum_{k=1}^{29} f\left(\frac{1}{30}k\right)\right] = \frac{1}{30}\sum_{k=1}^{29}\left(\frac{1}{30}k\right)^3 =$$

$$= \frac{1}{30^4}\sum_{k=1}^{29} k^3 = \frac{1}{30^4}\left[\frac{29\cdot 30}{2}\right]^2 = \frac{841}{36\cdot 10^2} \approx \frac{23{,}36}{100}, \text{ iar}$$

$$\left|\frac{1}{4} - \frac{23{,}36}{100}\right| < \frac{1}{10} \quad \text{adică} \quad \frac{1{,}64}{100} < \frac{1}{10}.$$

18. i) $f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$,

deci $M'' = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} f''(x) = 2$,

iar $b - a = 1$

Pentru a calcula integrala cu o eroare mai mică decît $\varepsilon = 10^{-2}$, luăm:

$$n \geqslant \sqrt{\frac{M''(b-a)^3}{12\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2\cdot 100}{12}} > 4.$$

Fie diviziunea:

$x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = \frac{2}{5}$, $x_3 = \frac{3}{5}$, $x_4 = \frac{4}{5}$, $x_5 = 1$,

iar $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = \frac{1}{25}$, $f(x_2) = \frac{4}{25}$, $f(x_3) = \frac{9}{25}$,

$f(x_4) = \frac{16}{25}$, $f(x_5) = 1$.

$$S_5 = \frac{b-a}{2\cdot 5}\{f(x_0) + f(x_5) + 2[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) +$$

$$+ f(x_4)]\} = \frac{85}{250} = 0{,}34.$$

Valoarea exactă a integralei este:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} = 0{,}333$$

și deci

$$\left|\int_0^1 x^2 dx - S_5\right| \approx 0{,}0066 < 0{,}01 = 10^{-2}.$$

ii) Fie $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4 - \sin^2 x}$

$$f'(x) = -\frac{\sin 2x}{4\sqrt{4 - \sin^2 x}},\quad f''(x) = \frac{\cos^4 x + 6\cos^2 x - 3}{8(4 - \sin^2 x)^{3/2}}$$

și $M'' = \sup_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} f''(x) = \frac{1}{16}$, iar $b - a = \frac{\pi}{2}$.

Fie diviziunea: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{12}$, $x_2 = \frac{2\pi}{12}$.

$$x_3 = \frac{3\pi}{12},\quad x_4 = \frac{4\pi}{12},\quad x_5 = \frac{5\pi}{12},\quad x_6 = \frac{6\pi}{12} = \frac{\pi}{2}.$$

$$f(0) = 1,\ f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{4 - \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}},\ f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{14}}{4},\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{13}}{4},\ f\left(\frac{5\pi}{12}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4 - \left[\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}\right]^2},\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

unde în calcule s-a aplicat formula radicalilor suprapuși:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - C}{2}},\quad C^2 = A^2 - B > 0.$$

Suma din formula trapezelor este:

$$S_6 = \frac{\frac{\pi}{2}}{2 \cdot 6}\left\{f(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\left[f\left(\frac{\pi}{12}\right) + f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right]\right\} = \frac{\pi}{48}\left(2 + \sqrt{3} + \sqrt{16 - \sqrt{6} - \sqrt{2}} + \sqrt{15} + \sqrt{14} + \sqrt{13} + \sqrt{14 - \sqrt{3}}\right) \approx 1{,}4675.$$

19. i) 1,37039, ii) 0,2288.

iii) $f(x) = \frac{1}{24}x^4$

$$f'(x) = \frac{1}{6}x^3,\ f''(x) = \frac{1}{2}x^2,\ f'''(x) = x,\ f^{IV}(x) = 1.$$

$$b - a = 1 \text{ și } M^{(IV)} = 1.$$

Pentru o aproximație de 1/100, adică $\varepsilon = 10^{-2}$, avem:

$$n \geqslant \sqrt[4]{\frac{M^{(IV)} \cdot (b-a)^5}{2\,880 \cdot \varepsilon}} = \sqrt[4]{\frac{1 \cdot 100}{2\,880}} \approx \frac{1}{2}.$$

Cum $n = 5$, avem:

$$x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{5} \Rightarrow f(x_1) = \frac{1}{24 \cdot 625}$$

$$x_2 = \frac{2}{5} \Rightarrow f(x_2) = \frac{16}{24 \cdot 625}$$

$$x_3 = \frac{3}{5} \Rightarrow f(x_3) = \frac{81}{24 \cdot 625}$$

$$x_4 = \frac{4}{5} \Rightarrow f(x_4) = \frac{16 \cdot 16}{24 \cdot 625}$$

$$x_5 = 1 \Rightarrow f(x_5) = \frac{1}{24}$$

$$S_{10} = \frac{1}{6 \cdot 5}\left[0 + \frac{1}{24} + 4\left(\frac{1}{24 \cdot 625} + \frac{81}{24 \cdot 625}\right) + 2 \cdot \left(\frac{16}{24 \cdot 625} + \frac{16 \cdot 16}{24 \cdot 625}\right)\right] \approx 0{,}033333 \cdot 0{,}102184 = 0{,}003406.$$

După aceea calculăm:

$$\frac{1}{24}\int_0^1 x^5\,dx = \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{144} = 0{,}006944.$$

$$\left|\int_0^1 \frac{1}{24}x^5\,dx - S_{10}\right| \leqslant |\,0{,}006944 - 0{,}003406\,| = 0{,}003538 < 0{,}01.$$

20. i). Fie $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$,

$f''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$, $f'''(x) = \frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$ deci $f''(x)$ este o funcție monoton crescătoare pe $[0, 1]$, deci $f''(0) \leqslant f''(x) \leqslant f''(1) \Rightarrow -2 \leqslant f''(x) \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow |f''(x)| \leqslant 2$ pe $[0, 1] \Rightarrow$ $\Rightarrow M'' = \sup_{x\in[0,1]} |f''(x)| = 2$.

Aplicăm formula trapezelor:

Fie $n = 2 \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}\left[f(0) + f(1) + 2f\left(\frac{1}{2}\right)\right] + R_2 = \frac{31}{40} + R_2 \Rightarrow$ restul $|R_2| \leqslant \frac{1}{24} = 0{,}04166$, deci $\frac{\pi}{4} = 0{,}775 + R_2$, ceea ce înseamnă că valoarea obținută pentru $\frac{\pi}{4}$ are o singură zecimală exactă. Fie $n = 4 \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{1}{8}\left\{f(0) + f(1) + 2\left[f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{2}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)\right]\right\} + R_4 \approx 0{,}782792 + R_4 \Rightarrow$ $\Rightarrow |R_4| < \frac{1}{96} = 0{,}0105$. Comparînd cu valoarea precisă a lui $\frac{\pi}{4}$, obținută prin alte metode, se constată că eroarea este mai mică decît 0,0026.

Fie $n = 10$, eroarea maximă este:

$$\frac{M''(b-a)^3}{12n^2} = \frac{2}{1\,200} = 0{,}00166.$$

Fie șirul de diviziuni:

$x_0 = 0$	$f(x_0) = 1$
$x_1 = 0{,}1$	$f(x_1) = 0{,}990099$
$x_2 = 0{,}2$	$f(x_2) = 0{,}961538$
$x_3 = 0{,}3$	$f(x_3) = 0{,}917431$
$x_4 = 0{,}4$	$f(x_4) = 0{,}862068$

$x_5 = 0{,}5$	$f(x_5) = 0{,}8$
$x_6 = 0{,}6$	$f(x_6) = 0{,}735294$
$x_7 = 0{,}7$	$f(x_7) = 0{,}671140$
$x_8 = 0{,}8$	$f(x_8) = 0{,}609756$
$x_9 = 0{,}9$	$f(x_9) = 0{,}552486$
$x_{10} = 1$	$f(x_{10}) = 0{,}5$.

Aplicăm formula trapezelor:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2\cdot 10}\left\{f(0) + f(1) + 2\sum_{k=1}^{9} f(x_k)\right\} + R_{10} =$$

$= 0{,}7849812 + R_{10}$. Dacă ținem cont și de eroare, determinăm: $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}7853978$ sau $\pi \approx 3{,}1415912$.

ii) Fie $I_{\text{aproximativ}} = Y \Rightarrow \pi = 4Y + 4R_n$ atunci trebuie să avem cel puțin:

$$4|R_n| < \frac{1}{10^3} \text{ și cum } |R_n| \leqslant \frac{M''(b-a)^3}{12n^2}$$

atunci vom alege șirul de diviziuni n astfel ca:

$$\frac{2}{8n^2} < \frac{1}{10^3} \Rightarrow n > 10\sqrt{\frac{20}{3}} = \frac{20\sqrt{15}}{8} \approx \frac{20\cdot 3{,}87}{8} = 25{,}8,$$

dar $n \in \mathbf{N}$.

Deci fie $n = 27$, dar va trebui să se calculeze fiecare termen din Y cu o eroare mai mică decît $\frac{1}{10^4}$.

Evident, există formule de cuadratură mai avantajoase, care converg mai rapid spre aproximarea cerută, cum ar fi de exemplu *formula lui Simpson*:

fie $2n = 10$, atunci $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} = \frac{1}{30}\{1 + 0{,}5 + 4[f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7) + f(x_9)] + 2[f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8)]\} + R_n(x) = 0{,}785398 + R_n(x)$ (unde valorile au fost calculate în primul punct al problemei), deci $\pi \approx 3{,}141592$.

Evaluarea erorii maxime:

$$f^{(IV)}(x) = \frac{24(5x^4 - 10x^2 + 1)}{(1 + x^2)^5},$$

$$f^{(V)}(x) = \frac{240(-3x^5 + 10x^3 - 3x)}{(1 + x^2)^6}.$$

$f^{(V)}(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3},\ x_3 = \frac{\sqrt{3}}{3},\ x_4 = -\sqrt{3},\ x_5 = \sqrt{3}$. Cum $f^{(V)}(x) = 0$ pentru $x = 0$, $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ în intervalul $[0, 1]$, rezultă că $f^{(IV)}(x)$ are valoarea maximă în $[0, 1]$ pentru $x = 0$, deci $M^{(IV)} = \sup_{x \in [0, 1]} |f^{(IV)}(x)| = 24$ și $|R_n(x)| \leqslant \frac{M^{(IV)}(b-a)^5}{2\,880\ n^4} = \frac{24}{2\,880 \cdot 10^4} = 0{,}0000008$, iar dacă se cerea să se calculeze valoarea numărului $\frac{\pi}{4}$ cu cel puțin șase zecimale exacte, $|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{10^7}$, avem $n^4 \geqslant \frac{M^{(IV)} \cdot 10^7}{2\,880} \geqslant 83\,330 \Rightarrow n \geqslant 10$.

CAPITOLUL XI

ECUAȚII DIFERENȚIALE

PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

1. Să se integreze ecuația diferențială:

$$x^2(x + 1)\,dy = y^2(y - 1)\,dx,$$

și apoi să se determine soluția particulară care trece prin punctul $(2, 2)$.

2. Să se afle soluția generală a ecuației diferențiale:

$$y^2 + y'^2 = a^2.$$

3. Să se integreze ecuația diferențială:

$$y'' + 4y' = 0,$$

apoi să se determine soluția particulară care îndeplinește condițiile inițiale: $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

4. Să se determine soluția generală a ecuației:

$$y'' + 4y = 4.$$

5. Să se integreze ecuația diferențială:

$$y'^3 - 3y'^2 - y^2y' + xy^2 = 0.$$

6. Să se determine integrala generală a ecuației

$$(x^2 - a^2)y' = (2nx + b)y;\ n \in \mathbf{N},\ a,\ b \in \mathbf{R}.$$

Să se determine cazul particular în care ecuația admite o integrală polinomială.

7. Să se determine integrala ecuației:

$$1 + x^2y' \cos y = 0,$$

care îndeplinește condiția: $\lim_{x \to \infty} y(x) = \frac{16\pi}{3}$.

8. Fie ecuația diferențială:

$$2e^{-2x} yy' = \frac{2x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

Se cere:

a) Să se integreze ecuația.

b) Să se determine soluția particulară care satisface condiția inițială: $y(0) = 1$.

c) Să se traseze graficul funcției determinate la punctul precedent.

9. Fie ecuația diferențială:

$$27y' + \left[6x + 7 - \frac{28}{(3x + 2)^2}\right] \cdot y^4 = 0.$$

Se cere:

a) Să se integreze ecuația.

b) Să se determine soluția care îndeplinește condiția:

$$y(0) = 1.$$

c) Să se traseze graficul funcției determinate la punctul precedent.

d) Să se calculeze: $\int_0^1 y^3(x)\, dx$.

10. Fie ecuația diferențială:

$$3e^{-3x} y^2 y' = 3x^2 - 7x - 15.$$

Se cere:

a) Să se integreze ecuația.

b) Să se determine soluția particulară care satisface condiția inițială: $y(4) = 0$.

c) Să se traseze graficul funcției obținute la punctul precedent.

11. Fie ecuația diferențială:

$$(3x^2 - a^2)y + (3x^2 + a^2)xy' - 2x^3 = 0.$$

a) Să se integreze această ecuație, luînd drept funcție nouă, necunoscuta: $z(x) = y(x) - \frac{x}{3}$.

b) Să se determine integrala ecuației care verifică relația: $y(a) = a$.

c) Să se arate că ecuația acestei soluții se mai poate scrie:

$$\frac{y - a}{y + a} = \frac{(x - a)^3}{(x + a)^3}.$$

12. Să se integreze ecuația liniară și neomogenă:

$$y' = P(x) \cdot y + Q(x),$$

unde P și Q sînt funcții continue.

13. Să se integreze ecuația:

$y' + 2xy = 2x e^{-x}$ și să se determine soluția particulară care verifică condiția $y(0) = 1$.

14. Să se integreze ecuația:

$$y' + y \cos x = \sin x \cos x$$

și să se determine soluția particulară care verifică $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

15. Să se integreze ecuația:

$$y'' + y' + y = 0.$$

16. Fie ecuația $y'' + 2y' + my = 0$

Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel ca:

a) Toate soluțiile să aibă proprietatea $\lim_{x \to \infty} y(x) = 0$.

b) Toate soluțiile să fie mărginite pe $\mathbf{R}$.

c) Să existe o soluție diferită de zero, care să verifice:

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = 0.$$

17. Fie ecuația diferențială:

$$y'' + 2my' + (m + 2)y = 0.$$

Să se determine parametrul m real pentru care:

a) Toate soluțiile au proprietatea $\lim_{x \to \infty} y(x) = 0$.

b) Există o soluție diferită de zero cu $\lim_{x \to \infty} y(x) = 0$.

c) Toate soluțiile au proprietatea $\lim_{x \to -\infty} y(x) = 0$.

d) Există o soluție diferită de zero cu $\lim_{x \to -\infty} y(x) = 0$.

e) Toate soluțiile sînt mărginite pe axa reală.

f) Există o soluție diferită de zero, mărginită pe axa reală.

18. Să se rezolve următoarele ecuații diferențiale:

i) $y' + y = \frac{1}{1 + e^x}$.

ii) $y^{(n)} = 0$.

iii) $y^{(n)} = e^x$.

iv) $y'' = \ln x$.

v) $y^{IV} + 2y^{III} + 5y'' + 4y' + 4y = 0$.

vi) $2y'' + 3y' - 5y = 0$.

vii) $y^{IV} + y = 0$.

viii) $y^{III} - 6y'' + 5y' = e^{3x}$.

ix) $y'' - 9y = e^{10x}$.

x) $y'' - 5y' + 6y = x^2$.

xi) $xy'' + 2y' = 0$.

xii) $y' = \frac{6x - y}{4x - y}$.

xiii) $\frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{y''} = a$, pentru $y'' \neq 0$.

19. Să se rezolve următoarele ecuații diferențiale omogene:

i) $y^2 + x^2 \cdot y' = xyy'$.

ii) $(x + y)dx + xdy = 0$.

iii) $xy^2\,dy = (x^3 + y^3)dx$.

iv) $y' - \frac{2y}{x + 1} = (x + 1)^{\frac{5}{2}}$.

v) $xy' - 2y = x^3e^x$.

vi) $y' + \frac{4xy}{x^2 + 1} = \frac{1}{(x^2 + 1)^3}$.

vii) $(1 + x^2)y' - xy = 1$.

viii) $y' + 2xy = 2xe^{-x}$.

ix) $y' + y\ \mathrm{tg}\ x = \sin 2x$.

x) $xy' - my = x^{m+1} \cdot e^x$.

20. Să se determine funcțiile continue pentru care:

$$\int f^m(x)dx = f^n(x),\ m,\ n \in \mathbf{R}.$$

(Institutul Politehnic)

21. Să se determine funcția pozitivă și continuă pentru care avem:

$$\int f(x)\,dx = \frac{f(x)}{x}.$$

(Institutul Politehnic)

22. Se consideră ecuația diferențială:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \sqrt{2}\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

a) Să se determine soluția generală: $y(x)$.

b) Să se determine soluția particulară $y_1(x)$ cu condițiile

$$y_1(0) = 1,\ y_1'(0) = \sqrt{2}.$$

c) Să se calculeze aria porțiunii de plan cuprinsă între graficul funcției $y_1(x)$ și dreptele $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

d) Să se arate că $y_1(x)$ este soluție și a ecuației $\frac{d^8y}{dx^8} - y = 0$ și să se deducă expresia derivatei de ordinul n a funcției $y_1(x)$.

23. Fie ecuația diferențială:

$$(x + 1)x^2y' - x(x + 2)y = -3(x + 1)^2.$$

a) Să se integreze ecuația.

b) Să se arate că una dintre aceste curbe integrale este o curbă algebrică de gradul al doilea. Să se construiască curbele.

c) Să se arate că soluțiile ecuației admit trei asimptote: două fixe și o a treia care trece printr-un punct fix.

d) Să se determine și să se construiască curba integrală care are o asimptotă orizontală.

e) Să se afle locul geometric al punctelor de extrem ale curbelor integrale ale ecuației diferențiale.

24. Fie $y(x)$ și $z(x)$ două funcții necunoscute, iar $y'(x)$, $z'(x)$ derivatelor lor. Știm că verifică ecuațiile diferențiale:

$$y' + 4z = 2e^{2x}$$
$$z' - y = e^{2x}.$$

a) Să se determine o ecuație diferențială pentru y, de ordinul doi.

b) Să se determine integrala generală a acestei ecuații și apoi să se afle $z(x)$ din prima ecuație dată.

25. Se dă ecuația diferențială:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2r\frac{dy}{dx} + r^2y = 0, \quad r \in \mathbf{R}.$$

Se cere:

a) Soluția generală a ecuației.

b) Ecuația curbei integrale $C(r)$ pentru care în punctul $x = 0$ avem $y = 1$ și $y' = 2r$.

c) Să se reprezinte curba integrală $C(r)$ în raport cu axele carteziene.

d) Dacă $r \in (0,\infty)$, să se determine locul geometric al punctelor de inflexiune ale curbelor $C(r)$.

e) Fie A, B, punctele în care o curbă $C(r)$ intersectează axele. Să se arate că pentru orice curbă $C(r)$, raportul dintre aria triunghiului OAB și aria porțiunii din plan mărginite de curbă și de segmentele OA și OB este constant. (O fiind originea axelor carteziene.)

26. Fie α și β două numere reale și ecuația diferențială:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\alpha\frac{dy}{dx} + (\alpha^2 + \beta)y = 0.$$

a) Să se scrie integrala generală în cazurile

$$\beta < 0, \quad \beta = 0, \quad \beta > 0.$$

b) Fie G o curbă integrală a ecuației date. Care este condiția ca G să intersecteze axa Ox, de o infinitate de ori și care este valoarea lui β, pentru ca distanța între două puncte consecutive de intersecție să fie egală cu π.

c) În cazul $\beta = 1$, se cere să se calculeze aria $A(r)$ cuprinsă între curba G, axa Ox, axa Oy și paralela la Oy de abscisă $x = r$.

d) Care este condiția ca aria $A(r)$ să tindă către o limită, când r tinde către $+\infty$ și care este această limită?

27. a) Să se arate că funcția $y = \operatorname{arctg}(ax + b)$, unde a, b sînt constante reale, este soluție a ecuației diferențiale:

$$y^{IV}y' - 2y'''y'' + 3y''(y')^3 = 0.$$

b) Dacă a_0, a_1, ..., a_n sînt într-o progresie aritmetică crescătoare, cu termeni pozitivi și $n = 2p - 1$, să se arate că funcțiile:

$$y_i(x) = \operatorname{arctg}(x - a_i) - \operatorname{arctg}(x - a_{n-i})$$

au extreme coliniare. Dacă M_i este maximul funcției $y_i(x)$, să se calculeze:

$$S = \sum_{i=0}^{p-1} \operatorname{tg}\frac{M_i}{2}, \text{ în funcție de } p, a_0, a_1.$$

c) Dacă șirul de numere reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este strict crescător, să se arate că funcția:

$y = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{arctg}(x - a_i)$ își schimbă concavitatea de un număr impar de ori pentru $x \in (a_1, a_n)$.

REZOLVĂRI ȘI RĂSPUNSURI

1. Folosim *metoda separării variabilelor:*

$$\frac{dy}{y^2(y-1)} = \frac{dx}{x^2(x+1)} \Rightarrow \int \frac{dx}{x^2(x+1)} = \int \frac{dy}{y^2(y-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)dx = \int\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\right)dy$$

iar integrala generală este:

$$\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x} = \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| + \frac{1}{y} + C;$$

pentru $x \neq 0$, $x \neq -1$, $y \neq 0$, $y \neq 1$.

Constanta C o vom determina pentru $x = 2$ și $y = 2$:

$$\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -\ln 2 + \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = \ln 3 - 1.$$

Soluția particulară căutată este soluția problemei lui Cauchy:

$$\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x} = \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| + \frac{1}{y} + \ln 3 - 1,$$

unde $y(y-1) \neq 0$, $x(x+1) \neq 0$.

2. Avem $y' = \pm\sqrt{a^2 - y^2}$; $y \in [-a, a]$
și am obținut două ecuații diferențiale pentru care se aplică *metoda separării variabilelor*.

a) $y' = \sqrt{a^2 - y^2} \Rightarrow \dfrac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = dx \Rightarrow \arcsin\dfrac{y}{a} + C =$

$$= x \Rightarrow y_1 = a \sin(x - C)$$

b) $y' = -\sqrt{a^2 - y^2} \Rightarrow \dfrac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = -dx \Rightarrow$

$$y_2 = a \sin(-x - C).$$

Deci soluția generală a ecuației este

$$y = a \sin(C \pm x), \quad C \in \mathbf{R}$$

Verificare:

$$y' = \pm a \cos(C \pm x)$$

$$y^2 + y'^2 = a^2[\sin^2(C \pm x) + \cos^2(C \pm x)] = a^2.$$

3. Dacă integrăm o dată, obținem:

$$y''\,dx + 4y'\,dx = 0 \Rightarrow y' + 4y = C.$$

Ecuația obținută se va rezolva aplicînd metoda separării variabilelor:

$$\frac{dy}{dx} = C - 4y \Rightarrow \frac{dy}{C - 4y} = dx \Rightarrow -\frac{1}{4}\ln|4y - C| =$$

$$= x + C_1 \Rightarrow 4y - C = e^{-4C_1} \cdot e^{-4x} \Rightarrow 4y = C + Ke^{-4x}$$

unde $K = e^{-4C_1}$.

Dar $4y' = -4Ke^{-4x}$, și dacă impunem condițiile din enunț, obținem:

$$\begin{cases} 4 = C + K \\ 4 = -4K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 5 \\ K = -1 \end{cases}$$

Deci soluția particulară este:

$$y = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}e^{-4x}, \; x \in \mathbf{R}.$$

Altă metodă de rezolvare:

$$\frac{y''}{y'} = -4 \Rightarrow \frac{d(y')}{y'} = -4 \Rightarrow \int\frac{d(y')}{y'} = -4\int dx \Rightarrow \ln y' =$$

$$= -4x + C \Rightarrow y' = C_1 e^{-4x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = C_1 e^{-4x} \Rightarrow$$

$$dy = C_1 e^{-4x}\,dx \Rightarrow y = -\frac{C_1}{4}e^{-4x} + C_2.$$

4. Înmulțind ecuația cu y', obținem:

$$y''y' + 4yy' = 4y' \text{ sau } \frac{1}{2}(y'^2)' + 2(y^2)' = 4y'.$$

Integrînd ecuația, obținem:

$$\frac{1}{2}y'^2 + 2y^2 = 4y + C \text{ sau}$$

$$y'^2 + 4(y-1)^2 = C_1 + 4 \Rightarrow y' = \pm\sqrt{C_1 + 4 - 4(y-1)^2}.$$

a) Fie ecuația:

$$y' = \sqrt{C_1 + 4 - 4(y-1)^2}.$$

Aplicăm metoda separării variabilelor:

$$\frac{dy}{2\sqrt{\frac{C_1+4}{4}-(y-1)^2}}=dx \Rightarrow \frac{1}{2}\arcsin\frac{2(y-1)}{\sqrt{C_1+4}}=$$

$$=x+C_2 \Rightarrow y-1=\frac{\sqrt{C_1+4}}{2}\sin(2x+2C_2).$$

b) Ecuația:

$$y'=-\sqrt{C_1+4-4(y-1)^2}$$

se rezolvă în mod analog cazului a), deci

$$y-1=-\frac{\sqrt{C_1+4}}{2}\sin(2x+2C_3).$$

Deci soluția generală este:

$$y-1=K\sin(2x+C_4),$$

unde K, C_4 sînt constante reale arbitrare.

5. Considerăm în y' o ecuație algebrică, deci soluțiile sînt:

$$y'=y,\ y'=-y,\ y'=x,$$

deci descompunerea ecuației este:

$$(y'-x)(y'-y)(y'+y)=0.$$

a) $y'-x=0$. Aplicînd metoda separării variabilelor obținem:

$$y=\frac{1}{2}x^2+C_1;\quad x\in\mathbf{R}.$$

b) $y'=y$. Aplicînd metoda separării variabilelor obținem:

$$y=C_2e^x;\quad x\in\mathbf{R}.$$

c) $y'=-y$. Aplicînd metoda separării variabilelor obținem:

$$y=C_3e^{-x};\quad x\in\mathbf{R}.$$

Deci orice familie de funcții generate de a), b), c), este o soluție a ecuației diferențiale date.

6. Dacă $x^2-a^2\neq 0$, $y\neq 0$, atunci

$$\frac{dy}{y}=\frac{n+\frac{b}{2a}}{x-a}dx+\frac{n-\frac{b}{2a}}{x+a}dx.$$

Prin integrare obținem:

$$y=C\,|x-a|^{n+\frac{b}{2a}}\,|x+a|^{n-\frac{b}{2a}}.$$

Dacă $\left|\frac{b}{2a}\right|$ este întreg inferior lui n, atunci ecuația admite drept soluții polinoame.

7. Se aplică metoda separării variabilelor:

$$\cos y\,dy=-\frac{dx}{x^2}.$$

$$\text{deci}\quad -\frac{1}{x}+\sin y=C.$$

Folosind condiția din enunț, găsim $C=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, deci integrala este: $\sin y=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{x}$.

Pentru a determina pe y, trebuie ca y să aparțină intervalului $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ și efectuăm o translație: $z=y-5\pi$.

Ecuația devine: $\sin z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{x}$;

deci $z=\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{x}\right)$; $y=5\pi+\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{x}\right)$.

8. a) Se va aplica metoda separării variabilelor:

$$2y\,dy=\frac{2x^2+1}{(x^2+x+1)^2}\cdot e^{2x}\,dx \Rightarrow \int 2y\,dy=$$

$$=\int\left[\frac{2}{x^2+x+1}-\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\right]e^{2x}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2=\frac{e^{2x}}{x^2+x+1}+C.$$

b) Pentru $x = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow y^2 = \dfrac{e^{2x}}{x^2+x+1} \Rightarrow y(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{x^2+x+1}}$, iar $y(x) = -\dfrac{e^x}{\sqrt{x^2+x+1}}$ nu convine, deoarece nu satisface condiția inițială.

c) $y(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R}$.

ii) Asimptote: $y = 0$, orizontală pentru $x \to -\infty$.

iii) Studiul primei derivate:

$$y'(x) = \frac{2x^2+1}{(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^x; \quad x \in \mathbf{R}. \quad y'(x) > 0$$

iv) Tabloul de variație:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$y'(x)$		$+$		$+$	
$y(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vezi graficul XI.8.

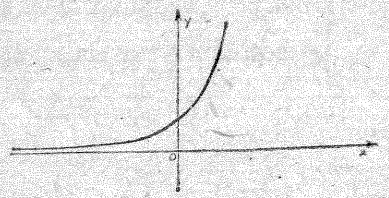


Fig. XI.8.

9. Se aplică metoda separării variabilelor:

$$27\frac{y'}{y^4} = -6x - 7 + \frac{28}{(3x+2)^2}$$

$$27\int \frac{dy}{y^4} = \int\left[-6x - 7 + \frac{28}{(3x+2)^2}\right]dx \Rightarrow y =$$

$$= 3(3x+2)^{\frac{1}{3}}\left[27(x^3+3x^2) + (42+3C)x + 2C + 28\right]^{-\frac{1}{3}}$$

b) Soluția particulară satisface condiția: $y(0) = 1$
Deci $C = 13$, iar soluția particulară este:

$$y(x) = \frac{(3x+2)^{\frac{1}{3}}}{(x^3+3x^2+3x+2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{(3x+2)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)(x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}}.$$

c) i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2\}$.

ii) Asimptote: $x = -2$ (verticală), $y = 0$ (orizontală).

iii) Studiul primei derivate:

$$y'(x) = \frac{-x(2x^2+5x+4)}{(3x+2)^{\frac{2}{3}}(x^3+3x^2+3x+2)^{\frac{4}{3}}} \Rightarrow y'(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

iv) Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$y'(x)$	$+$	$+$		$+$	$+$	0	$-$ $-$
$y(x)$	0	$\nearrow$ $+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Vezi graficul XI.9.

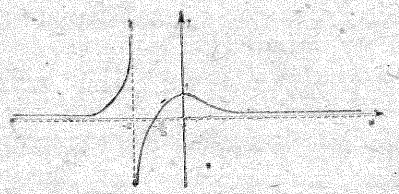


Fig. XI.9.

d) $y^3(x) = \dfrac{3x+2}{(x+2)(x^2+x+1)}$

$$I = \int_0^1 \frac{3x+2}{(x+2)(x^2+x+1)}dx = -\frac{4}{3}\int_0^1 \frac{dx}{x+2} +$$

$$+\frac{2}{3}\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx =$$

$$= \frac{2}{3}\ln\frac{4}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

10. Se aplică metoda separării variabilelor:

$$y^3 = 3\int x^2 e^{3x}\,dx - 7\int x e^{3x}\,dx - 15\int e^{3x}\,dx + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^3 = (x+1)(x-4)e^{3x} + C.$$

b) Cum $y(4) = 0 \Rightarrow C = 0$, iar soluția particulară căutată este $y = \sqrt[3]{(x+1)(x-4)}e^x$.

c) i) Domeniul de definiție, $x \in \mathbf{R}$.

ii) Asimptote: $y = 0$, orizontală.

iii) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 7x - 15}{3\sqrt[3]{[(x+1)(x-4)]^2}} \cdot e^x$$

iar funcția nu este derivabilă în $x = -1$, $x = 4$.

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f'(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f'(x) = -\infty$, deci în punctul $x = 1$ graficul nu admite un punct de întoarcere.

$$\lim_{\substack{x\to 4\\ x>4}} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 4\\ x<4}} f'(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{229}}{6},$$

iv) Tabloul de variație:

x	$-\infty$		$\frac{7-\sqrt{229}}{6}$		-1		$\frac{7+\sqrt{229}}{6}$		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{\frac{16}{9}}e^{\frac{-4}{3}}$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	$-\sqrt[3]{\frac{14}{9}}e^{\frac{22}{6}}$	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$	0

Vezi graficul XI.10.

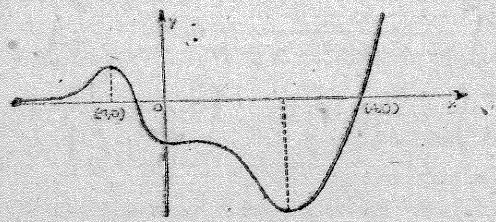


Fig. XI.10.

11. a) Pentru a determina ecuația în $z(x)$ scriem:

$$y(x) = z(x) + \frac{x}{3}; \quad y'(x) = z'(x) + \frac{1}{3}.$$

Înlocuind în ecuația inițială:

$$z(3x^2 - a^2) + (3x^2 + a^2)xz' = 0$$

și aplicînd metoda separării variabilelor, obținem:

$$\frac{z'}{z} + \left(-\frac{1}{x} + \frac{6x}{3x^2 + a^2}\right) = 0,$$

$$\text{Deci } z = \frac{C_1 x}{3x^2 + a^2};$$

iar integrala generală se va scrie:

$$y(x) = \frac{C_1 x}{3x^2 + a^2} + \frac{x}{3}$$

b) $y(a) = a \Rightarrow C_1 = \frac{8}{3}a^2$.

Deci integrala particulară este: $y(x) = \frac{x^3 + 8a^2x}{3x^2 + a^2}$.

c) Calculînd $y - a$, $y + a$ și făcînd raportul lor, se obține relația cerută.

12. Vom folosi *metoda variației constantelor*. Fie ecuația liniară neomogenă:

$$\frac{dy}{dx} = P(x)\cdot y \Rightarrow \frac{dy}{y} = P(x)\,dx \Rightarrow \ln y = \int P(x)\,dx$$

avînd soluția generală $y(x) = Ce^{\int P(x)\,dx}$.

Se caută soluții ale ecuației date sub forma:

$$y(x) = C(x)e^{\int P(x)\,dx}$$

unde $C(x)$ este o funcție derivabilă pe care o vom determina punînd condiția ca y să verifice ecuația dată, adică:

$$y'(x) = P(x)\,y(x) + Q(x).$$

Avem:

$$C'(x)e^{\int P(x)\,dx} + C(x)\cdot P(x)\cdot e^{\int P(x)\,dx} =$$

$$= P(x)\cdot C(x)\cdot e^{\int P(x)\,dx} + Q(x),$$

deci

$$C'(x) = Q(x)\cdot e^{-\int P(x)\,dx} \Rightarrow C(x) = \int Q(x)\cdot e^{-\int P(x)\,dx}\,dx + C_1.$$

Integrala generală este:

$$y(x) = C(x)\cdot e^{\int P(x)\,dx} = C_1 e^{\int P(x)\,dx} +$$

$$+\left(\int Q(x)\cdot e^{-\int P(x)\,dx}\,dx\right)\cdot e^{\int P(x)\,dx}.$$

13. Fiind o ecuație liniară și neomogenă, folosim rezultatul din exercițiul 12.

Considerăm ecuația liniară omogenă:

$$y' + 2xy = 0,$$

cu integrala generală: $y(x) = C\cdot e^{-\int_0^x 2x\,dx} = C\cdot e^{-x^2}$ cu $x\in\mathbf{R}$.

Fie $y(x) = C(x)\cdot e^{-x^2}$ și determinăm pe $C(x)$, astfel ca să verifice ecuația dată:

$$C'(x)\cdot e^{-x^2} - 2x\cdot C(x)\cdot e^{-x^2} + 2x\cdot C(x)\cdot e^{-x^2} = 2x\cdot e^{-x^2}$$

$$\text{deci } C'(x) = 2x \Rightarrow C(x) = x^2 + K.$$

$$y(x) = C(x)\cdot e^{-x^2} = (x^2 + K)e^{-x^2}$$

Soluția care verifică condiția inițială $y(0) = 1$ este:

$$1 = y(0) = (0 + K)e^0 = K.$$

$$y(x) = (x^2 + 1)e^{-x^2},\ x\in\mathbf{R}.$$

14. Ecuația este liniară și neomogenă. Aplicăm *metoda variației constantelor* (conform exercițiului 12):

fie ecuația omogenă: $\frac{dy}{dx} + y\cos x = 0$, cu soluția generală:

$$y(x) = C\,e^{-\int_0^x \cos x\,dx} = C\,e^{-\sin x}$$

Fie $y(x) = C(x)\cdot e^{-\sin x}$. Ca să-l determinăm pe $C(x)$ vom înlocui pe $y(x)$ în ecuația inițială

$$\Rightarrow C'(x)\cdot e^{-\sin x} - C(x)\cdot e^{-\sin x}\cos x + C(x)\cdot\cos x\cdot e^{-\sin x} =$$

$$= \sin x\cos x.$$

Deci, $C'(x) = e^{\sin x}\cdot\sin x\cos x$, iar printr-o integrare prin părți obținem:

$$C(x) = (\sin x - 1)e^{\sin x} + K.$$

Deci: $y(x) = C(x)\cdot e^{-\sin x} = \sin x - 1 + K\cdot e^{-\sin x}$.

Soluția particulară care verifică condiția $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$:

$$0 = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} - 1 + K\cdot e^{-\sin\frac{\pi}{2}} \Rightarrow K = 0:$$

deci $y(x) = \sin x - 1$, pentru $x\in\mathbf{R}$.

15. Se caută o integrală particulară de forma $y = e^{rx} \Rightarrow y' = r\cdot e^{rx}$, $y'' = r^2\cdot e^{rx}$ și formăm ecuația caracteristică substituind pe y în ecuația inițială:

$$r^2 + r + 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \text{deci}$$

soluția ecuației este:

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

16. Ecuația caracteristică asociată este:

$$r^2 + 2r + m = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -1\pm\sqrt{1-m}.$$

Cazul I: $1 - m > 0$, iar soluția este:

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

Cum $e^{r_1 x}$ este soluția pentru $C_1 = 1$ și $C_2 = 0$.

$e^{r_2 x}$ este soluția pentru $C_1 = 0$ și $C_2 = 0$,

atunci punctul a) are loc dacă $r_1 < 0$ și $r_2 < 0$, adică $m \in (0, 1)$.

b) $\lim_{x \to -\infty} e^{r_1 x} = \infty$ — nu are loc. c) $r_2 > 0$ și $m < 0$.

Cazul II: $m = 1$, atunci,

$$y(x) = C_1 e^{-x} + x C_2 e^{-x}.$$

Deoarece $\lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0$, $\lim_{x \to \infty} x e^{-x} = 0$,

$$\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} x e^{-x} = -\infty.$$

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = \lim_{x \to -\infty} x e^{-x} \left(\frac{C_1}{x} + C_2 \right) =$$

$$= \begin{cases} -\infty \text{ dacă } C_2 > 0 \text{ sau } C_2 = 0 \text{ și } C_1 < 0 \\ +\infty \text{ dacă } C_2 < 0 \text{ sau } C_2 = 0 \text{ și } C_1 > 0 \end{cases}$$

Deci punctul a) există, iar punctele b) și c) nu există.

Cazul III: $1 - m < 0$ atunci

$$y(x) = e^{-x} \left[C_1 \cos \left(\sqrt{m-1} \right) x + C_2 \sin \left(\sqrt{m-1} \right) x \right]$$

Cum: $\lim_{x \to \infty} y(x) = 0$, iar punctul a) are loc dacă:

$$x_n = \frac{2\pi}{\sqrt{m-1}} - \frac{2\pi n}{\sqrt{m-1}}, \text{ și } \lim_{n \to \infty} x_n = -\infty,$$

atunci:

$$\lim_{n \to \infty} y(x_n) = C_1 \lim_{n \to \infty} e^{-x_n} = \begin{cases} \infty & \text{pentru } C_1 > 0 \\ -\infty & \text{pentru } C_1 < 0 \\ 0 & \text{pentru } C_1 = 0 \end{cases}$$

Fie $x'_n = \frac{2\pi}{\sqrt{m-1}} - \frac{2n\pi - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{m-1}}$ și $\lim_{n \to \infty} x'_n = -\infty$.

Atunci: $\lim_{n \to \infty} y(x_n) = C_2 \lim_{n \to \infty} e^{-x_n} = \begin{cases} \infty & \text{pentru } C_2 > 0 \\ -\infty & \text{pentru } C_2 < 0 \\ 0 & \text{pentru } C_2 = 0 \end{cases}$

Se observă că punctele b) și c) nu au loc.

Deci: punctul a) există dacă $m > 0$; punctul c) există dacă $m < 0$; punctul b) nu există pentru m real.

17. Ecuația caracteristică asociată este: $r^2 + 2mr + m + 2 = 0$, cu $\Delta = 4(m-2)(m+1)$. Deci se vor analiza următoarele cazuri:

i) $\Delta > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$,

ii) $\Delta < 0 \Rightarrow m \in (-1, 2)$

iii) $\Delta = 0 \Rightarrow m = -1$ sau $m = 2$.

18. i) Ecuația omogenă atașată ecuației date:

$$y' + y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} + dx = 0 \Rightarrow \ln |y| = -x + C \Rightarrow y = C e^{-x}.$$

Fie $y(x) = C(x) \cdot e^{-x}$ o soluție a ecuației date; scriind că verifică ecuația, avem:

$$C'(x) e^{-x} - e^{-x} C(x) + C(x) \cdot e^{-x} = \frac{1}{1 + e^x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} \Rightarrow C(x) = \ln (1 + e^x).$$

Deci soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$y = C e^{-x} \cdot \ln (1 + e^x).$$

ii) Soluția generală este: $y = \sum_{k=1}^{n} C_k \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}$, unde C_k sînt constante reale.

iii) $y = e^x + \sum_{k=0}^{n-1} C_k x^k$.

iv) Integrînd o dată ecuația obținem: $y' = x \ln x - x + C$. Integrînd încă o dată, obținem:

$$y = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3x^2}{4} + Cx + C_1.$$

v) Ecuația caracteristică atașată este:

$$r^4 + 2r^3 + 5r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \\ r_3 = r_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}. \end{cases}$$

Soluția generală este:

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left[(Ax + B)\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + (Cx + D)\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right].$$

vi) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-\frac{5x}{2}}$.

vii) Ecuația caracteristică atașată este:

$$r^4 + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2};\ r_{3,4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Soluția generală a ecuației este:

$$y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\right] +$$

$$+ e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left[C_3 \cos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}x\right) + C_4 \sin\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}x\right)\right].$$

viii) Notăm $y' = u$, iar ecuația devine:

$$u'' - 6u' + 5u = e^{5x}.$$

Căutăm o soluție particulară a ecuației în u de forma: $u = ae^{5x} \Rightarrow u' = 3ae^{3x} \Rightarrow u'' = 9\,ae^{3x}$. Înlocuind în ecuație obținem:

$$9a - 18a + 5a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}.$$

Soluția generală a ecuației este:

$$u = C_1 e^{x} + C_2 e^{5x} - \frac{1}{4}e^{3x} \Rightarrow y = C_1 e^{x} + C_2 e^{5x} - \frac{1}{12}e^{3x} + C_3.$$

ix) Căutăm o soluție particulară de forma:

$$y = ae^{10x} \Rightarrow y' = 10ae^{10x},\ y'' = 100ae^{10x}.$$

Înlocuind în ecuație obținem: $a = \frac{1}{91}$.

Cum soluția generală a ecuației omogene este:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x},$$

rezultă că soluția generală a ecuației este:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{91}e^{10x}.$$

x) Fie $y_0 = Ax^2 + Bx + C$ o soluție particulară a ecuației inițiale, ai cărei coeficienți A, B, C îi vom determina prin identificare: (aplicînd *metoda coeficienților nedeterminați*):

$$y_0' = 2Ax + B;\ y_0'' = 2A. \text{ Deci:}$$

$$2A - 5(2Ax + B) + 6(Ax^2 + Bx + C) = x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{6};\ B = \frac{5}{18};\ C = \frac{19}{108}.$$

Soluția generală a ecuației omogene este:
$y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$, iar soluția generală a ecuației este

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{19}{108}.$$

xi) $y = \frac{C_1}{x} + C_2$.

xii) $y' = \dfrac{6 - \frac{y}{x}}{4 - \frac{y}{x}}$. Facem substituția: $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = u + u'x$.

Ecuația diferențială devine:

$$u'x = \frac{6 - u}{4 - u} - u \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{4 - u}{u^2 - 5u + 6}du \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1}{u - 3}du - \frac{2}{u - 2}du \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|x| = \ln|u - 3| - 2\ln|u - 2| + \ln C,$$

iar integrala generală se determină înlocuind pe u cu $\frac{y}{x}$.

xiii)-Facem substituția $y' = u \Rightarrow \frac{dx}{a} = \frac{du}{(1 + u^2)^{3/2}}$

și integrînd, obținem:

$$\frac{x - C}{a} = \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} \Rightarrow u = \frac{x - C}{\sqrt{a^2 - (x - C)^2}} \Rightarrow dy =$$

$$= \frac{x - C}{\sqrt{a^2 - (x - C)^2}}dx \Rightarrow y = -\sqrt{a^2 - (x - C)^2} + C_1.$$

19. i) Substituim $y = vx \Rightarrow dy = v\,dx + x\,dv$ și înlocuind în ecuația dată obținem:

$$v^2x^2dx + (x^2 - vx^2)\,(v\,dx + x\,dv) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2v\,dx + x^3(1 - v)dv = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{1 - v}{v}\,dv = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|x| + \ln|v| - v = C \Rightarrow \ln|vx| = v + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow vx = e^{C+v} = e^C \cdot e^v = k \cdot e^v. \text{ Cum } v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ke^{\frac{y}{x}}.$$

ii) Substituim $y = tx \Rightarrow dy = t\,dx + x\,dt \Rightarrow x\,dx +$
$+ tx\,dx + x \cdot (t\,dx + x\,dt) = 0 \Rightarrow x(1 + 2t)dx + x^2dt = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dt}{1 + 2t} = C \Rightarrow \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|1 + 2t| = \ln C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\sqrt{1 + 2t} = C \Rightarrow x^2 + 2xy = C.$$

iii) Substituim $y = vx \Rightarrow dy = v\,dx + x\,dv$ și înlocuind în ecuația dată obținem:

$$x^3v^2(v\,dx + x\,dv) = x^3\,dx + v^2x^3\,dx \Rightarrow v^2x\,dx = dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int v^2\,dv - \int \frac{dx}{x} = C \Rightarrow \frac{1}{3}v^3 - \ln x = \ln C, \frac{1}{3}\frac{y^3}{x^3} -$$

$$- \ln x = \ln C \Rightarrow y^3 = 3x^3 \ln x + \ln C \Rightarrow y^3 = \ln Cx^{3x^3}.$$

iv) Substituim $y = uz \Rightarrow dy = u\,dz + z\,du \Rightarrow \frac{dy}{dx} =$

$$= u \cdot \frac{dz}{dx} + z \cdot \frac{du}{dx} \text{ și înlocuind în ecuația dată obținem:}$$

$$u \cdot \frac{dz}{dx} + z \cdot \frac{du}{dx} - \frac{2uz}{1 + x} = (x + 1)^{\frac{5}{2}} \Rightarrow u \cdot \frac{dz}{dx} + z\left(\frac{du}{dx} - \right.$$

$$\left. - \frac{2u}{1 + x}\right) = (x + 1)^{\frac{5}{2}}. \qquad (a)$$

Pentru determinarea lui u, anulăm coeficientul lui z și avem:

$$\frac{du}{dx} - \frac{2u}{1 + x} = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{2dx}{1 + x} \Rightarrow \ln|u| = 2\ln|1 + x| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = e^{\ln(1+x)^2} = (1 + x)^2.$$

Pentru determinarea lui z, din (a) avem succesiv:

$$u\frac{dz}{dx} = (x + 1)^{\frac{5}{2}} \Rightarrow dz = (x + 1)^{\frac{1}{2}}\,dx;\ z = \frac{2(x + 1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C.$$

Substituind valorile lui u și z în $y = uz$, obținem soluția:

$$y = \frac{2(x + 1)^{\frac{7}{2}}}{3} + C(x + 1)^2.$$

v) Substituim $y = uz \Rightarrow dy = u\,dz + z\,du$.
Ecuația dată devine succesiv:

$$x(u'z + z'u) - 2uz = x^3e^x \Rightarrow xz'u + z(xu' - 2u) = x^3e^x. \quad (a)$$

Anulînd coeficientul $xu' - 2u = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{2\,dx}{x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln|u| = 2\ln|x| \Rightarrow u = x^2.$$

Din (a) avem $xz' \cdot u = x^3e^x \Rightarrow x^3z' = x^3e^x$,

$$\frac{dz}{dx} = e^x \Rightarrow z = e^x + C, \text{ iar ecuația va deveni}$$

$$y = uz = (e^x + C)x^2.$$

vi) Substituim $y = uz \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}$, iar după înlocuire, ecuația dată devine:

$$u \cdot \frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx} + \frac{4\,xuz}{x^2 + 1} = \frac{1}{(x^2 + 1)^3} \Rightarrow u\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{du}{dx} + \right.$$

$$\left. + \frac{4\,xu}{x^2 + 1}\right) = \frac{1}{(x^2 + 1)^3}.$$

Determinăm pe u:

$$\frac{du}{dx}+\frac{4xu}{x^2+1}=0\Rightarrow\frac{du}{u}=-\frac{4x\,dx}{x^2+1}\Rightarrow u=\frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

Determinăm pe z din: $u\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{(x^2+1)^3}$.

$$\text{sau } dz=\frac{dx}{1+x^2}\Rightarrow z=\operatorname{arctg}\ x.$$

Deci $y=uz\Rightarrow y=\dfrac{1}{(x^2+1)^2}\cdot(\operatorname{arctg}\ x+C)$.

vii) $y=x+C\sqrt{1+x^2}$. viii) $y=(C+x^2)e^{-x^2}$.

ix) $y=C\ \cos\ x-2\ \cos^2 x$. x) $y=Cx^m+e^x$.

20. Cum f este continuă $\Rightarrow f^m$ este continuă $\Rightarrow\int f^m(x)dx$ este derivabilă $\Rightarrow f^n$ este derivabilă $\Rightarrow f$ este derivabilă. Dacă derivăm relația, obținem:

$$f^m(x)=n\cdot f^{n-1}(x)\cdot f'(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{f^{m-n+1}(x)}{n}.$$

Notînd $f(x)=y\Rightarrow\dfrac{y'}{y^{m-n+1}}-\dfrac{1}{n}=0$. $f(x)=\left(\dfrac{n-m}{n}x+C\right)^{\frac{1}{n-m}}$

C fiind o constantă reală.

21. Cum funcția f este continuă $\Rightarrow\int f(x)dx$ este derivabilă $\Rightarrow\dfrac{f(x)}{x}$ este derivabilă. Derivăm relația și obținem:

$$f(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=x+\frac{1}{x}$$

și integrînd obținem:

$$\ln f(x)=\frac{x^2}{2}+\ln|x|,\ \text{deci}\ f(x)=C|x|e^{\frac{x^2}{2}},$$

unde $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ și $C\in(0,\infty)$

22. a) Căutăm pentru această *ecuație diferențială de ordinul doi, liniară, cu coeficienți constanți* soluții de forma $y=e^{rx}$ și înlocuind pe y vom obține ecuația caracteristică în r:

$$r^2-\sqrt{2}r+1=0\Rightarrow r=\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{i\sqrt{2}}{2}.$$

Cum rădăcinile sînt complexe conjugate atunci soluția este:

$$y=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right).$$

b) Impunînd condițiile inițiale avem:

$$y(0)=C_1=1,\ y'(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left[(C_1+C_2)\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+\right.$$

$$\left.+(C_2-C_1)\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right]\Rightarrow y'(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}C_1+\frac{\sqrt{2}}{2}C_2=\sqrt{2}.$$

Deci $C_1=C_2=1$, iar soluția particulară este:

$$y_1(x)=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right).$$

c) $A=\displaystyle\int_0^{\pi}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)dx=\sqrt{2}e_\pi$

unde integrarea s-a efectuat de două ori prin părți.

d) Ecuația caracteristică asociată este:

$$r^8-1=0;\ r^8-1=(r^2+1)(r+1)(r-1)(r^2+r\sqrt{2}+$$

$$+1)(r^2-r\sqrt{2}+1)=0.$$

Ultimul factor coincide cu membrul stîng al ecuației caracteristice de la punctul a). Deci soluția generală a ecuației de la punctul a) este o soluție a ecuației de mai sus.

Pentru a găsi expresia derivatelor de diferite ordine ale funcției $y_1(x)$, desigur că se va deriva succesiv funcția dată, pînă cînd se va sesiza o anumită regularitate, apoi forma generală a derivatei de ordinul n se va justifica prin inducție.

Formula generală pentru derivata de ordinul n este

$$y_1^{(n)}(x) = \sqrt{2}\, e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left[\sin\left(n+1\right)\frac{\pi}{4}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + \cos\left(n+1\right)\frac{\pi}{4}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right] = \sqrt{2}\, e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin\left[\left(n+1\right)\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}x\right].$$

23. În ipoteza că: $x^2(x+1) \neq 0$, vom scrie ecuația:

$$y' - \frac{x+2}{x(x+1)}y = -\frac{3(x+1)}{x^2}. \qquad (1)$$

care este o ecuație de tipul:
$y' + P(x)y = Q(x)$ — (Ecuația liniară neomogenă de ordinul întîi). (Vezi exercițiul 12).

Integrala generală este:

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x),$$

unde $\bar{y}(x)$ este integrala generală a ecuației omogene:

$$\bar{y}'(x) + P(x)\bar{y}(x) = 0,$$

iar $y_0(x)$ este o integrală particulară a ecuației complete:

$$y_0' + P(x)y_0(x) = Q(x).$$

Determinăm pe $\bar{y}(x)$:

$$\bar{y}' - \frac{x+2}{x(x+1)}\bar{y} = 0 \Rightarrow \bar{y} = \frac{C_1x^2}{x+1}.$$

Determinăm soluția particulară $y_0(x)$, folosind *metoda variației constantelor*, căutînd o soluție de forma:

$$y_0 = \frac{C_1(x)x^2}{x+1}; \qquad (2)$$

$$y_0' = \frac{C_1'(x)x^2}{x+1} + C_1(x)\cdot\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}. \qquad (3)$$

Înlocuind în (1) pe (2) și (3) obținem:

$$dC_1(x) = -\frac{3(x+1)^2}{x^4}dx,$$

și prin integrare obținem:

$$C_1(x) = \frac{3x^2+3x+1}{x^3}.$$

Integrala particulară este:

$$y_0(x) = \frac{3x^2+3x+1}{x(x+1)}.$$

Integrala generală:

$$y(x) = \frac{C_1x^3+3x^2+3x+1}{x(x+1)}. \qquad (4)$$

b) $C_1 = 1 \Rightarrow y = \frac{(x+1)^2}{x}$, deoarece din ipoteză $x+1 \neq 0$.

i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$.
ii) Asimptote: $x = 0$ (verticală), $y = x+2$ (oblică).
iii) Studiul primei derivate:

$$y' = \frac{x^2-1}{x^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

iv) Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'	$+$		0	$-$		$-$	0	$+$	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$ $+\infty$

Vezi graficul XI. 23 a.

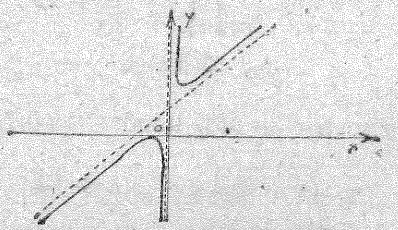


Fig. XI.23 a.

c) Din (4) se observă două asimptote verticale:

$$x = 0 \text{ și } x = -1.$$

Cum:

$$y = C_1 x + 3 - C_1 + \frac{C_1 x + 1}{x^2 + x} \Rightarrow y = C_1(x - 1) + 3$$

este asimptotă oblică, iar această familie de drepte, trece printr-un punct fix, de coordonate (1, 3).

d) Fie $C_1 = 0$; atunci integrala particulară este:

$$y = 3 + \frac{1}{x^2 + x}.$$

Studiul primei derivate:

$$y' = -\frac{2x + 1}{(x^2 + x)^2}$$

Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
y'	$+$	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	$-$
y	3	$\nearrow$	$+\infty \mid -\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	3

Vezi graficul XI. 23 b.

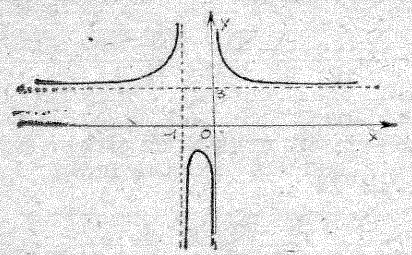


Fig. XII.23 b.

e) Locul geometric se află luînd $y' = 0$ în ecuația diferențială dată:

$$-x(x + 2)y = -3(x + 1)^2,$$

respectiv: $y(x) = \dfrac{3(x + 1)^2}{x(x + 2)}$.

24. Din prima ecuație diferențială deducem:

$$y' = 2e^{2x} - 4z,$$

Funcțiile $2e^{2x}$ și z sînt funcții derivabile.
Cum y' este derivabilă

$$y'' = 4e^{2x} - 4z' \qquad (1)$$

Din ecuația inițială găsim:

$$4z' = 4y + 4e^{2x}$$

iar ecuația (1) devine: $y'' + 4y = 0$.

Formăm ecuația caracteristică: $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 2i$, iar integrala generală este:

$$y(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x, \qquad (2)$$

$$\text{și } z(x) = -\frac{C_1}{2} \cos 2x + \frac{C_2}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} e^{2x}. \qquad (3)$$

Se spune că relațiile (2) și (3) dau integrala generală a sistemului de ecuații diferențiale inițial.

25. a) Ecuația caracteristică atașată este:

$$r_1^2 - 2r_1 r + r^2 = 0$$

și are rădăcinile confundate $r_1 = r_2 = r$, deci soluția generală este $y = (Ax + B)e^{rx}$.

b) Impunînd condițiile inițiale obținem:

$y(0) = 1 \Rightarrow B = 1$, $y'(0) = 2r \Rightarrow A + Br = 2r \Rightarrow A = r$

Atunci soluția particulară este: $C(r)$: $y = (rx + 1)e^{rx}$.

c) i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R}$.

ii) Asimptote: $y = 0$, orizontală pentru $x \to -\infty$

iii) Studiul primei derivate:

$$y' = (r^2 x + 2r)e^{rx}; \quad y' = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{r}.$$

iv) Studiul derivatei a doua:

$$y'' = (r^3 x + 3r^2)e^{rx}; \quad y'' = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{r}$$

v) Tabloul de variație este:

x	$-\infty$		$\frac{-3}{r}$		$\frac{-2}{r}$				$+\infty$
y'		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
y	0	$\searrow$	$-2e^{-3}$	$\searrow$	$-e^{-2}$		$\nearrow$		$+\infty$
y''		$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Vezi graficul XI. 25.

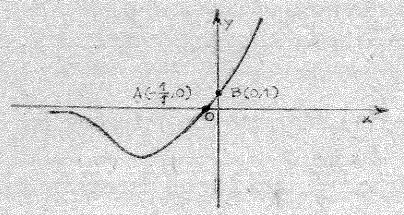


Fig. XI.25.

d) Coordonatele punctului de inflexiune sînt:

$$x = -\frac{3}{r},\ y = -2e^{-3}.$$

Cum parametrul r a fost eliminat din a doua relație, înseamnă că ecuația locului geometric căutat este o paralelă la abscisă.

e) $A = \int_{-\frac{1}{r}}^{0} (rx+1)e^{rx}dx = \frac{e^{-1}}{r}$;

unde integrarea s-a efectuat prin părți.

Aria triunghiului OAB este $\frac{1}{2r}$, deci raportul acestor arii este egal cu $\frac{2}{e}$.

26. a) Formăm ecuația caracteristică:

$$r^2 + 2\alpha r + \alpha^2 + \beta = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{-\beta}$$

i) $\beta < 0$, soluția este:

$$y = C_1 e^{(-\alpha+\sqrt{-\beta})x} + C_2 e^{(-\alpha-\sqrt{-\beta})x}$$

ii) $\beta = 0$, soluția este: $y = (C_1 + C_2 x)e^{-\alpha x}$

iii) $\beta > 0$, soluția este: $y = e^{-\alpha x}(C_1 \cos \sqrt{\beta}x + C_2 \sin \sqrt{\beta}x)$.

b) Pentru ca G să intersecteze abscisa de o infinitate de ori, atunci vom considera cazul iii), iar soluția să fie diferită de soluția banală.

Pentru ca distanța între două puncte consecutive de intersecție să fie egală cu π, trebuie ca factorul trigonometric să aibă perioada 2π, deci: $\sqrt{\beta} = 1 \Rightarrow \beta = 1$.

c) $\beta = 1$; $y = e^{-\alpha x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$.

Mai putem scrie:

$$y = A \cdot e^{-\alpha x} \sin(x + \varphi), \text{ unde}$$

$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, iar φ este dat de relațiile:

$$\begin{cases} \sin \varphi = \dfrac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \\ \cos \varphi = \dfrac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \end{cases}$$

$$I = \int e^{-\alpha x} \sin(x+\varphi)\,dx = -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2+1}[\alpha \sin(x+\varphi) + \cos(x+\varphi)],$$

unde integrala s-a rezolvat prin metoda integrării prin părți, aplicată de două ori. Vezi graficul XI. 26.

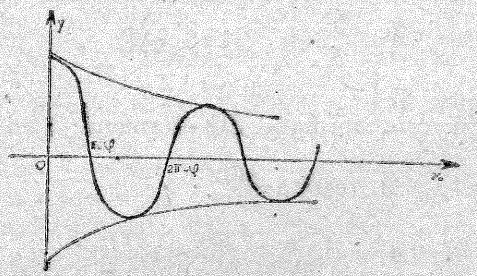


Fig. XI.26.

Aria unei „arcade" este dată de valoarea absolută a expresiei:

$$A \cdot I\Big|_{n\pi-\varphi}^{(n+1)\pi-\varphi} = A \cdot \frac{-e^{-\alpha x}}{\alpha^2+1}[\alpha \sin(x+\varphi) + \cos(x+\varphi)]\Big|_{n\pi-\varphi}^{(n+1)\pi-\varphi} =$$

$$= \frac{(-1)^n A}{\alpha^2+1}[e^{-(n+1)\pi\alpha+\alpha\varphi} + e^{-n\pi\alpha+\varphi\alpha}].$$

Aria A_n este dată de relația:

$$A_n = \frac{A}{\alpha^2+1} e^{-n\pi\alpha+\varphi\alpha} \cdot (1 + e^{-\pi\alpha}).$$

În afara ariilor „arcadelor" complete mai trebuie însumate ariile primei și ultimei „arcade" necomplete:

$$A_0 = A \frac{-e^{-\alpha x}}{\alpha^2+1}[\alpha \sin(x+\varphi) + \cos(x+\varphi)]\Big|_0^{\pi-\varphi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_r = A\left|\frac{-e^{-\alpha x}}{\alpha^2+1}[\alpha \sin(x+\varphi) + \cos(x+\varphi)]\Big|_{(n+1)\pi-}^{r}\right|;$$

deci aria este:

$$A(r) = A_0 + \frac{A}{\alpha^2+1}\sum_{k=1}^{n}(1+e^{-\pi\alpha}) \cdot e^{-\pi k\alpha+\alpha\varphi} + A_r.$$

d) Pentru ca $A(r)$ să aibă limită, trebuie ca seria respectivă să fie convergentă:

$$S = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(1+e^{-\pi\alpha})e^{-\pi k\alpha+\alpha\varphi} = \lim_{n\to\infty}(1+e^{-\pi\alpha}) \cdot e^{\varphi\alpha}\sum_{k=1}^{n}e^{-k\pi\alpha} =$$

$$= (1 + e^{-\pi\alpha}) \cdot e^{\varphi\alpha} \cdot \frac{e^{-\pi\alpha}}{1-e^{-\pi\alpha}};$$

deoarece seria este formată din termenii unei progresii geometrice.

Cum $\lim_{r\to\infty} A_r = 0$, rezultă că:

$$\lim_{r\to\infty} A(r) = \frac{A}{\alpha^2+1}[e^{-\pi\alpha+\varphi\alpha} + \alpha \sin\varphi + \cos\varphi + S].$$

27. a) $y' = \dfrac{a}{1+(ax+b)^2}$, $y'' = \dfrac{-2a^2(ax+b)}{[1+(ax+b^2)]^2}$

$$y''' = -2a^3\frac{1-3(ax+b)^2}{[1+(ax+b)^2]^3},\ y^{IV} = 24a^4(ax+b)\frac{1-(ax+b)^2}{[1+(ax+b)^2]^4}.$$

După înlocuire în ecuația diferențială, se obține egalitatea căutată.

b) $y_i(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{(x-a_i)-(x-a_{n-i})}{1+(x-a_i)(x-a_{n-i})} =$

$$= \operatorname{arctg}\frac{a_{n-i}-a_i}{1+(x-a_i)(x-a_{n-i})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_i'(x) = \frac{(a_i-a_{n-i})(2x-a_i-a_{n-i})}{[1+(x-a_i)^2][1+(x-a_{n-i})^2]}.$$

$$y_i'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{a_i+a_{n-i}}{2} = \frac{a_0+a_n}{2},$$

egalitate realizată conform relației dintre termenii progresiei aritmetice. Deci, extremele funcțiilor y_i sînt situate pe dreapta $x = \dfrac{a_0+a_n}{2}$.

Valoarea maximului este:

$$M_i = \operatorname{arctg}\frac{a_{n-i}-a_i}{2} - \operatorname{arctg}\frac{a_i-a_{n-i}}{2} = 2\operatorname{arctg}\frac{a_{n-i}-a_i}{2};$$

deci $\operatorname{tg}\dfrac{M_i}{2} = \dfrac{a_{n-i}-a_i}{2} \Rightarrow \sum_{i=0}^{p-1}\operatorname{tg}\dfrac{M_i}{2} = \sum_{i=0}^{p-1}\dfrac{a_{n-i}-a_i}{2} =$

$$= \sum_{i=0}^{p-1}\frac{(n-2i)(a_1-a_0)}{2} = \frac{a_1-a_0}{2}\sum_{i=0}^{p-1}(n-2i) =$$

$$= \frac{a_1-a_0}{2}\left(\sum_{i=0}^{p-1}n - 2\sum_{i=0}^{p-1}i\right) = \frac{a_1-a_0}{2}\left[np - 2\cdot\frac{(p-1)p}{2}\right] =$$

$$= \frac{a_1-a_0}{2}[np - p^2 + p] =$$

$$= \frac{a_1-a_0}{2}[(2p-1)p - p^2 + p] = \frac{p^2(a_1-a_0)}{2}.$$

c) $y'' = \left[\sum_{i=1}^{n} \operatorname{arctg}(x - a_1)\right]'' = -2\sum_{i=1}^{n} \frac{x - a_i}{[1 + (x - a_i)^2]^2}$.

Cum șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este crescător, din expresia derivatei a doua, pentru $x = a_1$, obținem

$$-2\sum_{i=1}^{n} \frac{a_1 - a_i}{[1 + (a_1 - a_i)^2]^2} > 0.$$

Pentru $x = a_n$

$$-2\sum_{i=1}^{n} \frac{a_n - a_i}{[1 + (a_n - a_i)^2]^2} < 0.$$

Conform unei consecințe a proprietății lui Darboux, în intervalul (a_1, a_n) există un număr impar de rădăcini, deoarece funcția schimbă semnul la capetele intervalului.

CAPITOLUL XII

TESTE DE SINTEZĂ

PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

1. Fiind date punctele $A(1, 2)$ și $M\left(\frac{1}{1+t^2}; \frac{t}{1+t^2}\right)$, unde $t \in \mathbf{R}$, într-un sistem cartezian xOy:

a) Să se determine în funcție de t coeficientul unghiular m al dreptei AM.

b) Să se studieze variația lui m cînd t parcurge toată axa reală și să se reprezinte grafic funcția astfel obținută.

c) Arătați că pe Ox există un punct C, a cărui distanță pînă la punctul M nu depinde de t.

2. Considerăm funcția: $f(x) = \frac{\sin 3x + 2\sin 5x + \sin 7x}{\sin 3x + \sin 5x}$.

a) Exprimați funcția $f(x)$ în funcție de elementul: $t = 4\cos^2 x$, ceea ce va conduce la o expresie de forma:

$$f(t) = \frac{At^2 - Bt + C}{t - a},$$

unde A, B, C sînt numere naturale.

b) Studiați variația funcției $f(t)$, cînd $t \in [0, 4]$ și trasați graficul funcției.

c) Să se calculeze $I = \int f(x)\,dx$.

3. Se dă funcția $f(x) = \sin x - \frac{x-1}{x+1}$, $x \in \mathbf{R}\setminus\{-1\}$.

a) Folosind graficul funcțiilor:

$$f_1(x) = \sin x,\ f_2(x) = \frac{x-1}{x+1},$$

să se determine intervalele în care se află rădăcinile reale ale ecuației $f(x) = 0$.

b) Să se arate că cea mai mică rădăcină pozitivă se găsește în intervalul $\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$.

c) Folosind teorema lui Rolle, să se arate că ecuația:

$$\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{(x+1)^2} = 0$$

are în intervalul $[2\pi, 3\pi]$ cel puțin o rădăcină reală.

(Institutul Politehnic)

4. Se dă polinomul: $f(x) = x^{p+q} - A(x^p - 1)$, $x \in \mathbf{R}$, unde p, q sînt numere naturale impare, iar $A > 0$. Se cere:

i) Să se determine A în cazul $p = 3$, $q = 1$, astfel încît tangenta în punctul de inflexiune, care are abscisa pozitivă, să facă un unghi de 135° cu direcția pozitivă a axei Ox.

ii) Să se traseze graficul funcției $f(x)$ pentru $p = 3$, $q = 1$, $A = 2$.

iii) Să se arate că ecuația $f(x) = 0$ are două rădăcini pozitive pentru

$$A > \sqrt[p]{\frac{(p+q)^{p+q}}{p^p q^q}}.$$

(Institutul Politehnic)

5. a) Să se studieze variația și să se reprezinte grafic funcția:

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}.$$

b) Să se determine mulțimea pentru care are sens ecuația:

$$\ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} = \sqrt{\ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x}}.$$

c) Să se rezolve ecuația de la punctul precedent.

d) Pentru ce valori ale lui x:

$$\ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} < \sqrt{\ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x}}.$$

(Facultatea de matematică)

6. Se consideră funcția:

$$f(x) = \log_A (9 - x^2)^{\frac{1}{B}}, \text{ unde } \begin{cases} A = x^2 - x - 2 \\ B = 9 - x^2 \end{cases}$$

a) Să se efectueze schimbarea de bază, trecîndu-se la logaritmi naturali.

b) Să se determine domeniul de definiție.

c) Să se rezolve inegalitatea $f(x) > 0$.

d) Să se calculeze $f'(x)$.

(Facultatea de matematică)

7. Se consideră funcția:

$$f(x) = \ln \left(\frac{2|x| - 1}{x + 2} \right)^2$$

a) Să se determine mulțimile de definiție, continuitate, derivabilitate.

b) Să se calculeze derivatele laterale în punctele în care f nu este derivabilă.

c) Să se reprezinte grafic funcția.

d) Să se calculeze aria domeniului plan cuprins între graficul funcției, axa Ox și dreptele $x = 3$, $x = 4$.

8. Se consideră funcția $f(x) = \ln \left| \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \right|$.

a) Să se studieze variația funcției și să se reprezinte grafic

b) Să se calculeze integrala:

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(x)\, dx.$$

9. a) Să se determine valorile lui x pentru care

$$0 < x < \frac{2x^3 - 9x}{x^2 - 5} < 2x.$$

b) Să se traseze graficul funcției $f(x) = \frac{2x^3 - 9x}{x^2 - 5}$.

c) Să se calculeze aria domeniului situat în semiplanul $x \geq 0$, mărginit de graficul precedent și axa Ox.

d) Considerînd graficul funcției precedente să se discute natura rădăcinilor ecuației

$$2x^3 - \lambda x^2 - 9x + 5\lambda = 0,$$

unde λ este un parametru real.

(Facultatea de matematică)

10. Se consideră șirul cu termenul general:

$$u_n = \frac{n(a-1)+1}{n(a+2)-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{na}\right), \quad n \in \mathbf{N}, \text{ și } a \in \mathbf{R}.$$

a) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$. *Discuție.*

b) Dacă notăm cu $f(a) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ să se reprezinte grafic funcția $y = f(a)$.

11. Se consideră funcția $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $\alpha \in (1, \infty)$. Se notează cu C curba care reprezintă graficul funcției $f(x)$.

a) Să se construiască curba C și să se precizeze cîteva elemente ale curbei (puncte, tangente) care nu depind de valorile parametrului α.

b) Să se calculeze aria domeniului cuprins între axa Ox și acea parte a curbei C care se află sub axa Ox. Să se determine $k > 1$, astfel ca această arie să fie egală cu aria cuprinsă între Ox, curba C și dreptele de ecuație $x = 1$, $x = k$.

c) Din calculul integralei

$$\int_1^k f(x)\,dx,$$

să se deducă inegalitatea $\ln k^p > 1 - \frac{1}{k^p}$, pentru $k > 1$, $p > 1$.

d) Să se verifice dacă punctul de extrem al curbei C, cînd α parcurge intervalul $(1, \infty)$, descrie o parte a graficului funcției $g(x) = \frac{1}{e} \ln x$ și să se precizeze această parte.

12. Se dă funcția: $f(x) = \frac{x^2 + 2(a-b)x + b^2 - 2ab + 1}{x^2 + 1 - b^2}$, unde $a, b \in \mathbf{R}$.

a) Ce legătură trebuie să existe între constantele a și b, pentru ca valorile extreme y_1, y_2 să verifice condiția $y_1 + y_2 = 0$.

b) În acest caz să se determine valorile a și b, astfel încît tangenta la graficul funcției date în punctul de abscisă $x = 0$ să fie paralelă cu prima bisectoare a axelor de coordonate.

c) Să se reprezinte grafic funcția $f(x)$ pentru $a = 2$ și $b = 3$.

(Inst. Petrol, Gaze și Geologie)

13. Se consideră funcția: $f(x) = 4x + \operatorname{ctg} x$.

a) Să se reprezinte grafic funcția.

b) Să se arate că punctele de inflexiune aparțin unei drepte.

c) Să se determine:

$$\mathbf{A} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (4x + \operatorname{ctg} x)\,dx.$$

14. Se consideră funcțiile:

$$f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}; \quad g(x) = \sqrt{x - 1}.$$

a) Să se construiască graficul (C) al funcției $f(x)$ și graficul (C_1) al funcției $g(x)$, pentru $x \geq 1$, folosind aceleași axe carteziene.

b) Un punct M de pe (C) se proiectează în P pe Ox și în Q pe Oy; analog un punct M_1 de pe curba C_1 se proiectează în P_1 și Q_1. Să se arate că fiecărui punct M de pe curba (C) îi corespunde un singur punct M_1 pe (C_1) pentru care există relația:

$$\text{Aria } [OPMQ] = \text{aria } [OP_1M_1Q_1]. \qquad (1)$$

c) Cele două curbe (C), (C_1) au un punct comun pe axa Ox. Dacă M și M_1 corespund condiției (1), să se arate că aria mărginită de segmentele AP_1 și P_1M_1 și de curba (C_1) este egală cu dublul ariei mărginite de segmentele AP, PM și de curba (C).

(Institutul Politehnic)

15. Se consideră funcția: $f(x) = \frac{ax}{b^2 + x^2}$, $x \in \mathbf{R}$, $a > 0$.

a) Să se calculeze ordonata punctului de inflexiune al graficului funcției $f(x)$, a cărui abscisă este strict pozitivă.

b) Să se calculeze aria domeniului mărginit de graficul funcției $f(x)$, dreptele $x = 0$, axa Ox și $x = C$, unde C este abscisa punctului de inflexiune de la punctul precedent.

c) Să se rezolve ecuația:

$$8 \cdot f(b \operatorname{tg} \varphi) = 7 \cdot f(b \sin \varphi).$$

(Institutul Politehnic)

16. Se consideră funcția:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} & \text{pentru } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

a) Să se calculeze limitele laterale ale funcției $f(x)$ și $f'(x)$ în punctul $x = 0$, apoi să se traseze graficul funcției.

b) Să se calculeze aria cuprinsă între graficul funcției, axa Ox și dreptele:

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x = \sqrt{3}.$$

c) Fie $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinom cu coeficienții a, b, c, d numere reale, în progresie aritmetică cu $d \neq 0$. În ipoteza că rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale polinomului sînt reale, să se arate că:

$$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) = \frac{3\pi}{4}.$$

(Institutul Politehnic)

17. Se consideră funcția:

$$f(x) = \ln(1 + 2 \sin x).$$

a) Să se reprezinte grafic funcția.

b) Să se calculeze:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot \ln(1 + 2 \sin x)\, dx.$$

18. Se consideră funcția: $f(x) = \left| \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1} \right|$, $x \in \mathbf{R}$.

a) Să se reprezinte grafic funcția.

b) Să se calculeze aria domeniului limitat de graficul funcției f și de dreptele de ecuație $y = 0$ și $5y = 6x$.

c) Să se calculeze limitele laterale ale funcției $f'(x)$ în punctul $x = 1$.

d) Să se determine unghiul format de dreptele care trec prin punctul $(1, 0)$ și au drept coeficienți unghiulari aceste două limite.

e) Să se calculeze aria triunghiului format de aceste drepte și dreapta $y = 1$.

(Facultatea de matematică)

19. a) Să se rezolve ecuația:

$$\sin(\pi \ln x) + \cos(\pi \ln x) = 1$$

b) Să se reprezinte grafic funcția:

$$f(x) = \sin(\pi \ln x) + \cos(\pi \ln x) - 1,$$

$$\text{unde } 1 \leqslant x \leqslant e^2.$$

c) Să se calculeze aria domeniului situat deasupra axei Ox, mărginit de graficul precedent și de axa Ox.

d) Să se arate că $f(xe^2) = f(x)$, pentru orice $x > 0$.

Cum se poate folosi această proprietate pentru a studia variația funcției $f(x)$ pe semiaxa $(0, \infty)$?

(Facultatea de matematică)

20. Se consideră funcțiile:

$$f(x) = \arcsin \frac{x - 1}{\sqrt{2(1 + x^2)}}, \quad g(x) = \operatorname{arctg} x.$$

a) Să se reprezinte grafic funcției $f(x)$.

b) Să se deducă relațiile:

$$f(x) + g(x) = -\frac{3\pi}{4}; \quad x \in (-\infty, -1);$$

$$f(x) - g(x) = -\frac{\pi}{4}; \quad x \in (-1, \infty).$$

(Facultatea de matematică)

21. Se consideră funcția:

$$f(x) = \int \left[\frac{4}{(x+2)^2} \ln |x| + \frac{1}{x} \cdot \frac{x-2}{x+2} \right] dx, \quad x > 0.$$

a) Să se determine primitiva funcției f, care verifică condiția $f(1) = 0$.

b) Să se reprezinte grafic funcția.

c) Să se calculeze integrala definită:

$$I = \int_1^2 (x+2)\ln x \cdot f(x)\,dx.$$

22. Se consideră funcția

$$f(x) = \min\left[\ln\frac{1}{|x|},\ \frac{x^2-1}{x^2+1}\right],\ x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$$

Se cere:

i) mulțimea de derivabilitate a funcției.

ii) intervalele pe care $f''(x)$ păstrează un semn constant.

iii) graficul funcției.

23. Se consideră expresiile:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1};\ g(y) = \frac{y^2}{y^2+1}$$

a) Să se rezolve sistemul format de ecuațiile:

$$y = f(x),\quad x = g(y).$$

b) Să se traseze graficul celor două funcții pe un același sistem cartezian.

c) Dacă se notează cu A și B intersecțiile acestor grafice cu dreapta $2x + 2y - 3 = 0$, să se calculeze aria porțiunii de plan, cuprinsă între arcele OA, OB ale graficelor și dreapta AB.

24. Fie funcția f definită pe $\mathbf{R}$ prin relația

$$f(x) = e^x(2x^2 - 3x). \qquad (1)$$

a) Să se traseze graficul funcției.

b) Să se găsească soluția generală a ecuației diferențiale $y'' - 2y' + y = 4e^x$ și să se arate că (1) este o soluție particulară a acestei ecuații. Să se deducă apoi că $4e^x + 2y - y'$ este o primitivă a funcției f.

c) Să se calculeze aria $S(a)$ limitată de graficul funcției (1), axa Ox și dreptele de ecuații: $x = 0$ și $x = a$, unde a este un număr real negativ. Să se afle $\lim_{a\to-\infty} S(a)$.

d) Fie $f^{(n)}(x)$ derivata de ordinul n a funcției $f(x)$.

Să se arate că pentru orice n întreg, $n \geq 1$, avem: $f^{(n)}(x) = e^x(2x^2 + a_n x + b_n)$ unde a_n, b_n sînt funcții întregi de n. Să se stabilească relațiile:

$$a_{n+1} = a_n + 4 \text{ și } b_{n+1} = b_n + 4$$

și apoi să se calculeze a_n, b_n în funcție de n.

e) Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, ecuația:

$$2x^2 + a_n x + b_n = 0$$

admite două rădăcini reale și distincte.

(Examen definitivat)

25. Se consideră șirul $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$, $f_3(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$, ..., de funcții, cu $f_n : [a, \infty) \to \mathbf{R}_+$, pentru orice a pozitiv și n natural.

a) Să se arate că șirul $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge pe $[0, \infty)$ către o funcție $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}_+$ și să se stabilească expresia $f(x)$.

b) Să se scrie explicit mulțimea numerelor x pentru care $f(x)$ este un număr rațional.

c) f are proprietatea lui Darboux pe $[0, \infty)$?

d) Să se studieze și să se reprezinte grafic funcția

$$f : [0, \infty) \to \mathbf{R}_+.$$

e) Să se determine coordonatele centrului de greutate al plăcii omogene mărginite de curbă, axa Ox și dreptele $x = 1$, $x = 2$.

(Examen definitivat)

26. Se consideră funcția:

$$f(x) = \frac{\cos x}{5 + 4\cos x}$$

a) Să se traseze graficul funcției.

b) Să se calculeze aria cuprinsă între curbă, axa Ox și dreptele $x = 0$, $x = 2\pi$.

27. Fie $I_n = \int \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx$.

a) Să se stabilească formula de recurență:

$$(n-1)(I_n - I_{n-2}) = 2\sin(n-1)x,\ n \geq 2.$$

b) Să se arate că dacă n este impar, atunci:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

c) Să se arate că dacă n este par:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx = 2\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}+1}\cdot\frac{1}{n-1}\right].$$

(Examen definitivat)

28. Se consideră funcția $f : E \to \mathbf{R}$,

$f(x) = \arcsin x^{1-\frac{1}{\ln x}}$, unde E este domeniul de definiție.

a) Să se reprezinte grafic funcția.

b) Să se arate că $y = f(x)$ este o soluție a ecuației diferențiale:

$$xy'^3 - y'' = 0.$$

c) Să se stabilească expresia primitivei funcției f, care pentru $x = e$ are valoarea $\frac{\pi e}{2}$.

d) Să se scrie integrala generală a ecuației inițiale.

29. Se consideră $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin:

$$f(x) = \frac{[x] - x}{[x] + |x| + 1},$$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x. Să se studieze și să se traseze graficul funcției.

(Examen definitivat)

30. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 27}{x^2 - 2x + 1}.$$

a) Să se traseze graficul (C) al funcției.

b) Să se arate că există o funcție $F(x)$ de forma:

$$F(x) = \frac{mx^3 + nx^2 + px}{x - 1},$$

astfel încît $F'(x) = f(x)$.

c) Să se calculeze aria trapezului curbiliniu delimitat de arcul de curbă (C), asimptota oblică și dreptele $x = 3$, $x = 5$.

31. Fie funcția: $y(x) = (x - 1)e^{-x}$.

a) Fie funcția $z = xe^{-x}$. Să se calculeze $\lim_{x\to+\infty} z(x)$. Să se deducă $\lim_{x\to+\infty} y(x)$.

b) Să se afle $\lim_{x\to-\infty} y(x)$.

c) Să se construiască curba C asociată funcției $y(x)$.

d) Să se calculeze y'' și y'''. Să se arate că:

$$y^{(n)} = (-1)^n [x - n - 1]e^{-x}.$$

e) Să se calculeze $Y_\alpha^{(n)}(x)$, cînd $Y_\alpha(x) = (x + \alpha)e^{-x}$, α este parametru real.

f) Să se afle o primitivă a lui Y. Să se afle aria $S(h)$ a porțiunii de plan mărginite de C, $x'Ox$, $x = 1$, $x = h > 1$. Să se calculeze $\lim_{h\to+\infty} S(h)$.

32. Se dă sistemul:

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2, \end{cases}$$

unde λ este un parametru real.

a) Să se discute sistemul și să se determine valorile parametrului λ, pentru care sistemul admite o soluție unică.

b) Să se determine soluțiile $x(\lambda)$, $y(\lambda)$, $z(\lambda)$ ale sistemului corespunzătoare valorilor lui λ, determinate mai sus.

c) Să se studieze variația funcției $\sqrt[3]{\Delta(\lambda)}$, unde $\Delta(\lambda)$ este determinantul sistemului și să se reprezinte graficul ei.

33. Fie funcția $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x - 1}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

a) Să se determine α, β astfel încît $f(x)$ să aibă un extrem în punctul $M(0, 1)$.

b) Să se reprezinte grafic funcția $y = f'(x)$, cu α și β determinați mai sus.

c) Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a arcului de curbă corespunzător funcției:

$$g(x) = y(x) - 1, \; x \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

(Institutul Politehnic)

34. Fie șirul $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$, cu termenul general:

$$U_n = \frac{1 + x^n}{1 + x + \ldots + x^{n+p-1}},$$

cu $x \geqslant 0$ și p un număr natural dat.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$. Fie $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} U_n$.

b) Să se arate că $f(x)$ este o funcție continuă pe $[0, \infty)$, derivabilă pe $[0, \infty) \setminus \{1\}$ și că $f'(1 - 0)$ și $f'(1 + 0)$ există și că nu depind de p.

c) Să se construiască graficele C_0, C_1, C_2 ale funcției $f(x)$, pentru $p \in \{0, 1, 2\}$.

d) Fie x_M abscisa punctului de extrem al graficului C_2. Fie S_0, S_1, S_2 ariile porțiunilor de plan mărginite de Ox; $x = 0$, $x = x_M$ și C_0, C_1, C_2.

Să se arate că: $S_1 + S_2 = S_0 + \frac{1}{2}$.

(Institutul Politehnic)

35. Se consideră funcția $f(x, p)$ definită pe $(0, \infty)$ prin relația

$$f(x, p) = \frac{p}{x} - \frac{\ln x}{x}.$$

a) Să se calculeze, în funcție de p, valoarea x_p a lui x, care anulează derivata întîi a funcției $f(x, p)$ și valoarea corespunzătoare a funcției $f(x, p)$ adică $y_p = f(x_p, p)$.

b) La fiecare valoare a lui p corespunde un punct $M_p(x_p, y_p)$. Să se determine locul geometric al punctelor M_p și să se construiască graficul său.

c) Să se calculeze $S(p) = \sum\limits_{k=0}^{p} y_k$, (adică suma ordonatelor punctelor M_k) și $\lim\limits_{p\to\infty} S(p)$.

d) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x = 1$ și să se arate că această tangentă trece printr-un punct fix P, cînd p este variabil.

e) Să se traseze graficul funcției $f(x, p)$ și să se calculeze în funcție de m aria suprafeței delimitate de graficul funcției, axa Ox și dreptele $x = 1$, $x = m > 1$. Să se determine m astfel ca aria obținută să fie egală cu $p \cdot \ln m - \frac{1}{2}$ unități de arie.

36. Se consideră funcțiile:

$$f(x) = \ln\left(1 + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

$$g(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right).$$

definite pe mulțimea numerelor reale.

a) Să se studieze monotonia funcției $y = f(x)$ și să se precizeze care este cea mai mică valoare a ei.

b) Să se arate că pentru orice $x > 0$ este verificată relația:

$$x \cdot e^{g(x)} \left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]' + g'(x) = 0.$$

c) Să se arate că polinomul $(1 - x + x^2)^{2n+1} + (1 + x + x^2)^{2n+1}$ este divizibil cu $[e^{f(x)} - 1]^2$.

d) Să se determine soluțiile din intervalul $(0, \pi)$ ale ecuației trigonometrice:

$$f(\operatorname{tg} a) = g(\operatorname{ctg} a) - \frac{1}{2} \ln 3.$$

e) Să se arate că $g(x) < x$, pentru orice $x > 0$.

(Facultatea de matematică)

37. Fie $g(x) = \ln(1 + \sin^2 x)$.

a) Să se studieze domeniul de definiție al funcției g și derivatei g'. Să se traseze graficul funcției g.

b) Să se calculeze integrala definită:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} \, dx.$$

c) Să se determine soluția ecuației diferențiale:

$$4y'' + 9y = 0,$$

care satisface condițiile $y\left(\frac{8\pi}{9}\right) = \frac{1}{2}$ și $y\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2$.

38. Fie a un parametru real, iar f o funcție continuă pe $[a, \infty)$. Se consideră funcția $I(f)$ definită pe $[0, \infty)$, dată de relația:

$$I(f)(x) = \int_a^x e^t f(t)\,dt.$$

a) Să se studieze derivabilitatea funcției.
b) Să se studieze existența soluțiilor ecuației:
$I(f) = kf$, unde k este un parametru real.

39. Fie $f : [1, \infty) \to (0, \infty)$ o funcție descrescătoare și continuă. Se consideră: $F : [1, \infty) \to [0, \infty)$, dată de relația:

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt.$$

a) Să se arate că dacă există $\lim_{x\to\infty} F(x)$ și este finită, atunci șirul

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \text{ este convergent.}$$

b) Alegînd în mod convenabil funcția f și folosind rezultatul anterior, să se arate că șirul

$$x_n = \frac{1}{1^a} + \frac{1}{2^a} + \ldots + \frac{1}{n^a} \text{ este convergent pentru } a > 1.$$

40. Se consideră funcția $f(x) = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$.

a) Să se studieze variația și să se traseze graficul funcției f.
b) Să se calculeze limita șirului cu termenul general

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

c) Să se calculeze $\int_1^2 f(x)\,dx$.

(Institutul Politehnic)

41. Să se demonstreze că pentru $1 < a \leqslant b$ avem

$$\frac{1}{e}(e^b - e^a) \leqslant \int_a^b x^x\,dx \leqslant (e^b - e^a)\,e^{b^2-a-b},$$

$$0 \leqslant \int_a^b \frac{dx}{\ln x} - \ln\frac{b-1}{a-1} \leqslant b - a.$$

42. Fie funcția $f(x) = [x] \cdot \sin \pi x$, $x \in \mathbf{R}$, iar $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x.

a) Să se reprezinte grafic funcția.

b) Dacă pentru orice număr natural k notăm cu m_k valoarea minimă a funcției $f(x)$, pe intervalul $[k, k+1]$, să se calculeze: $\lim_{n\to\infty} S_n$,

unde $$S_n = \sum_{k=1}^{2n} 2^{m_k} - n.$$

c) Să se studieze convergența șirului $a_n = \frac{1}{\lambda^n}\int_{-n}^{n} f(x)\,dx$,

unde $\lambda \neq 0$.

43. Fie funcția: $f(x) = \frac{ax^2}{x^2 + bx + c}$.

a) Să se determine această funcție astfel încît graficul să aibă asimptote: $y = 1$, $x = 1$, $x = 2$.

b) Să se studieze variația funcției și să se construiască curba reprezentativă (C).

c) Fie (Γ) curba de ecuație: $y = k(x+1)(x+2)$, k fiind o constantă:

— Să se formeze ecuația absciselor punctelor de intersecție ale curbelor (C) și (Γ).

— Să se discute această ecuație.

d) Despre curbele (C) și (Γ):

— Să se arate că (C) și (Γ) pot fi tangente pentru o valoare a lui k diferită de 0.

— Să se construiască (Γ) în această ipoteză.

— Se cere ecuația tangentei comune în fiecare din punctele de contact.

e) Fie $k = -1$; să se calculeze aria cuprinsă între axa Ox și curba (Γ).

44. Se consideră funcția: $f(x) = x^2 + 5x + 6$.

a) Să se arate că pentru orice x natural, expresia:

$$j(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 6}{f(x)}$$

nu este un număr natural.

b) Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{95n}{6} - \sum_{k=1}^{n}\left|f\left(1+\frac{k}{n}\right)\right|\right].$$

c) Să se studieze derivabilitatea funcției:

$$g(x) = \begin{cases} f^2(x) & \text{pentru } x < -2 \\ \ln^2(1+f(x)) & \text{pentru } x \geqslant -2. \end{cases}$$

d) Să se calculeze pentru $x > -2$ derivata de ordinul n a funcției $\ln f(x)$.

e) Să se studieze și să se reprezinte grafic funcția $g(x)$.

45. Se dă polinomul $P(x) = x^2(x-1)(x-m)$, unde m este un număr real.

a) Să se calculeze integrala:

$$y(m) = \int_0^1 |P(x)|\,dx.$$

b) Să se arate că funcția $y(m)$ are un minim absolut egal cu un număr pozitiv n.

c) Să se arate că există o valoare și una singură m_0 a lui m, astfel încît $y(m_0) = n$.

d) Să se calculeze m_0 cu două zecimale exacte.

46. Fie funcția: $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{2x^2 - 2x + a}$, unde a este un parametru real.

a) Formați două clase de valori ale parametrului a, după forma ramurilor infinite ale graficului funcției.

b) Determinați valorile lui x pentru care funcția prezintă un maxim și un minim relativ.

c) Trasați curbele particulare care corespund respectiv: pentru $a = 0$; $a = 2$; $a =$ limita între cele două clase.

d) Pentru ce valoare a lui a, fracția $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{2x^2 - 2x + a}$ este ireductibilă? Trasați curba particulară care corespunde valorii lui a.

47. Se consideră funcția:

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x - \ln(x+1).$$

i) Să se determine condițiile pe care trebuie să le satisfacă parametrii reali α și β pentru ca funcția să admită două extreme.

ii) Luînd $\alpha = -1$ și $\beta = 1$, să se traseze graficul funcției $f(x)$.

iii) Să se calculeze aria porțiunii din plan cuprinsă între graficul funcției, axa Ox și dreapta de ecuație $x = -\dfrac{1}{2}$.

(Academia militară)

48. Se consideră $f(x) = e^x - 1 - x$.

i) Să se arate că $f(0) = f'(0) = 0$, iar $f''(x) > 0$, de unde se va deduce că $f'(x) > 0$, $f(x) > 0$, pentru $x > 0$.

ii) Luînd $g(x) = e^x - \left(1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}\right)$, să se arate că: $g(0) = g'(0) = \ldots = g^{(n)}(0)$, iar $g^{(n+1)}(x) > 0$, de unde se va deduce:

$$e^x > 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}, \text{ pentru } x > 0,$$

iar n este un număr oarecare natural; în particular:

$$e > 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}, \text{ oricare ar fi } n \text{ natural.}$$

iii) Să se arate, aplicînd binomul lui Newton, că:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}, \quad n \geqslant 2,$$

de unde să se deducă: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}\right) = e$.

iv) Notînd: $a_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$, să se scrie în funcție de a_n suma: $\dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+2)!} + \ldots + \dfrac{1}{(2n)!}$ și să se determine limita ei, cînd $n \to \infty$?

v) Să se studieze și să se reprezinte grafic funcția $f(x)$.

vi) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției $f(x)$ și delimitat de planele ce trec prin $x = 1$ și $x = 2$ și sînt perpendiculare pe axa Ox.

(Institutul Politehnic)

49. Se consideră sistemul liniar:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 + my_2 + y_3 = e^x \\ y_1 + y_2 + 2y_3 = e^{2x}, \end{cases}$$

unde m și x sînt parametri reali.

i) Să se determine valorile reale ale parametrului m pentru care sistemul admite soluția unică: $y_1(x, m)$, $y_2(x, m)$, $y_3(x, m)$ și pentru aceste valori să se rezolve sistemul.

ii) Să se discute natura rădăcinilor ecuației: $y_1(x, m) = 0$, $m \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; pentru $y_1(x, -1) = 0$ și pentru $m = 1$ să se traseze graficul funcției $f(x) = y_1(x, 1)$.

iii) Să se calculeze valoarea ariei domeniului mărginit de graficul funcției f, axa Ox, $x = -1$, $x = 0$, apoi volumul corpului obținut prin rotirea acestui domeniu în jurul axei absciselor.

(Institutul Politehnic)

50. Se consideră funcția $f(x) = 2x^3 - 9mx^2 + 12m^2x - 1\,080$, unde m este un parametru real.

i) Să se studieze, folosind șirul lui Rolle, natura rădăcinilor ecuației $f(x) = 0$, cînd parametrul m este variabil, precizîndu-se intervalul în care se află rădăcinile reale.

ii) Să se determine parametrul m, astfel încît $f'(x) = 0$ să admită o singură rădăcină reală cuprinsă în intervalul $(1, 2)$.

iii) Să se traseze graficul funcției.

iv) Să se calculeze volumul corpului generat de rotirea graficului funcției în jurul axei Ox și delimitat de dreptele $x = 0$, $x = 1$.

(Institutul Politehnic)

51. Se consideră funcția

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 1 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

i) Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției.

ii) Să se arate existența limitei funcției $f(x)$ în $x = 0$, folosind derivabilitatea funcției

$$g(x) = e^x, \text{ în punctul } x = 0.$$

iii) Să se traseze graficul funcției $f(x)$.

(Institutul Politehnic)

52. Se consideră funcția

$$f(x) = \frac{mx - 2}{x^2 - nx + 1}, \text{ unde } m, n \in \mathbf{R}.$$

i) Să se determine valorile parametrilor m, n, astfel încît $x = 0$ și $x = 2$ să fie puncte de extrem relativ și să se precizeze natura acestor extreme.

ii) Considerînd funcția $g(x) = |f(x)|$, să i se cerceteze continuitatea și derivabilitatea.

iii) Să se traseze graficul funcției $g(x)$.

iv) Să se calculeze volumul generat de rotirea graficului funcției $g(x)$ în jurul axei Ox și mărginit de dreptele $x = -5$, $x = 6$.

(Institutul Politehnic)

53. Se dă funcția: $f(x) = \dfrac{1}{3 - |x^2 - 1|}$.

i) Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției.

ii) Să se traseze graficul funcției.

iii) Să se discute numărul de rădăcini ale ecuației:

$$f(x) = \lambda, \text{ unde } \lambda \in \mathbf{R}.$$

iv) Să se calculeze aria domeniului limitat de curba $f(x)$, axa Ox și dreptele $x = 0$ și $x = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

(Institutul Politehnic)

54. Se consideră funcția:

$$f(x) = |x - 1|^{1-a} \cdot |x + 1|^{1+a}.$$

i) Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției pentru $a \in (0, 1)$.

ii) Să se traseze graficul funcției pentru $a = \dfrac{1}{2}$.

iii) Să se calculeze volumul corpului generat de rotirea graficului în jurul axei Ox pentru $x \in [0, 2]$.

(Institutul Politehnic)

55. Se consideră funcția $f(x) = x\sqrt{\sin x}$.

i Să se determine punctele de intersecție ale graficului cu prima bisectoare și să se arate că în aceste puncte prima bisectoare a axelor este tangentă la graficul funcției, cu excepția unui punct care se va preciza.

ii) Să se arate că graficul rămîne de aceeași parte față de prima bisectoare.

iii) Să se traseze graficul funcției f pe intervalul $[0, 4\pi]$.

iv) Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafața care rezultă prin rotirea graficului pe intervalul $[0, \pi]$ în jurul axei Ox.

56. Se consideră funcția

$$f(x) = x^{2n} - 2x^n,$$

unde n este un număr natural.

i) Să se studieze semnul funcției $f(x)$ după diferitele valori ale lui n.

ii) Să se calculeze α astfel ca:

$$\lim_{x \to 1} \frac{|f(x) - \alpha|}{(x-1)^2}$$

să existe și să fie finită; să se calculeze în acest caz valoarea acestei limite.

iii) Să se reprezinte grafic funcția $f(x)$ pentru $n = 3$.

iv) Să se calculeze aria domeniului generat de graficul funcției și dreapta care trece prin punctele de inflexiune ale graficului.

(Institutul Politehnic)

57. Se consideră funcția

$$f(x) = \frac{x^2 + 2px + q}{x - a},$$

unde a, p, q sînt parametri reali.

i) Să se arate că dacă graficul funcției f nu intersectează axa Ox, atunci f admite un maxim și un minim, oricare ar fi valoarea lui a.

ii) Pentru $q = 5$, să se determine valorile lui a și p, astfel ca f să admită extreme în punctele $x = -1$ și $x = 3$ apoi să se traseze graficul funcției.

iii) Pentru $a = 1$, $p = -1$, $q = 5$, să se determine aria porțiunii din planul xOy, mărginită de graficul funcției f și dreapta de ecuație $y = 5$.

(Institutul Politehnic)

58. Se consideră funcția:

$$f(x) = \frac{x^3}{3 - ax^2}.$$

i) Pentru $a = 1$ să se rezolve ecuația:

$$2f(1)\sin^2 x + \frac{1}{2}f'(1)\sin^2 2x = \frac{2}{15}f''(1)\sin^2 3x.$$

ii) Fie matricile:

$$B = \begin{pmatrix} 3\sqrt{\log x} & 0 & 1 \\ 2\log\frac{1}{x} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A = B \cdot C.$$

Se notează cu $\det A$ determinantul matricei A.
Fie b cea mai mică rădăcină a ecuației:

$$\det A = 0.$$

iii) Să se calculeze pentru $a = -1$

$$I = \int_{b-10}^{\frac{b}{10}} \frac{f(x)}{x}\,dx.$$

iv) Să se calculeze derivata matricei B, aplicînd definiția funcțiilor derivabile.

v) Să se calculeze derivata determinantului asociat matricei A, aplicînd definiția (fără a calcula în prealabil valoarea determinantului).

(Academia militară)

59. Se consideră funcția:

$$f(x) = \frac{x^2(x+9)}{x+1}.$$

i) Să se reprezinte grafic funcția.

ii) Să se calculeze limita:

$$L = \lim_{m \to 0} \frac{\int_0^m f(x)\,dx}{m^3}.$$

iii) Să se calculeze aria generată de graficul funcției, axa Ox și dreptele $x = 2$, $x = 3$. Analog pentru dreptele $x = -5$, $x = 5$; este posibil?.

(Institutul de construcții)

60. Se consideră funcția

$$f(x) = \frac{(ax + b)(x + 2)^2}{x^2}, \quad a, b \in \mathbf{N}$$

i) Să se determine a și b, astfel încît graficul ei să admită ca asimptotă dreapta de ecuație $y = x + 10$.

ii) Pentru $a = 1$, $b = 6$, să se reprezinte grafic funcția.

iii) Să se calculeze aria cuprinsă între grafic, axa Ox și dreptele de ecuație $x = -6$, $x = -2$.

(Institutul de construcții)

61. Se dă funcția $f(x) = \dfrac{x^2 + px - 1}{x + 1}$.

i) Să se determine valorile parametrului real p astfel ca funcția să admită asimptota: $y = x + 1$ și să se reprezinte grafic funcția cu p astfel obținut.

ii) Să se determine p astfel ca funcția să admită două puncte de extrem.

iii) Pentru ce valoare a lui p există $\lim_{x \to -1} f(x)$.

iv) Să se calculeze aria cuprinsă între graficul funcției, asimptota oblică și dreptele de ecuații $x = 2$ și $x = 3$.

(Institutul Politehnic)

62. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \sqrt{x + 5 - 4\sqrt{x + 1}} + \sqrt{x + 10 - 6\sqrt{x + 1}}$$

și să se calculeze aria cuprinsă între abscisă și dreptele de ecuație $x = 1$, $x = 10$.

(Facultatea de matematică)

63. Se consideră funcția:

$$f(x) = |x| \cdot e^{\frac{1}{|x-2|}}$$

a) Să se studieze și să se reprezinte grafic funcția.

b) Să se determine numărul de rădăcini reale ale ecuației $f(x) = \lambda$.

c) Să se calculeze aria cuprinsă între graficul funcției, asimptota oblică $y = x + 1$ și dreptele de ecuație $x = 3$ și $x = 4$.

(Institutul Politehnic)

64. Se consideră funcția:

$$f(x) = \arccos x + \arccos(1 - x) - \arccos(-x).$$

i) Să se studieze și să se traseze graficul funcției.

ii) Să se scrie ecuațiile tangentelor la grafic în punctul de abscisă $x = 1$ și în punctul de intersecție cu axa Ox.

iii) Să se calculeze aria cuprinsă între graficul funcției, axa Ox și dreapta de ecuație $x = 1$.

(Facultatea de matematică)

65. Se consideră funcția $f(x) = \arcsin \dfrac{4x(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$.

i) Să se reprezinte grafic funcția $f(x)$.

ii) Să se reprezinte grafic funcția $F(x) = f'(x)$.

(A.S.E.)

66. Se consideră funcția: $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}} - \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} x$.

i) Să se reprezinte grafic funcția $f(x)$.

ii) Să se reprezinte grafic funcția $F(x) = f'(x)$.

iii) Să se calculeze aria cuprinsă între graficul funcției $y = f'(x)$, axa Ox și dreptele de ecuație $x = 2$ și $x = 3$.

(A.S.E.)

67. Se consideră polinoamele

$$P(x) = x^3 + ax^2 - x + b.$$

$$Q(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + mx + n, \text{ unde}$$

a, b, m, n sînt parametri reali. Se cere:

i) Să se determine a, b, m, n, astfel încît $P(x)$ și $Q(x)$ să aibă $x = -1$ rădăcină dublă.

ii) Să se simplifice fracția $P(x)/Q(x)$.

iii) Dacă $R(x)$ este forma fracției simplificate, să se studieze și să se reprezinte grafic funcția $f(x) = R(x)$ pe tot domeniul de definiție.

iv) Să se arate că există în general patru, două, sau nici un punct pe graficul obținut, astfel încît tangentele în aceste puncte la grafic să fie paralele cu o direcție dată.

(Institutul Politehnic)

68. Fie ecuația:

$$(E)\ x^3 - a(b^4 + b^2 + 1)x^2 + a^2b^2(b^4 + b^2 + 1)x - a^3b^6 = 0.$$

i) Să se determine o relație independentă de a și b între rădăcinile ecuației.

ii) Să se rezolve ecuația (E) știind că rădăcinile sale sînt în progresie geometrică.

iii) Fie y cea mai mare rație obținută la punctul ii) pentru cazul $a \neq 0$ și $|b| > 1$.

Fie S_n suma primilor n termeni ai progresiei geometrice care are primul termen egal cu a și rația y.

Să se stabilească dacă șirurile:

$$\left(\frac{S_n}{b^n}\right)_{n\in\mathbf{N}} \text{ și } \left(\frac{S_n}{b^{2n+1}+1}\right)_{n\in\mathbf{N}} \text{ au limite.}$$

iv) Fie $g(x)$ primul membru al ecuației (E), pentru $b = 1$. Fie funcția:

$$f(x) = \frac{g(x)}{x^2 + 1}.$$

a) Să se determine condiția ca funcția f să admită exact două puncte de extrem.

b) Să se reprezinte grafic funcția f pentru $a = 2$.

c) Să se determine aria suprafeței delimitată de graficul funcției de la punctul b), axa Ox și dreptele de ecuații $x = 2$ și $x = 3$.

(Academia militară)

69. Se dă polinomul $f(x) = x^3 - 3x^2 + a$, unde a este un parametru real.

i) Să se studieze natura rădăcinilor polinomului dat.

ii) Să se reprezinte grafic funcția:

$$g(x) = \sqrt[3]{f(x)}, \text{ pentru } a = 4.$$

iii) Să se calculeze aria suprafeței generate d funcției $y = g(x)$ axa Ox și delimitat de dreptel $x = 4$.

(Fac. de geologie,

70. Se consideră funcția:

$$f(x) = \frac{x - 2}{|x^2 - 9| - |x^2 - 1|}.$$

i) Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției.

ii) Să se discute după valorile parametrului real p numărul de rădăcini reale ale ecuației:

$$\frac{x - 2}{|x^2 - 9| - |x^2 - 1|} - p = 0.$$

iii) Să se calculeze volumul corpului generat de rotirea graficului în jurul axei Ox și mărginit de dreptele de ecuație $x = 3$ și $x = 4$.

(Institutul Politehnic)

71. Fiind dat sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} x + y + z + u = 2 \\ mx - y - z + u = 6 \\ x + my + z - u = -4 \\ x + y + mz - u = -2, \end{cases} \qquad m \in \mathbf{R},$$

se cere:

i) Să se discute sistemul după valorile parametrului m.

ii) Să se rezolve sistemul pentru $m = 3$.

iii) Presupunînd că x_1, x_2, x_3, x_4 sînt soluțiile sistemului scrise în mod crescător, pentru $m = 3$, să se reprezinte grafic funcția:

$$f(x) = \ln\left|\frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x - x_2)(x - x_4)}\right|.$$

iv) Să se calculeze integrala:

$$I = \int_{x_3}^{x_4} \frac{x - x_1}{x - x_2}\,dx.$$

(Institutul Politehnic)

72. Se dau funcțiile:

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ și } g(x) = \arcsin x.$$

i) Să se reprezinte grafic funcțiile.

ii) Să se arate că funcțiile diferă printr-o constantă și să se determine această constantă.

iii) Să se calculeze $A = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

(A.S.E.)

73. i) Să se reprezinte grafic funcția:

$$f(x) = \frac{x^3 - 6x + 2}{x^2}.$$

ii) Folosind graficul funcției, să se studieze natura rădăcinilor ecuației: $x^3 - \lambda x^2 - 6x + 2 = 0$, unde λ este un parametru real.

iii) Să se calculeze volumul și suprafața corpului de rotație, generat de rotirea graficului în jurul axei Ox și limitat de asimptota oblică și dreptele $x = 1$ și $x = 2$.

74. Se consideră funcția:

$$f(x) = \frac{\sin^2\left(\frac{3\pi}{8} - x\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}.$$

i) Să se arate că funcția $f(x)$ se poate scrie și sub forma:

$$f(x) = A \sin(\alpha + x),$$

unde A este o constantă și α un arc situat în cadranul unu.

ii) Să se arate că putem scrie: $\frac{f(x)}{f(-x)} = \operatorname{tg} mx + \sec mx$, unde m este un număr pozitiv.

iii) Să se studieze și să se reprezinte grafic funcțiile:

$$y = f(x) \text{ și } y = \frac{f(x)}{f(-x)}.$$

iv) Să se calculeze volumul generat de rotirea graficului funcției $y = f(x)$ în jurul axei Ox și mărginit de dreptele:

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ și } x = \frac{\pi}{2}.$$

75. Se dă ecuația:

$$2x^3 - (5m - 3)x^2 + (4m - 1)x - m = 0.$$

Determinînd $m(x)$ din ecuația dată, ca raport de polinoame: $m(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$; unde $Q(x)$ este de gradul doi, cu $Q(0) = 1$ și notînd:

$$f(x) = \frac{5}{2}\,\frac{P(x) + x(1 - x)}{Q(x) + 4(x + 1)},$$

i) Să se calculeze:

a) $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]^x$; b) $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

ii) Să se determine parametrul rațional m în așa fel, încît rădăcinile ecuației date să fie în progresie geometrică.

iii) Să se traseze graficul funcției $f(x)$.

iv) Să se determine volumul corpului generat de rotirea graficului în jurul axei Ox și limitat de dreptele: $x = 2$ și $x = 3$.

(Institutul de construcții)

76. Se consideră funcția:

$$f(x) = x^5 - 5x^4 \cos a + 5x^3 - b,$$

unde a și b sînt numere reale.

i) Presupunînd $a = 0$ și $b = 1$, să se traseze graficul funcției.

ii) Presupunînd: $a = 0$ și $b = 1$, se cere să se determine cu o eroare mai mică decît 0,01 rădăcina ecuației $f(x) = 0$, cuprinsă între 3 și 4.

iii) Să se determine ce valori trebuie să ia parametrul a pentru ca $f(x)$ să nu admită extreme.

iv) Presupunînd $a = 0$, să se determine b, astfel ca ecuația $f(x) = 0$ să admită o singură rădăcină reală.

(Facultatea de geologie, geografie)

77. Se consideră polinomul

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + m.$$

i) Să se studieze cu ajutorul șirului lui Rolle natura rădăcinilor ecuației $P(x) = 0$, cînd m parcurge dreapta reală.

ii) Să se studieze și să se reprezinte grafic funcția:

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1.$$

iii) Să se determine cu o aproximație de 0,01 rădăcina reală și pozitivă a ecuației $f(x) = 0$.

iv) Să se calculeze aria cuprinsă între curbă, axa Ox și dreptele de ecuație $x = 0$ și $x = 1$.

(Institutul de construcții)

78. Se consideră funcția:

$$f(x) = \frac{x^2 - a}{x + 1} e^x.$$

i) Să se reprezinte grafic funcția pentru $a = 5$.

ii) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$ pentru $a = 1$.

iii) Să se determine intervalul căruia îi aparține parametrul real a, în așa fel încît funcția $f(x)$ să admită un număr maxim de puncte de extrem.

iv) Să se reprezinte grafic familia de curbe $y = f(x)$ pentru $a \in \mathbf{N}$.

(Institutul de construcții)

79. Se consideră funcția: $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 2)$.

i) Să se arate că pentru $x > 0$, avem îndeplinită inegalitatea $f(x) < \frac{3x}{2} + \ln 2$.

ii) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{\ln n}$.

iii) Să se traseze graficul funcției $f(x)$.

iv) Să se calculeze integrala:

$$I = \int_a^b g(x)\,dx \text{ unde } g(x) = \frac{f'(x)}{2x + 3},$$

iar a și b sînt cea mai mică, respectiv cea mai mare rădăcină a ecuației:

$$\det M + x^2 - x = 0,$$

unde $M = A + B$,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{x-1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & x-1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{6}{x-1} \\ 0 & 1 & \frac{6}{x-1} \end{pmatrix}.$$

v) Să se calculeze derivata determinantului asociat matricei M (fără a calcula și prealabil valoare determinantului).

80. Să se reprezinte grafic funcția:

$$f(x) = \ln \frac{x^2 + |x| - 2}{x^2 - |x| - 6}$$

și să se determine volumul corpului obținut prin rotirea graficului în jurul axei Ox și delimitat de $x = 4$ și $x = 5$.

(Institutul Politehnic)

81. Se consideră funcția:

$f(x) = \frac{ax + a - 2}{x^2 + 1}$, unde a este un parametru real.

i) Să se determine a, astfel ca funcția să aibă un extrem egal cu unitatea.

ii) Să se traseze graficul funcției pentru valoarea lui a determinată la punctul i).

iii) Să se calculeze aria figurii formate de graficul funcției $f(x)$ și graficul $g(x) = x$.

(Institutul Politehnic)

82. Fie funcția: $f(x) = \begin{cases} x^2 + mx + n, & x \in [-1, 0] \\ \sqrt{px^2 + 4x + 4}, & x \in (0, 1], \end{cases}$

definită pe $[-1, 1]$, iar m, n, p parametri reali.

i) Să se determine parametrii m, n, p, astfel încît pentru funcția dată să poată fi aplicată teorema lui Rolle pe intervalul $[-1, 1]$.

ii) Să se determine valorile intermediare $C \in (-1, 1)$, date de teorema lui Rolle.

iii) Să se traseze graficul funcției pentru m, n, p determinați la punctul i).

iv) Să se calculeze suprafața delimitată de graficul funcției, axa Ox și dreptele $x = -1$, $x = 1$.

(Institutul Politehnic)

83. Se consideră funcția:

$$f(x) = \frac{x^2 + |x^2 + x - 2|}{x + |x - 1|}$$

i) Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției.

ii) Să se traseze graficul funcției.

iii) Să se studieze aplicabilitatea teoremei creșterilor finite pe intervalul [1, 2], și în caz afirmativ să se aplice această teoremă.

iv) Să se calculeze volumul generat de rotirea graficului în jurul axei Ox și mărginit de dreptele $x = -4$, $x = 4$.

(Institutul Politehnic)

84. Să se determine valoarea parametrului $a (a > 1)$, pentru care aria mărginită de curbele $y = ax$, $y = ax^2$, $y = 1$ este maximă.

(Institutul Politehnic)

85. Se consideră funcția $f(x) = \dfrac{x^2 + ax}{x + 1} \cdot e^{\frac{1}{x}}$, $a \in \mathbf{R}$.

i) Să se determine parametrul a, astfel încît funcția să admită un extrem în punctul $x = 1$.

ii) Să se traseze graficul funcției pentru valoarea parametrului a determinată la punctul precedent.

iii) Să se calculeze aria formată de graficul funcției, asimptota oblică și dreptele de ecuație $x = 1$ și $x = 2$.

(A.S.E.)

86. Se consideră funcția $f(x) = \ln (1 + 2 \sin x)$.

i) Să se traseze graficul funcției pe intervalul închis $[0, 2\pi]$.

ii) Să se determine punctele graficului în care coeficientul unghiular al tangentei este $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

iii) Să se traseze graficul funcției:
$F(x) = f'(x)$ și să se calculeze aria domeniului mărginit de acest grafic și de dreptele: $x = 0$, $y = 0$ și $x = \dfrac{\pi}{2}$.

(Facultatea de matematică)

87. Fie funcțiile:

i) $f_1 : [0, 3] \to \mathbf{R}$ definită prin: $f_1(x) = \dfrac{x - [x]}{2x - [x] + 1}$;

ii) $f_2 : [0, 3] \to \mathbf{R}$ definită prin: $f_2(x) = [x^2]x^2$;

iii) $f_3 : [0, 1] \to \mathbf{R}$ definită prin: $f_3(x) = [2^5 x] \cdot \ln (x + 1)$

iv) $f_4 : [0, 5] \to \mathbf{R}$ definită prin: $f_4(x) = \dfrac{x - [x]}{[x]x^2 + 1}$

v) $f_5 : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ definită prin: $f_5(x) = \sqrt[p]{x} - [\sqrt[p]{x}]$ pentru $p \in \mathbf{N}$.

a) Să se studieze variația și să se traseze graficul funcțiilor.

b) Să se verifice dacă funcțiile sînt integrabile și în caz afirmativ să se calculeze aria, pe domeniul de definiție considerat.

(unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x)

88. Într-un plan se consideră o dreaptă (D) și un triunghi echilateral ABC de latura a. Distanța de la vîrful A la dreapta (D) este b, cu $b > a$, iar unghiul dintre latura AB și perpendiculara pe dreapta (D) este notat cu x.

a) Să se determine măsura unghiului x pentru care volumul $V(x)$ al corpului obținut prin rotația triunghiului în jurul dreptei (D) să fie egal cu $\sqrt{3}\pi m a^2$.

b) Să se determine valoarea maximă a parametrului m.

c) Să se reprezinte grafic funcția $f(x) = \dfrac{V(x)}{V'(x)}$ pentru $a = \sqrt{6}$ și $b = 2$.

d) Să se calculeze $A = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$.

REZOLVĂRI ȘI RĂSPUNSURI

1. a) Coeficientul unghiular al dreptei AM este:

$$m = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{\dfrac{t}{1 + t^2} - 2}{\dfrac{1}{1 + t^2} - 1} = \frac{2t^2 - t + 2}{t^2}.$$

b) Fie $m(t) = \dfrac{2t^2 - t + 2}{t^2}$.

i) Domeniul de definiție: $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

ii) Funcția este fără paritate, deci graficul funcției nu are proprietăți de simetrie.

iii) Intersecția cu axele: $m = 0 \Rightarrow t_{1,2} \in \mathbf{C}$; $t = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ imposibil.

iv) Asimptote: $t = 0$ (verticală), $m = 2$ (orizontală).

v) Studiul primei derivate:

$$m'(t) = \frac{t-4}{t^3}; \quad m'(t) = 0 \Rightarrow t = 4$$

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} m'(t) = +\infty; \quad \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} m'(t) = -\infty,$$

deci în $t = 0$ graficul admite un punct de întoarcere.

vi) Tabloul de variație:

t	$-\infty$		0		4		6		$+\infty$
$m'(t)$	$+$		$\nexists$	$-$	0	$+$	0	$+$	
$m(t)$	2	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{15}{8}$	$\nearrow$	$\frac{17}{9}$	$\nearrow$	2
$m''(t)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$

Vezi graficul XII.1.

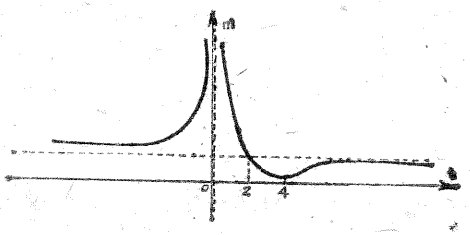


Fig. XII.1

c) Fie coordonatele lui $C(\alpha, 0)$. Atunci norma euclidiană este:

$$MC = \sqrt{\left(\alpha - \frac{1}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{t}{1+t^2}\right)^2}$$

$$MC^2 = \frac{\alpha^2 t^4 + (2\alpha^2 - 2\alpha + 1)t + (\alpha - 1)^2}{t^4 + 2t^2 + 1}.$$

Pentru ca membrul doi să fie o expresie independentă de t, trebuie ca coeficienții termenilor de același grad să fie proporționali, deci:

$$\frac{\alpha^2}{1} = \frac{2\alpha^2 - 2\alpha + 1}{2} = \frac{(\alpha - 1)^2}{1} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow C\left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

2. a) $$f(x) = \frac{(\sin 3x + \sin 5x) + (\sin 5x + \sin 7x)}{\sin 3x + \sin 5x} =$$

$$= \frac{2 \sin 4x \cos x + 2 \sin 6x \cos x}{2 \sin 4x \cos x} =$$

$$= \frac{2 \cos x (\sin 4x + \cos 6x)}{4 \sin 2x \cos 2x \cos x} =$$

$$= \frac{4 \cos^2 x \cdot \sin 5x}{8 \cos^2 x \sin x (2 \cos^2 x - 1)}.$$

Dezvoltînd: $\sin 5x = 5 \sin x - 20 \sin^3 x + 16 \sin^5 x$, obținem:

$$f(x) = \frac{16 \cos^4 x - 12 \cos^2 x + 1}{4 \cos^2 x - 2}.$$

Înlocuind: $t = 4 \cos^2 x$, obținem:

$$f(t) = \frac{t^2 - 3t + 1}{t - 2}.$$

b) i) Domeniul de definiție: $t \in [0, 4] \setminus \{2\}$.

ii) Funcție fără paritate.

iii) Intersecția cu axele: $t = 0 \Rightarrow f(0) = -\frac{1}{2}$;

$$f(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

iv) Asimptote: $t = 2$ (verticală), $y = t - 3$ (oblică).

v) Studiul primei derivate:

$$f'(t) = \frac{t^2 - 4t + 5}{(t-2)^2} > 0.$$

vi) Studiul derivatei a doua:

$$f''(t) = -\frac{2}{(t-2)^3}.$$

vii) Tabloul de variație:

t	0		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		2		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		4
$f'(t)$		$+$	$+$	$+$		$+$	$+$	$+$	
$f(t)$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$ $\frac{5}{2}$
$f''(t)$	$+$	$+$	$+$	$+$		$-$	$-$	$-$	$-$

Vezi graficul XII.2.

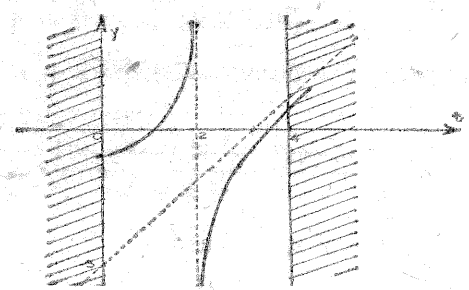


Fig. XII.2.

c) $$I = \int \left(4\cos^2 x - 1 - \frac{1}{4\cos^2 x - 2}\right) dx =$$

$$= \int \left(4 \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} - 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 x}\right) dx =$$

$$= 2\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) - x + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x - 1} \cdot (\operatorname{tg} x)' \, dx =$$

$$= x + \sin 2x + \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x - 1} - \frac{1}{\operatorname{tg} x + 1}\right) \cdot (\operatorname{tg} x)' \, dx =$$

$$= x + \sin 2x + \frac{1}{4} \ln \left|\frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1}\right| + C.$$

3. a) Trasarea graficului funcției $f_2(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

ii) Asimptote: $x = -1$ (verticală), $y = 1$ (orizontală).

iii) Studiul primei derivate:

$$f_2(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0.$$

iv) Tabloul de variație:

x	$-\infty$			-1			$+\infty$
$f_2(x)$		$+$	$+$		$+$	$+$	
$f_2(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	1	

v) Reprezentăm pe un același sistem cartezian graficele celor două funcții: (vezi graficul XII.3).

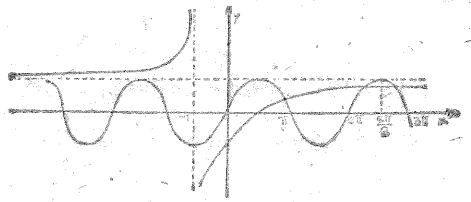


Fig. XII.3

Deci rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ sînt abscisele punctelor de intersecție ale celor două grafice, deci:

$$x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad x_1 \in \left(2\pi, 2\pi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\ldots, x_k \in \left[2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right], \; x'_k \in \left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, \; 2k\pi + \pi\right],$$

$$k \in \mathbf{Z}.$$

b) Pentru a restrînge intervalul lui x_0 la $\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$, este suficient să verificăm o consecință a proprietății lui Darboux, adică:

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) \cdot f(\pi) < 0.$$

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) \cdot f(\pi) = \frac{18 - 5\pi}{10\pi + 12} \cdot \frac{1-\pi}{\pi+1} = (>0)(<0) < 0.$$

c) Fie x_1, x_1' rădăcinile ecuației $f(x) = 0$, situate în intervalele $\left[2\pi,\ 2\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ și $\left[2\pi + \frac{\pi}{2},\ 3\pi\right]$. Pentru $[x_1, x_1'] \subset [2\pi, 3\pi]$, $f(x)$ îndeplinește condițiile teoremei lui Rolle, deci există cel puțin un punct c în care $f'(c) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = \cos x - \frac{2}{(x+1)^2}$, iar $f'(c) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\cos c - \frac{1}{(c+1)^2} = 0$.

Conform teoremei lui Rolle, această ecuație admite o rădăcină reală în intervalul $[2\pi, 3\pi]$.

4. i) Pentru $p = 3$, $q = 1 \Rightarrow f(x) = x^4 - Ax^3 + A$, $x \in \mathbf{R}$.

$$f'(x) = 4x^3 - 3Ax^2 = x^2(4x - 3A).$$
$$f''(x) = 12x^2 - 6Ax = 6x(2x - A).$$
$$f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{A}{2}.$$

Pentru ca tangenta la grafic în $x_2 = \frac{A}{2}$ să facă cu Ox unghiul de 135°, trebuie ca:

$$f'(x_2) = -1 \Rightarrow \frac{1}{2}A^3 - \frac{3}{4}A^3 = -1 \Rightarrow A = \sqrt[3]{4}.$$

ii) Pentru $p = 3$, $q = 1$, $A = 2$, $f(x)$ este:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$f(x) = 0$; $x^4 - 2x^3 + 2 = 0$. Cercetăm cu ajutorul teoremei lui Rolle dacă ecuația admite rădăcini reale:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2.$$
$$f''(x) = 12x^2 - 12x.$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0, \quad x_3 = \frac{3}{2}.$$

$f(-\infty)$	$f(0)$	$f\left(\frac{3}{2}\right)$	$f(+\infty)$
+	+	+	+

Graficul funcției nu intersectează axa Ox.

Tabloul de variație:

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$		$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$	1	$\searrow$	$\frac{5}{16}$	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	

Vezi graficul XII.4.

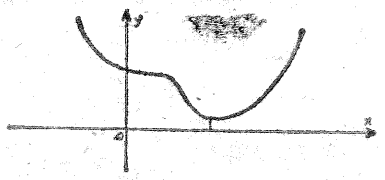


Fig. XII.4

iii) Aplicăm teorema lui Rolle funcției: $f(x) = x^{p+q} - Ax^p + A = 0$; $f'(x) = (p+q)x^{p+q-1} - Apx^{p-1} = 0$,

deci $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ (dacă $p > 1$)

și $x_2 = \sqrt[p]{\frac{Ap}{p+q}}$, deoarece q este impar și $A > 0$.

Formăm șirul lui Rolle:

$f(-\infty)$	$f(0)$	$f(x_2)$	$f(+\infty)$
+	+	C	+

unde $C = \left(\frac{Ap}{p+q}\right)^{\frac{p+q}{q}} - A\left(\frac{Ap}{p+q}\right)^{\frac{p}{q}} + A$,

iar ecuația admite două rădăcini reale, dacă $C < 0$.

$$C = A \cdot \left\{ A^{\frac{p}{q}} \left[\left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{p+q}{q}} - \left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{p}{q}} \right] + 1 \right\} < 0 \Rightarrow$$

$$A > \frac{(p+q)^{\frac{p+q}{q}}}{p \cdot q^{\frac{p}{q}}} = \sqrt[p]{\frac{(p+q)^{p+q}}{p^p \cdot q^q}}.$$

5. $1+\sin x = 1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2$

$1-\sin x = 1-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2$, deci

$$f(x) = \ln\left|\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}\right|.$$

i) Funcția este periodică, de perioadă 2π, deoarece

$$f(x) = f(x+T) \Rightarrow T = 2\pi.$$

ii) Domeniul de definiție: $\begin{cases} \sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2} \neq 0 \\ \sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_k \neq \frac{3\pi}{2}+2k\pi \\ x_k \neq \frac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases}, \ k \in \mathbf{Z}.$$

Domeniul de definiție îl vom restrînge la intervalul de perioadă, deci $x \in [0, 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

iii) Asimptote:

$x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, verticale.

iv) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \frac{2}{\cos x} \neq 0.$$

$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} f'(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x>\frac{\pi}{2}}} f'(x) = -\infty$, deci

graficul admite un punct de întoarcere,

$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{3\pi}{2}\\ x<\frac{3\pi}{2}}} f'(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{3\pi}{2}\\ x>\frac{3\pi}{2}}} f'(x) = +\infty$, deci

graficul admite un punct de întoarcere.

v) Studiul derivatei a doua:

$$f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^2 x}; \quad f''(x) = 0 \Rightarrow x \in \{0, \pi, 2\pi\}.$$

vi) Tabloul de variație:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$	$+$	$+$		$-$	$-$	$-$		$+$	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$	$\searrow$ 0 $\searrow$		$-\infty$	$\nearrow$	0
$f''(x)$	0	$+$	$+$	$+$	$+$ 0	$-$ $-$		$-$	$-$ 0

vii) Trasarea detaliului de grafic: (vezi graficul XII.5a).

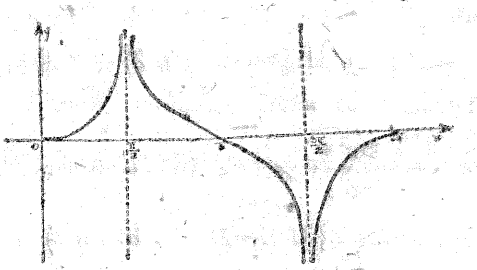


Fig. XII.5a

viii) Trasarea detaliului de grafic extins pe toată dreapta reală: (vezi graficul XII.5b).

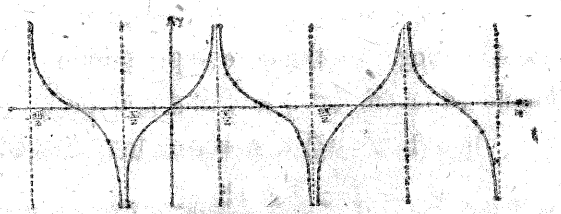


Fig. XII.5b

b) Domeniul de definiție:

$$\begin{cases} \dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} > 0 \\ \ln \dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left[2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right] \cup \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \pi+2k\pi\right].$$

c) Folosim substituția:

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x} = a \geqslant 1.$$

Ecuația inițială se poate scrie:

$$\frac{1}{2}\ln a = \sqrt{\ln a} \Rightarrow \ln^2 a - 4\ln a = 0 \Rightarrow$$

$$\ln a = 4 \text{ sau } \ln a = 0.$$

Pentru $\ln a = 4 \Rightarrow a = e^4$, deci

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x} = e^4 \Rightarrow \sin x = \frac{e^4-1}{e^4+1} = \frac{e^2-e^{-2}}{e^2+e^{-2}} = \text{th } 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \{(-1)^k \arcsin(\text{th } 2) + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

Pentru $\ln a = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow$

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x} = 1 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x_k = k\pi,$$

deci $x \in \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \{(-1)^k \arcsin(\text{th } 2) + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

d) Din punctul precedent rezultă că:

$$\ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x} > 0 \Rightarrow \frac{1+\sin x}{1-\sin x} > 1$$

deoarece baza logaritmului este supraunitară.

Trebuie să avem $\ln^2 a - 4\ln a < 0$ deci,

$$\ln a(\ln a - 4) < 0 \Rightarrow 0 < \ln a < 4 \Rightarrow$$

$$0 < \frac{1+\sin x}{1-\sin x} < e^4.$$

$$\begin{cases} \dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} > 0 \\ \dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} < e^4 \end{cases} \Rightarrow \sin x < \frac{e^4-1}{e^4+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left(2k\pi,\ \arcsin\frac{e^4-1}{e^4+1} + 2k\pi\right) \cup$$

$$\cup \left(\pi - \arcsin\frac{e^4-1}{e^4+1} + 2k\pi,\ \pi + 2k\pi\right);\ k \in \mathbf{Z}.$$

6. a) $f(x) = \dfrac{\ln(9-x^2)}{(9-x^2)\ln(x^2-x-2)}$, unde în calcule s-a folosit formula $\log_a b = \dfrac{\log_x b}{\log_x a}$.

b) $$\begin{cases} 9-x^2 > 0 \\ x^2-x-2 > 0 \Rightarrow x \in [(-3,-1) \cup (2,3)] \\ x^2-x-2 \neq 1 \end{cases} \setminus \left\{\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}\right\}.$$

c) Cum pe domeniul de definiție $9-x^2 > 0 \Rightarrow f(x) > 0$, dacă $\ln(9-x^2) \cdot \ln(x^2-x-2) > 0$; $\ln(9-x^2) > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 9-x^2 > 1 \Rightarrow x \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$; $\ln(9-x^2) < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 9-x^2 < 1 \Rightarrow x \in (-3,-2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, 3)$; $\ln(x^2-x-2) > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2-x-3 > 0 \Rightarrow x \in \left(-3, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}, 3\right)$; $\ln(x^2-x-2) < 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, -1\right) \cup \left(2, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$.

x	-3	$-2\sqrt{2}$	$\frac{1-\sqrt{13}}{2}$	-1	2	$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$	$2\sqrt{2}$	3
$\ln(9-x^2)$	$-$	0 $+$	$+$		$+$	$+$	0 $-$	
$\ln(x^2-x-2)$	$+$	$+$	0 $-$		$-$	0 $+$	$+$	
semnul fracției	$-$	$+$	$-$		$-$	$+$	$-$	

Deci $f(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(-2\sqrt{2}, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}, 2\sqrt{2}\right)$.

d) $f'(x) = \dfrac{2x[\ln(9-x^2)-1]}{(9-x^2)^2 \ln(x^2-x-2)} -$

$$- \frac{(2x-1)\ln(9-x^2)}{(x^2-x-2)(9-x^2)\ln^2(x^2-x-2)}.$$

7. a) Explicitînd funcția obținem:

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)^2, & x \in (0, \infty) - \left\{\dfrac{1}{2}\right\} \\ \ln\dfrac{1}{4}, & x = 0 \\ \ln\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)^2, & x \in (-\infty, 0) - \left\{-\dfrac{1}{2}, -2\right\}. \end{cases}$$

Domeniul de definiție este:

$$x \in \mathbf{R} \setminus \left\{-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}.$$

Funcția este continuă pe domeniul de definiție, fiind formată dintr-o compunere de funcții elementare. În punctul $x = 0$, funcția este continuă deoarece:

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2 = \ln\frac{1}{4}; \quad \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)^2 = \ln\frac{1}{4}.$$

b) Funcția este derivabilă pe restricții, fiind funcții elementare, deci derivabilitatea o vom studia în $x = 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{10}{(2x-1)(x+2)}, & x \in (0, \infty) \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}, \\ 0, & x = 0, \\ \dfrac{6}{(2x+1)(x+2)}, & x \in (-\infty, 0) \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}, -2\right\}. \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{10}{(2x-1)(x+2)} = -5; \qquad \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{6}{(2x+1)(x+2)} = 3.$$

Deci f nu este derivabilă în origine, admițînd un punct unghiular. Domeniul de derivabilitate este:

$$x \in \mathbf{R} \setminus \left\{-2, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$$

c) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \infty$.

Graficul admite asimptote verticale:

$$x = -2, \quad x = -\frac{1}{2}, \quad x = \frac{1}{2} \text{ și}$$

$y = \ln 4$, asimptotă orizontală.

Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	$-$	$-$		$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	$\ln 4$	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln 4$

În punctul $\left(0, \ln\frac{1}{4}\right)$, graficul admite un punct de maxim.

În punctele: $x = -2$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, graficul admite puncte de întoarcere (vezi graficul XII.7).

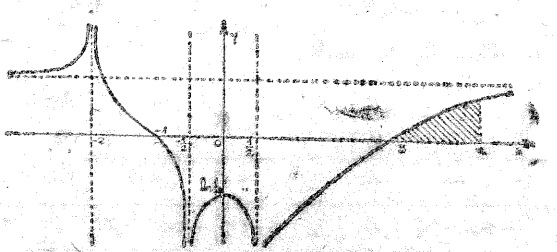


Fig. XII.7

d) $A = \int_3^4 \ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)^2 dx = 2\int_3^4 \ln(2x-1)dx -$

$$- 2\int_3^4 \ln(x+2)dx = (2x-1)\ln(2x-1) - 2x -$$

$$- [2(x+2)\ln(x+2) - 2x]\Big|_3^4 = 7\ln 7 - 5\ln 5 -$$

$$- 12\ln 6 + 10\ln 5.$$

8. i) Domeniul de definiție:

$$\begin{cases} 1 + \cos x \neq 0 \\ 1 - \cos x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x_k \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

ii) $f(x) = f(x+T) \Rightarrow T = 2\pi$, deci funcția este periodică, de perioada 2π. Conform domeniului de definiție stabilit pe toată axa reală, vom studia variația funcției pentru $x \in [0, 2\pi] \setminus \{0, \pi, 2\pi\}$.

iii) Asimptote: $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$, verticale.

iv) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \frac{-2\sin x}{1 - \cos^2 x}.$$

În punctul $x = \pi$, graficul admite un punct de întoarcere:

$$\lim_{\substack{x\to\pi \\ x<\pi}} f'(x) = -\infty; \quad \lim_{\substack{x\to\pi \\ x>\pi}} f'(x) = +\infty.$$

v) Studiul derivatei a doua:

$$f''(x) = \frac{2\cos x}{\sin^2 x}; \quad f''(x) = 0 \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

vi) Tabloul de variație:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$
$f''(x)$		$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$ $+$

vii) Trasarea unui detaliu al graficului: (vezi graficul XII.8 a).

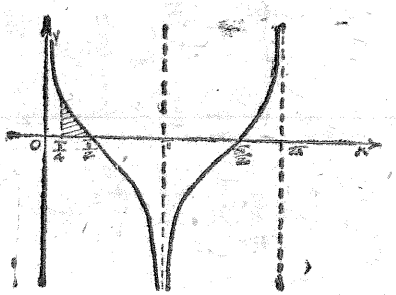


Fig. XII.8 a

viii) Trasarea graficului pe toată axa reală: (vezi graficul XII. 8b).

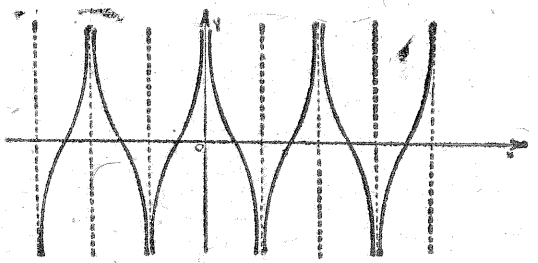


Fig. XII.8 b

Se observă că funcția este pară: $f(x) = f(-x)$, deci graficul este simetric față de ordonată.

b) Cum: $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| = \ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$,

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x}dx =$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x}(\cos x)'dx.$$

Efectuăm schimbarea de variabilă:

$$\cos x = u \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ u = 0 \end{cases}$$

$$I = -\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} \ln\frac{1+u}{1-u}\,du = -\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \ln(1-u)du + \int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \ln(1+u)du.$$

Integrînd prin părți, obținem:

$$I = \frac{\sqrt{2}+2}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+2}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{2}\ln\frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

9. a) $\begin{cases} x > 0 \\ \frac{2x^3-9x}{x^2-5} > x \\ \frac{2x^3-9x}{x^2-5} < 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{x^3-4x}{x^2-5} > 0 \\ \frac{x}{x^2-5} < 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (0, 2).$

b) i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R} \setminus \{\pm\sqrt{5}\}$.

ii) Funcția este impară, deoarece $f(x) = -f(-x)$, deci graficul este simetric față de originea axelor.

iii) Asimptote: $x = \pm\sqrt{5}$, verticale; $y = 2x$, oblică.

iv) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \frac{2x^4 - 21x^2 + 45}{(x^2-5)^2};\ f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{15}{2}}.$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

v) Tabloul de variație:

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{15}{2}}$	$-\sqrt{5}$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{\frac{15}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow M_1$	$\searrow -\infty$	$+\infty$	$\searrow$	m_2	$\nearrow$	M_2	$\searrow -\infty$	$+\infty$	$\searrow m_1$	$\nearrow +\infty$

$$M_1 = f\left(-\sqrt{\frac{15}{2}}\right) = -\frac{6}{5}\sqrt{\frac{15}{2}};$$

$$m_2 = f(-\sqrt{3}) = -\frac{3}{2}\sqrt{3};$$

$$m_1 = f\left(\sqrt{\frac{15}{2}}\right) = \frac{6}{5}\sqrt{\frac{15}{2}};\ M_2 = f(\sqrt{3}) = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

vi) Vezi graficul XII.9.

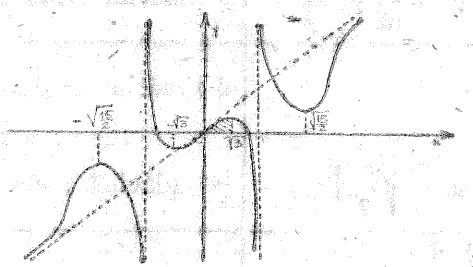


Fig. XII.9

c) $A = \int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{2x^3-9x}{x^2-5}\,dx = \int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{2x^3-10x+10x-9x}{x^2-5}\,dx =$

$$= \int_0^{\sqrt[3]{2}} \left(2x + \frac{x}{x^2-5}\right)dx = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\ln 10.$$

d) Pentru a discuta rădăcinile ecuației vom scrie:

$$\frac{2x^3-9x}{x^2-5} = \lambda.$$

Graficul funcției este intersectat de o dreaptă variabilă, de ecuație $y = \lambda$.

λ	Număr de rădăcini reale
$\lambda \in \left(-\infty, -\frac{6}{5}\sqrt{\frac{15}{2}}\right)$	3 rădăcini reale distincte
$\lambda = -\frac{6}{5}\sqrt{\frac{15}{2}}$	3 rădăcini reale, una dublă
$\lambda \in \left(-\frac{6}{5}\sqrt{\frac{15}{2}}, -\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$	o rădăcină reală pozitivă
$\lambda = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$	3 rădăcini reale, una dublă
$\lambda \in \left(-\frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$	3 rădăcini reale distincte
$\lambda = \frac{3}{2}\sqrt{3}$	3 rădăcini reale, una dublă
$\lambda \in \left(\frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{6}{5}\sqrt{\frac{15}{2}}\right)$	o rădăcină reală
$\lambda = \frac{6}{5}\sqrt{\frac{15}{2}}$	3 rădăcini reale, una dublă
$\lambda \in \left(\frac{6}{5}\sqrt{\frac{15}{2}}, \infty\right)$	3 rădăcini reale distincte

10. a) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(a-1)+1}{n(a+2)-1} \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{an}{1}\right)^{na}\right]^{\frac{1}{a}}$;

pentru ca u_n să existe, trebuie ca $a \neq 0$, $a \neq \frac{1}{n} - 2$.

Deci: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{na}\right)^{na}\right]^{\frac{1}{a}} = e^{\frac{1}{a}}$.

Pentru a doua limită:

dacă $a = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(a-1)+1}{n(a+2)-1} = 0$;

dacă $a = -2 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(a-1)+1}{n(a+2)-1} = +\infty$.

$a \neq -2$, $a \neq 1$, $a \neq \frac{1}{n} - 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(a-1)+1}{n(a+2)-1} = \frac{a-1}{a+2}$,

b) $f(a) = \frac{a-1}{a+2} \cdot e^{\frac{1}{a}}$.

i) Domeniul de definiție: $a \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 0\}$.

ii) Asimptote: $a = -2$ și $a = 0$ (verticale).
$y = 1$ (orizontală).

iii) Studiul primei derivate:

$$f'(a) = \frac{2a^2 - a + 2}{a^2(a+2)^2} \cdot e^{\frac{1}{a}} > 0.$$

iv) Tabloul de variație:

a	$-\infty$		-2			0		∞
$f'(a)$		$+$			$+$		$+$	
$f(a)$	1	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$-\infty$ $\nearrow$	1

v) Vezi graficul XII.10.

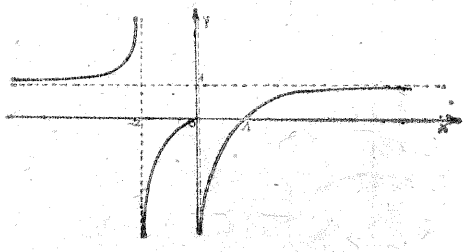


Fig. XII.10

Pe intervalul $(-2, 0)$ nu s-au scos punctele $a_n = -2 + \frac{1}{n}$, puncte în care funcția f nu este definită.

11. a) i) Domeniul de definiție: $x \in [0, \infty)$.
f este continuă în $x = 0$

ii) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = x^{\alpha-1}(\alpha \ln x + 1), \quad x > 0;$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0,$$

$$x = e^{-\frac{1}{\alpha}}, > 0; \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x) = 0.$$

iii) Studiul derivatei a doua:

$$f''(x) = x^{\alpha-2}[\alpha(\alpha - 1) \ln x + 2\alpha - 1];$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = e^{\frac{1-2\alpha}{\alpha(\alpha-1)}}.$$

iv) Tabloul de variație:

x	0		x_1		$e^{-\frac{1}{\alpha}}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$		$\searrow$	$-\frac{1}{\alpha e}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	$+$

v) Vezi graficul XII.11.

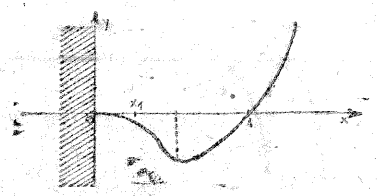


Fig. XII.11

Semitangenta în origine este independentă de α. Cum $f'(1) = 1$, tangenta la grafic în $x = 1$ este paralelă cu prima bisectoare.

Punctele $(0, 0)$, $(1, 0)$ sînt comune tuturor graficelor.

b) $$A = -\int_0^1 x^\alpha \ln x \, dx = \left(\frac{-1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} \cdot \ln x + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(\alpha + 1)^2} \cdot x^{\alpha+1} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{(\alpha + 1)^2},$$

unde integrala a fost calculată prin părți.

$$A_1 = \int_1^k x^\alpha \ln x \, dx = \frac{k^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \ln k - \frac{1}{(\alpha + 1)^2}(k^{\alpha+1} - 1).$$

Cum: $A = A_1 \Rightarrow \ln k = \frac{1}{\alpha + 1} \Rightarrow k = e^{\frac{1}{\alpha+1}}$.

c) $x \in (1, k)$, $x^\alpha \cdot \ln x > 0 \Rightarrow A_1 > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow k^{\alpha+1} \ln k^{\alpha+1} > k^{\alpha+1} - 1 \Rightarrow \ln k^{\alpha+1} > 1 - \frac{1}{k^{\alpha+1}},$$

$k > 1$, $\alpha > 1$; substituind $\alpha + 1 = p$,

$$\ln k^p > 1 - \frac{1}{k^p}.$$

d) Coordonatele punctului de extrem sînt:

$$x = e^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad y = \frac{-1}{\alpha e}.$$

Eliminînd parametrul α, între cele două coordonate, obținem:

$$-\frac{1}{\alpha} = \ln x, \quad -\frac{1}{\alpha} = ye \Rightarrow y = \frac{1}{e} \ln x, \; x \in \left(\frac{1}{e}, 1\right),$$

fiind partea graficului funcției $f(x) = \frac{1}{e} \ln x$, $x \in (0, \infty)$, descris de punctul de minim.

12. a) Domeniul de definiție:

$$x \in \mathbf{R} \setminus \{\pm\sqrt{b^2-1}\}, \quad |b| \geqslant 1.$$

$$f'(x) = \frac{-2(a-b)(x^2-2bx-1+b^2)}{(x^2+1-b^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = b \pm 1$$

$$y_1 = f(b-1) = \frac{1-a}{1-b}$$

$$y_2 = f(b+1) = \frac{1+a}{1+b}$$

Dacă: $y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow 1 - ab = 0$ și $b \neq \pm 1$.

b) Ecuația tangentei este:

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

unde

$$m = f'(0) = \frac{2(a-b)(1-b^2)}{(1-b^2)^2} = 1,$$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = f(0) = -1.$$

Pentru $b^2 < 1$, condiția devine: $\begin{cases} 2(a-b) = 1 - b^2 \\ 1 - ab = 0. \end{cases}$

Pentru $b^2 > 1$, condiția devine: $\begin{cases} 2(a-b) = b^2 - 1 \\ 1 - ab = 0. \end{cases}$

c) $a = 2$, $b = 3$, atunci $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 8}$.

i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R} \setminus \{\pm 2\sqrt{2}\}$.

ii) Asimptote: $x = \pm 2\sqrt{2}$ (verticale); $y = 1$ (orizontală).

iii) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 12x + 16}{(x^2-8)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = 4.$$

iv) Tabloul de variație:

x	$-\infty$		$-2\sqrt{2}$		$1-\sqrt{3}$		2		$1+\sqrt{3}$		$2\sqrt{2}$		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	1		

Vezi graficul XII.12.

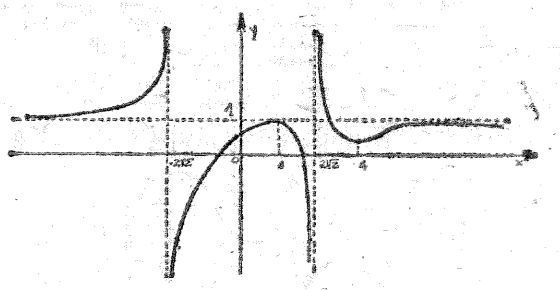


Fig. XII.12

13. i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

ii) Funcția nu este periodică. Totuși o vom reprezenta pe $(0, 2\pi)$, urmînd să construim graficul pe toată axa reală.

iii) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ x < \pi}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ x > \pi}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 2\pi \\ x < 2\pi}} f(x) = -\infty$.

iv) Intersecția cu axele carteziene:

$f(x) = 0 \Rightarrow 4x + \operatorname{ctg} x = 0$; ecuație de tip transcendent, ale cărei soluții se determină numai prin metodă grafică; $a(x) = 4x$; $b(x) = -\operatorname{ctg} x$.

v) Asimptote: $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$, verticale.

vi) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = 4 - \frac{1}{\sin^2 x}; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \sin x = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\};$$

$$x \in \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}.$$

vii) Studiul derivatei a doua:

$$f''(x) = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}\cdot\ f''(x) = 0 \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

viii) Tabloul de variație:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$
$f''(x)$	$+$		$+$	0	$-$	$-$		$+$		0	$-$			

ix) Trasarea graficului: (vezi graficul XII.13a).

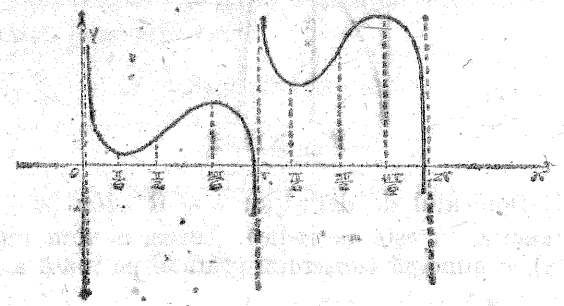


Fig. XII.13a

x) Graficul funcției extins pe toată axa reală este: (vezi graficul XII.13b).

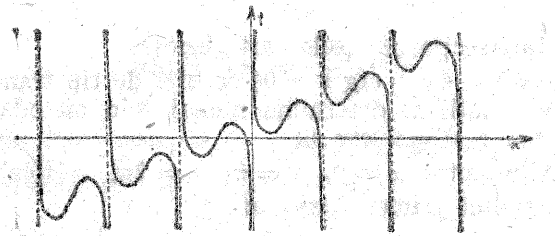


Fig. XII.13b

c) $A = (2x^2 + \ln|\sin x|)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi^2}{8} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$.

14. a) i) Domeniul de definiție:
Pentru $f: x \in \mathbf{R}\setminus(-1, 1)$
Pentru $g: x \in [1, \infty)$
ii) Studiul primei derivate:

Pentru f: $f'(x) = \frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pentru g: $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0$.

iii) Studiul derivatei a doua:

Pentru f: $f''(x) = \frac{2x^3-3x}{(x^2-1)^{3/2}}$; $f''(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{2}} > 1$.

iv) Tablourile de variație:

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+ + +$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	1		$+\infty$
$g'(x)$		$+ + +$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

v) Se observă că pe $(1, \infty)$, $f(x) > g(x)$, adică

$$x\sqrt{x^2-1} = x\sqrt{(x-1)(x+1)} > \sqrt{x-1},$$

deci graficul funcției f domină graficul funcției g (vezi graficul XII.14).

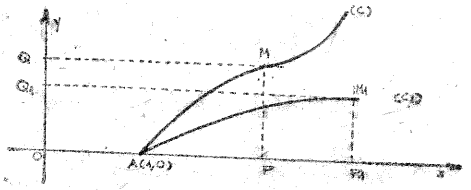


Fig. XII.14

b) Cum $M \in (C) \Rightarrow M(a, f(a))$, adică

$$M(a, a\sqrt{a^2-1}),\ \text{cu}\ a > 1.$$

Cum $M_1 \in (C_1) \Rightarrow M_1(\lambda, \sqrt{\lambda-1})$. Din condiție,

$$\text{Aria}\,[OPMQ] = \text{Aria}\,[OP_1M_1Q_1] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2\sqrt{a^2-1} = \lambda\sqrt{\lambda-1}$$

admite soluția $\lambda = a^2$. Arătăm că ecuația nu mai are altă soluție pentru $\lambda > 1$:

$$\lambda^2(\lambda - 1) = a^4(a^2 - 1);\ h(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - a^6 + a^4 = 0;$$

$$h'(\lambda) = 3\lambda^2 - 2\lambda;\ h'(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 0,\ \lambda = \frac{2}{3}.$$

Formăm șirul lui Rolle:

λ	$h(-\infty)$	$h(0)$	$h\left(\frac{2}{3}\right)$	$h(+\infty)$
	$-$	$-$	$-\frac{4}{27} + a^4 - a^6$	$+$

Pentru $a > 1$, $h(0) = -a^6 + a^4 < 0$, deci admite o singură rădăcină reală.

c) $f(1) = g(1) = 0$, $f(x) > g(x)$, pentru $x > 1$, deci graficele au un singur punct comun: $A(1, 0)$.

$$\text{Aria } [APM] = \int_1^a x\sqrt{x^2 - 1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^a \sqrt{x^2 - 1}\,d(x^2 - 1) = \frac{1}{3}(a^2 - 1)^{\frac{3}{2}}.$$

$$\text{Aria } [AP_1M_1] = \int_1^{a^2} \sqrt{x - 1}\,dx = \frac{2}{3}(a^2 - 1)^{\frac{3}{2}}, \text{ deci}$$

$$\text{Aria } [AP_1M_1] = 2 \cdot \text{Aria } [APM].$$

15. a) $f'(x) = \dfrac{ab^2 - ax^2}{(b^2 + x^2)^2}$

$$f''(x) = \frac{2ax^3 - 6ab^2x}{(b^2 + x^2)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{3}\,|b|,\ x_3 = -\sqrt{3}\,|b|.$$

Deci abscisa C a punctului de inflexiune este

$$C = \sqrt{3}\,|b| \text{ și } f(\sqrt{3}\,|b|) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a}{|b|}.$$

b) $A = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}\,|b|} \frac{ax}{b^2 + x^2}\,dx = a \ln 2$, deci independentă de b.

c) $8 : \dfrac{ab \operatorname{tg}\varphi}{b^2 + b^2 \operatorname{tg}^2\varphi} = 7 : \dfrac{ab \sin\varphi}{b^2 + b^2 \sin^2\varphi} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin\varphi(2\cos\varphi - 1)(4\cos^2\varphi + 2\cos\varphi - 7) = 0$$

$$\sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi \in \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$$

$$2\cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi \in \left\{\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi \in \{k\pi\} \cup \left\{\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right\};\ k \in \mathbf{Z}.$$

16. a) i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Considerăm codomeniul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, pe care trasăm un detaliu de grafic, apoi extindem detaliul pe toată ordonata și anume pentru $y \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right)$; $k \in \mathbf{Z}$.

ii) Asimptote: $y = 0$, orizontală.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2};\ \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

iii) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x^2 + 1} & \text{pentru } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x) = -1 \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f'(x) = -1.$$

iv) Studiul derivatei a doua:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{(1 + x^2)^2} & \text{pentru } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

v) Tabloul de variație:

x	$-\infty$			0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$		$-$	$-$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0
$f''(x)$		$-$	$-$		$+$	$+$

vi) Vezi graficul XII.16.

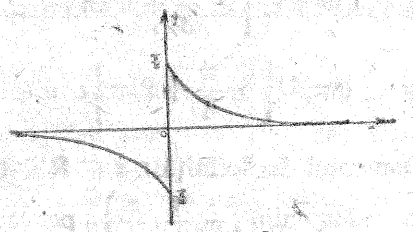


Fig. XII.16

b) $A = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\, dx = \frac{\sqrt{3}}{18}\pi + \frac{1}{2}\ln 3,$

unde integrala s-a rezolvat prin părți.

c) Folosim relațiile lui Viète:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}\left(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right).$$

Dezvoltînd tangenta $\operatorname{tg}(a+b+c) = \operatorname{tg}[a+(b+c)] = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}{1 - (\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} c \operatorname{tg} a)}$ și ținînd cont că:

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{x_i} = y_i \Rightarrow \frac{1}{x_i} = \operatorname{tg} y_i,$$

deducem:

$$\operatorname{tg}\left(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\right) = \frac{c-a}{b-d}.$$

Cum a, b, c, d sînt în progresie aritmetică, înseamnă că $c - a = d - b$, deci $\operatorname{tg}\left(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\right) = -1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) = \operatorname{arctg}(-1) \in \left\{\frac{3\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Pentru cazul particular $k = 0$, vom obține valoarea $\frac{3\pi}{4}$.

17. a) i) Domeniul de definiție:

$$1 + 2\sin x > 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right),\quad k \in \mathbb{Z}.$$

ii) Funcția este periodică, de perioadă 2π, deci graficul îl vom trasa pe $[0, 2\pi] \cap$ domeniul de definiție, deci $x \in$

$$\in \left[0,\ \pi + \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{11\pi}{6},\ 2\pi\right].$$

iii) Asimptote: $\begin{cases} x = \pi + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{6} \\ x = \dfrac{11\pi}{6} \end{cases}$ verticale.

iv) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \frac{2\cos x}{1 + 2\sin x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

v) Studiul derivatei a doua:

$$f''(x) = -\frac{2\sin x + 4}{(1 + 2\sin x)^2} < 0.$$

vi) Tabloul de variație:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$		2π
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\ln 3$	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0
$f''(x)$	$-$		$-$	$-$		$-$	$-$	

vii) Trasarea detaliului de grafic: (vezi graficul XII.17 a).

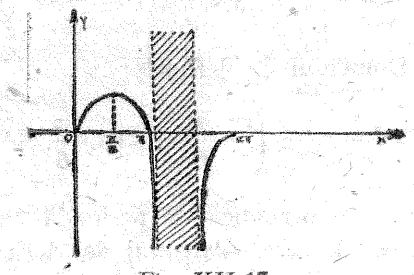


Fig. XII.17 a

viii) Trasarea graficului pe toată axa reală: (vezi graficul XII.17 b).

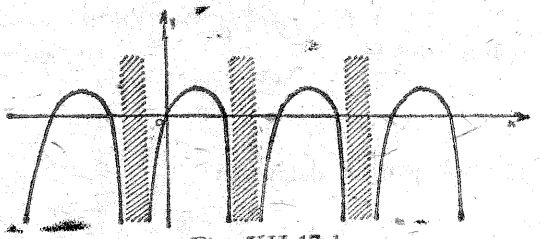


Fig. XII.17 b

18. i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R}$.

ii) Explicitarea funcției:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{x^2+1} & \text{pentru } x \in [-1, 1] \\ \dfrac{x^2-1}{x^2+1} & \text{pentru } x \in \mathbf{R} \setminus [-1, 1]. \end{cases}$$

iii) Asimptote: $y = 1$, orizontală.

iv) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{4x}{x^2+1} & \text{pentru } x \in [-1, 1] \\ \dfrac{4x}{x^2+1} & \text{pentru } x \in \mathbf{R} \setminus [-1, 1] \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{-4x}{(x^2+1)^2} = 1; \quad \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{4x}{(x^2+1)^2} = -1;$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{4x}{(x^2+1)^2} = 1; \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{-4x}{(x^2+1)^2} = -1,$$

deci în punctele: $x = 1$ și $x = -1$, graficul funcției admite puncte unghiulare.

v) Studiul derivatei a doua:

$$f''(x) = \begin{cases} 4 \cdot \dfrac{3x^2-1}{(1+x^2)^3} & \text{pentru } x \in [-1, 1]. \\ 4 \cdot \dfrac{1-3x^2}{(1+x^2)^3} & \text{pentru } x \in \mathbf{R} \setminus [-1, 1]. \end{cases}$$

vi) Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$\|$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$		1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1
$f''(x)$	$-$		$+$	0	$-$	0	$+$		$-$	

vii) Vezi graficul XII.18.

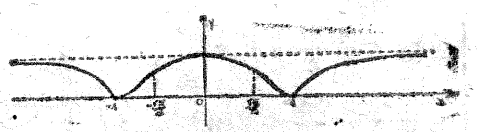


Fig. XII.18

Se observă că funcția este pară, deci evident graficul este simetric față de Oy.

b) $\begin{cases} y = \frac{6}{5}x \\ y = \frac{1-x^2}{1+x^2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ este rădăcina căutată.

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{6}{5} x\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} - \frac{7}{20} - 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f'(x) = -1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f'(x) = 1 \Rightarrow m_1 = -1$, $m_2 = 1 \Rightarrow$ $\operatorname{tg}\varphi_1 = -1$, $\operatorname{tg}\varphi_2 = 1$.

Unghiul este dat de relația: $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = m =$ $= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ deci unghiul format de cele două semitangente este $\frac{\pi}{2}$.

e) Triunghiul format de cele două semidrepte și $y = 1$ este dreptunghic isoscel, cu înălțimea egală cu 1, deci aria

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1.$$

19. a) $\pi \ln x = 2k\pi$

$$\pi \ln x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \begin{cases} x_k = e^{2k} \\ \text{sau} \\ x'_k = \sqrt{e} \cdot e^{2k} \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$$

b) i) Domeniul de definiție: $x \in [1, e^2]$.

ii) Intersecția cu axele carteziene:

$$x = 1, \quad x = e^2, \quad x = \sqrt{e}.$$

iii) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \frac{\pi}{x}[\cos(\pi \ln x) - \sin(\pi \ln x)].$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \pi \ln x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \pi \ln x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_k = \sqrt[4]{e} \cdot e^{2k} \\ x'_k = \sqrt[4]{e^5} \cdot e^{2k}, \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$$

În intervalul considerat sînt admise soluțiile:

$$x = \sqrt[4]{e}, \quad x = \sqrt[4]{e^5}.$$

iv) Studiul derivatei a doua:

$$f''(x) = -\frac{\pi}{x^2}[(\pi + 1)\cos(\pi \ln x) + (\pi - 1)\sin(\pi \ln x)].$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}(\pi \ln x) = -\frac{\pi + 1}{\pi - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = e^{\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(-\frac{\pi+1}{\pi-1}\right)}.$$

v) Tabloul de variație:

x	1		$\sqrt[4]{e}$			$\sqrt[4]{e^5}$		e^2
$f'(x)$		$+\ +$	0	$-\ -\ -$		0	$+\ +$	
$f(x)$	0	↗	$\sqrt{2}-1$	↘		$-\sqrt{2}-1$	↗	0

vi) Trasarea graficului funcției: (vezi graficul din fig. XII. 19 a).

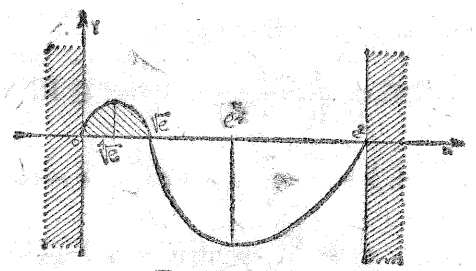


Fig. XII.19 a

c) $A = \int_0^{\sqrt{3}} f(x)\,dx = \frac{\pi\sqrt{e}+1}{1+\pi^2} + \frac{\pi(\sqrt{e}-\pi)}{1-\pi^2} + 1 - \sqrt{e}.$

Integrala s-a rezolvat prin părți, după ce în prealabil s-a ținut seama de liniaritatea funcției integrală.

d) Pentru $x > 0$, avem:

$$f(e^2 x) = \cos[\pi \ln(e^2 x)] + \sin[\pi \ln(e^2 x)] - 1 =$$

$$= \cos(\pi \ln x + 2\pi) + \sin(\pi \ln x + 2\pi) - 1 = f(x),$$

deci mai general,

$$f(x) = f(x \cdot e^{2k}); \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Pe intervalul: $[e^{2k}, e^{2k+2}]$ avem:

$$f(x) = f(x : e^{2k}), \quad x \in [1, e^2],$$

de unde rezultă că pe intervalul $[e^{2k}, e^{2k+2}]$ graficul funcției se obține din graficul lui f pe $[1, e^2]$, prin corespondența:

$$x \to e^{2k}x, \quad x \in [1, e^2].$$

$$f(x) \to f(e^{2k}x) = f(x), \quad k \in \mathbf{Z},$$

iar graficul funcției pe $(0, \infty)$ este prezentat în fig. XII. 19 b.

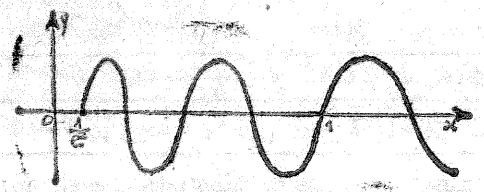


Fig. XII.19 b

20. i) Domeniul de definiție:

$$-1 \leqslant \frac{x-1}{\sqrt{2(1+x^2)}} \leqslant 1 \Rightarrow x \in \mathbf{R}.$$

ii) Asimptote: $y = -\frac{\pi}{4}$, pentru $x \to -\infty$.

$$y = \frac{\pi}{4}, \text{ pentru } x \to +\infty.$$

iii) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2}} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{x+1}{|x+1|} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} & \text{pentru } x \in (-1, \infty) \\ -\dfrac{1}{1+x^2} & \text{pentru } x \in (-\infty, -1). \end{cases}$$

Funcția nu este derivabilă în $x = -1$, punct în care graficul admite un punct unghiular:

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \left(-\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{1}{2}; \quad \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}.$$

iv) Studiul derivatei a doua:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2} & \text{pentru } x \in (-1, \infty) \\ \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} & \text{pentru } x \in (-\infty, -1). \end{cases}$$

v) Tabloul de variație:

x	$-\infty$					-1		0	1				$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+$	$+$	$+$	$+$		
$f(x)$	$-\frac{\pi}{4}$	$\searrow$			$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$				$\frac{\pi}{4}$	
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$				$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$

vi) Vezi graficul XII.20.

vii) Ținînd cont de intervalele de bijectivitate ale funcției arcsin, graficul complet se va trasa purtînd șablonul din fig. XII.20 pe toată axa Oy.

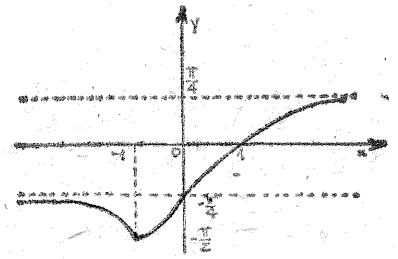


Fig. XII.20

b) i) Pe $(-\infty, -1)$, funcțiile:

$$y = \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2(1+x^2)}}$$

$$z = -\operatorname{arctg} x.$$

Cum au aceeași derivată, atunci conform unei consecințe a teoremei lui Lagrange, funcțiile diferă printr-o constantă.

$$\frac{x-1}{\sqrt{2(1+x^2)}} = \sin y,\ \sin y < 0,\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right).$$

Fie: $-x = \operatorname{tg} z,\ \operatorname{tg} z > 0,\ z \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Eliminînd pe x între cele două relații obținem:

$$\frac{-(\operatorname{tg} z + 1)}{\sqrt{(1+\operatorname{tg} z)^2 + (1-\operatorname{tg} z)^2}} = \sin y$$

sau $\sin y + \cos\left(\frac{\pi}{4} - z\right) = 0 \Rightarrow y - z = -\frac{3\pi}{4}$.

ii) Pe $(-1, \infty)$ funcțiile au aceeași derivată, deci diferă printr-o constantă.

$$\sin y = \frac{x-1}{\sqrt{2(x^2+1)}},\quad x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right),\quad \operatorname{tg} z = x > -1.$$

Deci: $z \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Eliminînd pe x între cele două relații:

$$\sin y = \frac{\operatorname{tg} z - 1}{\sqrt{(1+\operatorname{tg} z)^2 + (1-\operatorname{tg} z)^2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{4} + z\right)$$

sau $\sin y = -\cos\left(\frac{\pi}{4} + z\right) \Rightarrow y - z = -\frac{\pi}{4}$.

21. a) Fie $I_1 = \int \frac{x-2}{x+2} \cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{x-2}{x+2}\ln|x| - \int \frac{4}{(x+2)^2}\ln|x|\,dx$, unde integrala s-a efectuat prin părți:

$$\begin{cases} u = \dfrac{x-2}{x+2} \\ dv = \dfrac{1}{x}\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{4}{(x+2)^2}\,dx \\ v = \ln|x|. \end{cases}$$

Deci $f(x) = \frac{x-2}{x+2}\ln|x| + C,\ x > 0$.

b) i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 0\}$.

ii) Asimptote: $x = -2$, $x = 0$, verticale.

iii) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \frac{4}{(x+2)^2}\ln|x| + \frac{x-2}{x+1}\cdot\frac{1}{x}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln|x| = \frac{4-x^2}{4x},$$

ecuație de tip transcendent, ale cărei soluții le „determinăm" prin intersecția graficelor: $f_1(x) = \ln|x|$ și $f_2(x) = \frac{4-x^2}{4x}$; (vezi graficul din fig. XII.21 a).

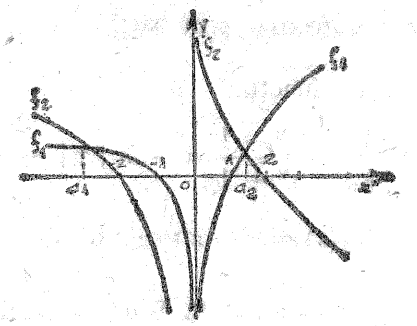


Fig. XII.21 a

Deci curbele se intersectează în punctele:

$$a_1 \in (-\infty, -2) \text{ și } a_2 \in (1, 2).$$

iv) Tabloul de variație:

x	$-\infty$		a_1		-2		0		a_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(a_1)$	$\nearrow$	$+\infty$ $\mid$ $-\infty$	$\nearrow$	$-\infty$ $\mid$ $+\infty$	$\searrow$	$f(a_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

v) Trasarea graficului este prezentată în fig. XII.21 b.

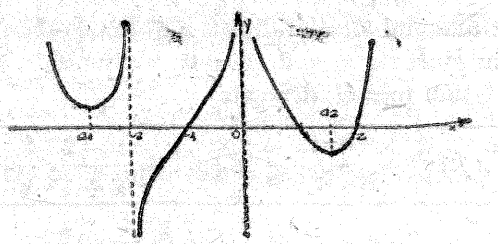


Fig. XII.21 b

c) $(x+2)\cdot \ln x \cdot f(x) = (x-2)\ln^2 x.$

$$I = \int_1^2 (x \ln^2 x - 2\ln^2 x)\,dx = -2\ln^2 2 + 6\ln 2 - \frac{15}{4},$$

unde integrala s-a efectuat prin părți.

22. i) Construim funcția:

$$g(x) = \ln\frac{1}{|x|} - \frac{x^2-1}{x^2+1} = -\ln|x| - \frac{x^2-1}{x^2+1},$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Fie: $g_1(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, $x \in \mathbf{R}$. Studiem variația funcției:

$$g_1'(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2}; \quad g_1'(x) = 0 \Rightarrow x = 0. \quad g_1''(x) = \frac{4(1-3x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1		$+\infty$
$g_1'(x)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$g_1(x)$	1	$\searrow$				-1		$\nearrow$					1
$g_1''(x)$		$-$		$-$		0		$+$		$+$	0	$-$	$-$

fie $g_2(x) = \ln\dfrac{1}{|x|} = -\ln|x|$; $x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$. $g_2(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pm 1$; $g_2'(x) = -\dfrac{1}{x}$, $g_2''(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$

x	$-\infty$			0			$+\infty$
$g_2'(x)$		$+$	$+$		$-$	$-$	
$g_2(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$	$\searrow$		$-\infty$

Funcțiile $g_1(x)$ și $g_2(x)$ fiind funcții pare, au graficele simetrice față de ordonată.

Reprezentăm pe un același sistem cartezian cele două grafice:
(vezi graficul din fig. XII.22a)

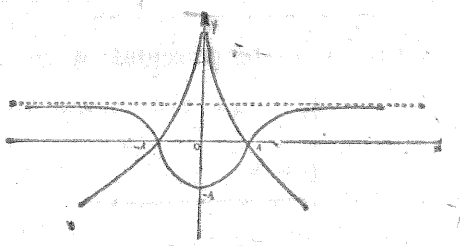


Fig. XII.22 a

Din graficul funcției putem deduce:

$$f'(x) = \begin{cases} \ln\dfrac{1}{|x|} & \text{pentru } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ \dfrac{x^2-1}{x^2+1} & \text{pentru } x \in [-1, 0) \cup (0, 1]. \end{cases}$$

Funcția este derivabilă pe domeniul de definiție, cel mult cu excepția punctelor ± 1, în care funcția este continuă. Derivatele laterale în $x = \pm 1$ sînt:

$$\lim_{\substack{x\to -1 \\ x<-1}} f'(x) = 1; \quad \lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f'(x) = -1,$$

$$\lim_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} f'(x) = -1; \quad \lim_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} f'(x) = 1,$$

deci în punctele $(-1, 0)$ și $(1, 0)$ graficul admite puncte unghiulare.

ii) $f''(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} \text{ pentru } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty), \\ 4 \cdot \dfrac{1 - 3x^2}{(1+x^2)^3} \text{ pentru } x \in (-1, 0) \cup (0, 1). \end{cases}$

Semnul pentru $f''(x)$:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$+ +$	$- -$	0	$+ + +$	$0 - -$		$++$

iii) Graficul funcției este prezentat în fig. XII.22b.

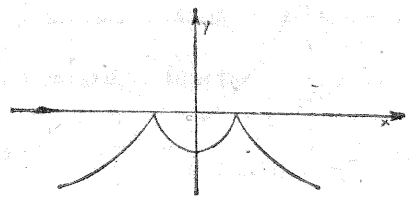


Fig. XII.22 b

23. a) $\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{x^2+1} \\ x = \dfrac{y^2}{y^2+1}. \end{cases}$

Aplicînd metoda substituției, obținem:

$$x(2x^4 - x^3 + 2x^2 + 1) = 0.$$

Cercetăm natura rădăcinilor cu ajutorul șirului lui Rolle:

$$h(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 1 = 0$$
$$h'(x) = 8x^3 - 3x^2 + 4x.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
h/h'	$+$	$+$	$+$

Rădăcina reală este $x = 0$, deci soluția sistemului este $x = y = 0$.

Soluțiile complexe conjugate ale ecuației sînt:

$$2x^4 - x^3 + 2x^2 + 1 = (2x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

Deci: $\begin{cases} x_{2,3} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4} \\ x_{4,5} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ și $\begin{cases} y_{2,3} = \dfrac{-1 \mp i\sqrt{7}}{4} \\ y_{4,5} = \dfrac{1 \mp i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

b) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$.

i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R}$.

ii) Asimptote: $y = 1$, orizontală.

iii) Funcția este pară: $f(x) = f(-x)$, deci graficul este simetric față de ordonată.

iv) Studiul primei derivate:

$$y' = \frac{2x}{(x^2+1)^2}; \quad y' = 0 \Rightarrow x = 0.$$

v) Studiul derivatei a doua:

$$y'' = \frac{-6x^2 + 2}{(x^2+1)^3};$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

vi) Tabloul de variație:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
y'	$- -$		$-$		0	$+$	$+ +$		
y	1	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	1
y''	$- -$		0	$+ + + +$			0	$- -$	

vii) Graficul funcției g se află prin simetrie față de prima bisectoare. (vezi graficul din fig. XII. 23a).

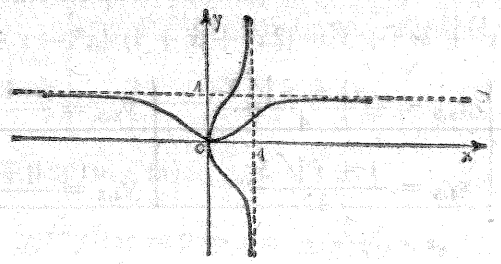


Fig. XII.23 a

c) Coordonatele punctelor sînt (fig. XII. 23b):

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{1+x^2} \\ 2x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\left(1, \dfrac{1}{2}\right) \\ B\left(\dfrac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$$

$$A = A_{\triangle ODC} - 2A_{\triangle OAC} = \frac{9}{8} - 2\left(\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{3-2x}{2}\,dx\right) = \frac{4\pi - 9}{8}.$$

24. a) i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R}$

ii) Asimptote: $y = 0$, orizontală, pentru $x \to -\infty$

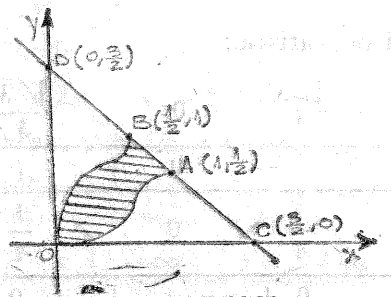


Fig. XII.23 b

iii) Intersecția cu axele:

$$y = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ și } x = \frac{3}{2}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0.$$

iv) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = e^x(2x^2 + x - 3);\ f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1,\ x = -\frac{3}{2}.$$

v) Studiul derivatei a doua:

$$f''(x) = e^x(2x^2 + 5x - 2);\ f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{4}.$$

vi) Tabloul de variație:

x	$-\infty$		$\frac{-5-\sqrt{41}}{4}$		$-\frac{3}{2}$		0		$\frac{-5+\sqrt{41}}{4}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	+		+		+		0	−	−		0	+	+
$f(x)$	0		↗		$\frac{9}{\sqrt{e^3}}$		↘		$-e$		↗		$+\infty$
$f''(x)$	+	+	0		−		−	0	+		+		

vii) Trasarea graficului:
(vezi graficul din fig. XII.24)

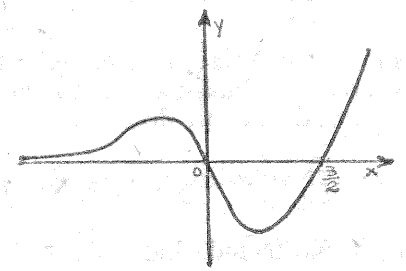


Fig. XII.24

b) Ecuația caracteristică asociată ecuației omogene $y'' - 2y' + y = 0$ este: $r^2 - 2r + 1 = 0$; deci $r_1 = r_2 = 1$.

Soluția generală a ecuației omogene este:

$$y = (A + Bx)e^x.$$

Soluția particulară se alege de forma:

$$y_0 = Cx^2e^x.$$

$$y_0' = Ce^x(x^2 + 2x).$$

$$y_0'' = Ce^x(x^2 + 4x + 2).$$

Deci $Ce^x(x^2 + 4x + 2 - 2x^2 - 4x + x^2) = 4e^x \Rightarrow C = 2$.

Evident că din forma soluției generale:

$$y = e^x(2x^2 + Ax + B),$$

prin particularizarea coeficienților $A = -3$, $B = 0$, se va obține $f(x)$.

Integrînd ecuația $y'' - 2y' + y = 4e^x$:

$$y'' - 2y + \int y\,dx = 4e^x, \text{ deci } \int y\,dx = 4e^x - y' + 2y.$$

c) Aria mărginită de graficul funcției $f(x) = 4e^x - y'' + 2y'$ este

$$S(a) = \int_a^0 y\,dx = 4e^x - y' + 2y\Big|_a^0 = 4e^x - e^x(2x^2 + x - 3) + 2e^x(2x^2 - 3x)\Big|_a^0 = -e^a(2a^2 - 7a + 7) + 7.$$

$$\lim_{a \to -\infty} S(a) = \lim_{a \to -\infty}\left[\frac{2a^2 - 7a + 7}{-e^{-a}} + 7\right] = 7,$$

unde s-a aplicat de două ori teorema lui l'Hospital.

d) Derivăm produsul după formula lui Leibniz (de derivare a unui produs de funcții derivabile):

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}, \quad n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}.$$

Derivînd și folosind metoda inducției complete, obținem:

$$f^{(n)}(x) = e^x(2x^2 + a_n x + b_n);$$

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = e^x[2x^2 + x(a_n + 4) + a_n + b_n],$$

iar $a_{n+1} = a_n + 4$; $b_{n+1} = a_n + b_n$.

Evident, aceste relații arată că $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reprezintă termenii unei progresii aritmetice cu $r = 4$, $a_1 = 1$.

Deci: $a_n = a_1 + (n - 1)r$; $a_n = 1 + (n - 1)4 = 4n - 3$.

$b_{n+1} = b_n + a_n = b_n + 4n - 3$.

Pentru $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ obținem:

$$b_n = b_{n-1} + 4n - 7;$$

$$b_{n-1} = b_{n-2} + 4n - 11;$$

$$b_{n-2} = b_{n-3} + 4n - 15;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_2 = b_1 + 4n - [3 + (n - 1)4];$$

$$b_1 = -3.$$

Dacă însumăm și reducem termenii asemenea, obținem:

$$b_n = -3 + 4n(n - 2) - \frac{[7 + 3 + (n - 1)4](n - 2)}{2}.$$

deci: $b_n = 2n^2 - 7n + 3$.

e) $2x^2 + (4n - 3)x + 2n^2 - 7n + 3 = 0$

$$\Delta = 32n - 15 \geqslant 0 \Rightarrow n \geqslant 1.$$

25. a) Fie $x_0 \in (0, \infty)$.

Vom arăta că șirul numeric dat de relația de recurență $u_n = \sqrt{x_0 + u_{n-1}}$ și de condiția inițială $u_1 = \sqrt{x_0}$ este convergent.

i) Monotonie:

$$u_1 \leqslant u_2, \text{ deoarece } \sqrt{x_0} \leqslant \sqrt{x_0 + \sqrt{x_0}}.$$

Presupunînd: $u_n \leqslant u_{n+1}$, avem: $u_n + x_0 \leqslant u_{n+1} + x_0$ și $\sqrt{u_n + x_0} \leqslant \sqrt{u_{n+1} + x_0} \Rightarrow u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.

ii) Mărginire:

Cum $u_{n+1} = \sqrt{x_0 + u_n}$ și trecînd la limită obținem:

$$L = \sqrt{x_0 + L} \Rightarrow L^2 - L - x_0 = 0 \Rightarrow L = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4x_0}}{2}.$$

și cum termenii șirului sînt pozitivi, rezultă că

$$L = \frac{1 + \sqrt{1 + 4x_0}}{2}.$$

Evident că acest număr poate fi considerat drept margine superioară, deci:

$$u_1 = \sqrt{x_0} < \frac{1+\sqrt{1+4x_0}}{2} \Rightarrow x_0 < \frac{1+2x_0+\sqrt{1+4x_0}}{2}$$

$$u_2 = \sqrt{x_0+\sqrt{x_0}} < \frac{1+\sqrt{1+4x_0}}{2} \Rightarrow \sqrt{x_0} < \frac{1+\sqrt{1+4x_0}}{2};$$

care se reduce la prima inegalitate, şi procedeul continuă.

Şirul $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este monoton crescător şi mărginit superior, deci este convergent, iar limita este:

$$L = \frac{1+\sqrt{1+4x_0}}{2}.$$

Pentru $x_0 = 0$ şirul se reduce la 0, 0, ..., 0. Deci limita este dată de funcţia:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x = 0 \\ \dfrac{1+\sqrt{1+4x}}{2} & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$$

b) $\dfrac{1+\sqrt{1+4x}}{2} = \dfrac{p}{q} \Rightarrow x = \dfrac{p^2-pq}{q^2} \Rightarrow x = \dfrac{p^2}{q^2} - \dfrac{p}{q}.$

Cum $x > 0$ rezultă că $\dfrac{p}{q}$, dacă este pozitiv, trebuie să fie supraunitar, deci:

$$x \in \left\{ \frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right) \,\middle|\, p > q,\ p, q \in \mathbf{N} \right\}.$$

c) f este discontinuă în origine, deci f pe $[0, \infty)$ nu are proprietatea lui Darboux, dar pe $(0, \infty)$ fiind continuă are proprietatea lui Darboux (conform teoremei valorilor intermediare: orice funcţie continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux pe acel interval).

d) i) Domeniul de definiţie: $x \in [0, \infty)$

ii) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+4x}} & \text{pentru } x > 0, \end{cases}$$

deci $f'(x) > 0$.

iii) Studiul derivatei a doua:

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x = 0 \\ -\dfrac{2}{(1+4x)^{3/2}} & \text{pentru } x > 0. \end{cases}$$

iv) Trasarea tabloului de variaţie:

x	0				$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	0		$\nearrow$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	

v) Vezi graficul XII.25.

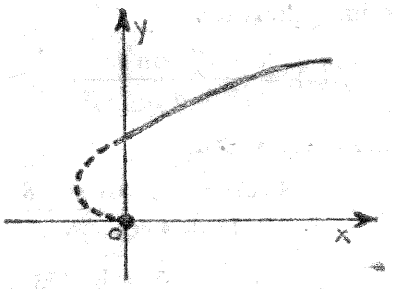


Fig. XII. 25.

e) $$x_G = \frac{\displaystyle\int_1^2 x \cdot \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\,dx}{\displaystyle\int_1^2 \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\,dx} = \frac{387-25\sqrt{5}}{10(33-5\sqrt{5})}.$$

$$y_G = \frac{1}{2} \cdot \frac{\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\right)^2 dx}{\displaystyle\int_1^2 \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\,dx} = \frac{51-5\sqrt{5}}{2(33-5\sqrt{5})}.$$

Iar $$\int_1^2 \sqrt{1+4x}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(1+4x)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = \frac{27-5\sqrt{5}}{6}$$

și

$$\int_1^2 x\sqrt{1+4x}\,dx = \int_{\sqrt{5}}^{3} \frac{t^2-1}{4}\cdot t\cdot\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{t^3}{120}(3t^2-5)\Big|_{\sqrt{5}}^{3} = \frac{297-25\sqrt{5}}{60}$$

cu $1+4x=t^2 \Rightarrow x=\frac{t^2-1}{4}$ și $dx=\frac{1}{2}t\,dt$.

26. a) i) Domeniul de definiție: $x\in\mathbf{R}$.

ii) f este periodică de perioadă 2π deci graficul îl vom trasa pe $[0, 2\pi]$.

iii) f este pară, deci graficul este simetric față de ordonată.

iv) Graficul nu admite asimptote.

v) Studiul primei derivate:

$$f'(x)=\frac{-5\sin x}{(5+4\cos x)^2}.$$

vi) Studiul derivatei a doua:

$$f''(x)=5\cdot\frac{4\cos^2 x-5\cos x-8}{(5+4\cos x)^3}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow \cos x=\frac{5\pm\sqrt{153}}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\pm\arccos\frac{5-\sqrt{153}}{8}+\pi.$$

vi) Tabloul de variație:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		x_1		π		x_2		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0			
$f(x)$	$\frac{1}{9}$	$\searrow$			0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$			$\frac{1}{9}$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	

vii) Trasarea unui detaliu al graficului: (vezi graficul din fig. XII.26).

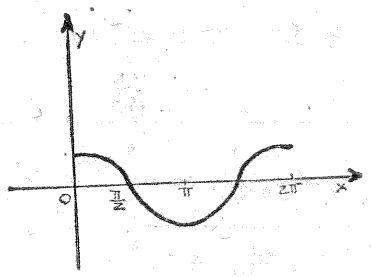


Fig. XII. 26

b) $A=\int_0^{2\pi}\frac{\cos x}{5+4\cdot\cos x}\,dx=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{5+4\cos x}\right)dx=$

$$=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}\cdot I\Big|_0^{2\pi},$$ unde integrala

$I=\int\frac{dx}{5+4\cos x}$ se calculează efectuînd substituția:

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\quad dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

$$I\Big|_0^{2\pi}=2\cdot\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{3}\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{2\pi}{3},$$

deci $$A=\left|\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{6}\right|=\left|-\frac{\pi}{3}\right|=\frac{\pi}{3}.$$

27. a) $\sin nx=\sin[(n-2)+2]x=\sin(n-2)x\cdot\cos 2x+$
$+\sin 2x\cdot\cos(n-2)x=\sin(n-2)x+2\sin x\cdot\cos(n-1)x,$

deci: $I_n=I_{n-2}+2\int\cos(n-1)x\,dx \Rightarrow I_n=I_{n-2}+$

$$+\frac{2\sin(n-1)x}{n-1} \Rightarrow (n-1)(I_n-I_{n-2})=2\sin(n-1)x.$$

b) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}$. Fie $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx \Rightarrow$

$$(n-1)(I_n - I_{n-2}) = 0 \Rightarrow I_n = I_{n-2}.$$

c) $(n-1)(I_n - I_{n-2}) = 2(-1)^{\frac{n}{2}+1}$, deci

$$I_n - I_{n-2} = (-1)^{\frac{n}{2}+1} \cdot \frac{2}{n-1}.$$

Scriind relația pentru $n = 2, 4, 6, \ldots$, obținem:

$$I_2 - I_0 = \frac{2}{1}$$

$$I_4 - I_2 = -\frac{2}{3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$I_n - I_{n-2} = (-1)^{\frac{n}{2}+1} \frac{2}{n-1}.$$

Însumînd egalitățile obținem relația cerută.

28. a) Se observă că $x^{1-\frac{1}{\ln x}} = \frac{x}{e}$, pentru orice $x \neq 1$ și $x > 0$ $\left(\text{unde } A^{\frac{1}{\log_a A}} = a\right)$.

Deci $f(x) = \arcsin \frac{x}{e}$, $(x > 0,\ x \neq 1)$.

i) Domeniul de definiție: $\begin{cases} \frac{x}{e} \geqslant -1 \\ \frac{x}{e} \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (0, e] \setminus \{1\}$.

ii) Limite la capetele intervalului:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0,\ \lim_{x \to 1} f(x) = \arcsin \frac{1}{e};\ \lim_{\substack{x \to e \\ x < e}} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

iii) Studiul primei derivate: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{e^2 - x^2}} > 0$.

iv) Studiul derivatei a doua: $f''(x) = \frac{x}{(e^2 - x^2)^{3/2}}$.

v) Tabloul de variație:

x	0		1		e
$f'(x)$	+	+		+	+
$f(x)$	0	↗	$\arcsin \frac{1}{e}$	↗	$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$	+	+		+	+

vi) Vezi graficul XII.28.

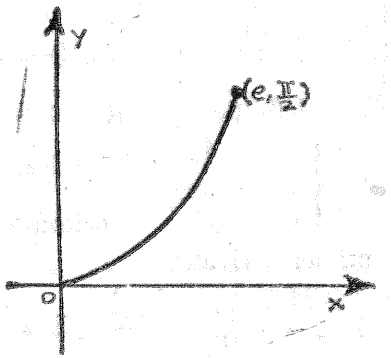


Fig. XII. 28

b) Verificarea este imediată, înlocuind pe y' și y'' în expresia ecuației diferențiale.

c) Integrînd prin părți obținem:

$$\int \arcsin \frac{x}{e}\,dx = x \arcsin \frac{x}{e} + \sqrt{e^2 - x^2} + C = F(x)$$

Impunem condiția: $F(e) = \frac{\pi e}{2} \Rightarrow C = 0$.

d) Cum ecuația nu conține în mod explicit funcția y, vom efectua substituția $u = y'$. Ecuația devine:

$xu^3 - u' = 0$, care este o ecuație cu variabile separabile:

$$\frac{du}{u^3} = x\,dx \Rightarrow -\frac{1}{2u^2} = \frac{x^2}{2} + C_1 \Rightarrow u^2 = \frac{1}{k - x^2} \Rightarrow$$

$$y' = \pm\frac{1}{\sqrt{k - x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{\sqrt{k - x^2}} \Rightarrow$$

$$dy = \pm\frac{1}{\sqrt{k - x^2}}dx \Rightarrow y = \pm\arcsin\frac{x}{\sqrt{k}} + C.$$

29. Conform definiției $[x] = \begin{cases} k, & x \in [k,\ k+1). \\ -(k+1), & x \in [-k-1,\ -k), \end{cases}$ unde k este un număr natural. Deci, explicitarea funcției este:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k - x}{k + x + 1} & \text{pentru } x \in [k,\ k+1) \\ \dfrac{x + k + 1}{x + k} & \text{pentru } x \in [-k-1,\ -k) \end{cases}$$

i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R} \setminus \{-k-1,\ -k\}$

ii) Asimptote: $\left.\begin{cases} x = -k \\ x = -k-1 \end{cases}\right\}$ verticale

$y = \pm 1$, orizontale.

iii) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2k-1}{(x+k+1)^2} & \text{pentru } x \in [k,\ k+1) \\ -\dfrac{1}{(x+k)^2} & \text{pentru } x \in [-k-1,\ -k), \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \to k \\ x > k}} \frac{-2k-1}{(x+k+1)^2} = \frac{-2k-1}{(2k+1)^2} \le 0$$

$$\lim_{\substack{x \to k+1 \\ x < k+1}} \frac{-2k-1}{(x+k+1)^2} = \frac{-2k-1}{4(k+1)^2} \le 0$$

$$\lim_{\substack{x \to -k-1 \\ x > -k-1}} \frac{1}{(x+k)^2} = -1 < 0; \quad \lim_{\substack{x \to k \\ x < k}} \frac{-1}{(x+k)^2} = \frac{1}{4k^2}.$$

Se observă că valoarea pantei tangentei la curbă, în punctele de abscisă întreagă negativă, este constantă. Deci arcele de curbă, de pe semiaxa negativă reprezintă un același arc, dar translatat cu cîte o unitate spre stînga.

iv) Tabloul de variație, pentru un numit $k \in \mathbf{N}$ este:

x	$-\infty$		$-k-1$		$-k$		0		k		$k+1$		$+\infty$
$f'(x)$				$-$		$-$				$-$		$-$	
$f(x)$			$\searrow$						$\searrow$				

v) Vezi graficul XII.29.

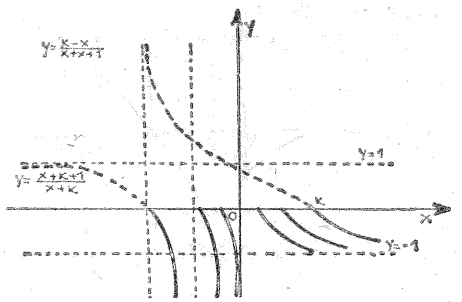


Fig. XII.29

Se observă că funcția este discontinuă în toate punctele de abscisă întreagă avînd puncte de discontinuitate în $x = k$ și $x = -k-1$, pentru $k \geq 0$ și natural.

30. a) $f(x) = \dfrac{(x+3)^2(x-3)}{(x-1)^2}$.

i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

ii) Asimptote: $x = 1$ (verticală), $y = x + 5$ (oblică).

iii) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \frac{(x+3)(x^2 - 6x + 21)}{(x-1)^3}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -3$. În punctul $x = 1$ graficul admite un punct de întoarcere: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f'(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f'(x) = +\infty$.

iv) Studiul derivatei a doua:

$$f''(x) = -\frac{192}{(x-1)^4} < 0.$$

v) Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-\infty$	$+\infty$ $+$ $+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$		$-$ $-$ $-$	

vi) Vezi graficul XII.30.

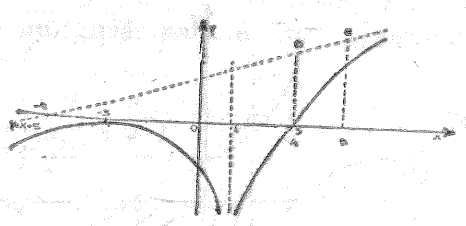


Fig. XII.30

b) $F'(x) = \dfrac{(3mx^2+2nx+p)(x-1)-(mx^3+nx^2+px)}{(x-1)^2}$.

Identificînd cu $f(x)$ și aplicînd metoda coeficienților nedeterminați, obținem:

$$m = \frac{1}{2};\quad n = \frac{9}{2};\quad p = 27.$$

c) $A_{\triangle ABC} = \int_3^5 f(x)\,dx = \int_3^5 \left[x+5-32\cdot\frac{1}{(x-1)^3}\right]dx = 10.$

$$A_{ABED} = 18 \Rightarrow A_{ACED} = 18 - 10 = 8.$$

31. a) $\lim\limits_{x\to\infty} z(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$, utilizînd regula lui l'Hospital.

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} z(x) - \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0.$$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = -\infty$.

c) i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R}$.

ii) Asimptote: $y = 0$, pentru $x \to \infty$.

iii) Studiul primei derivate: $y' = (2-x)e^{-x}$.

iv) Studiul derivatei a doua: $y'' = (x-3)e^{-x}$.

v) Tabloul de variație:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
y'	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{2}}$	$\searrow$	$e^{\frac{2}{3}}$	$\searrow$	0
y''	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$ $+$	$+$

vi) Vezi graficul XII.31.

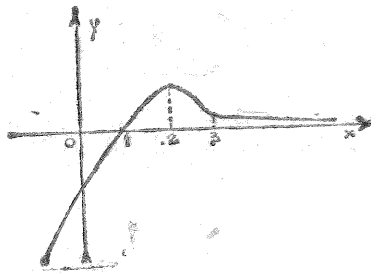


Fig. XII.31

d) $y' = (-1)^1(x-1-1)e^{-x}$;

$y'' = (-1)^2(x-2-1)e^{-x}$;

$y''' = (-1)^3(x-3-1)e^{-x}$;

$\vdots$

$y^{(n)} = (-1)^n(x-n-1)e^{-x}$.

Se va demonstra prin inducție completă (adică vom compara rezultatele din: $y^{(n+1)}$ obținut din $y^{(n)}$ prin observație, cu $y^{(n+1)}$ obținut din $y^{(n)}$ prin derivare).

e) Analog punctului d) se determină:

$$Y_\alpha^{(n)}(x) = (-1)^n[x-n+\alpha]e^{-x}.$$

În particular: $Y'_\alpha(x) = -(x - 1 + \alpha)e^{-x}$.

f) $Y'_0(x) = -(x-1)e^{-x} = -y$;

$F(x) = -Y_0(x) = -xe^{-x}$ este deci o primitivă a funcției y.

$$S(h) = F(x)\Big|_1^h = -he^{-h} + e^{-1};$$

$$\lim_{h\to\infty} S(h) = \frac{1}{e} - \lim_{h\to\infty} z(h) = \frac{1}{e}.$$

32. a) b) $\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$.

1° Dacă $\lambda \notin \{-2, 1\}$ sistemul admite soluție unică:

$$x = -\frac{\lambda+1}{\lambda+2},\quad y = \frac{1}{\lambda+2},\quad z = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}.$$

2° Dacă $\lambda = 1$, toți $\Delta_{car} = 0$, deci conform teoremei lui Rouché sistemul este compatibil doi nedeterminat:

$$\begin{cases} x = 1 - u - v \\ y = u \\ z = v, \end{cases} \qquad u,\ v \text{ parametri reali.}$$

3° Dacă $\lambda = -2$, sistemul este incompatibil, deoarece

$$\Delta \text{ princ.} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ și}$$

$$\Delta_{car} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ (contrazice teorema lui Rouché).}$$

c) Înlocuind cu λ cu x, obținem:

$$y = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)};\quad x \in \mathbf{R}.$$

i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R}$

ii) Asimptote: $y = x$, oblică

iii) Studiul primei derivate:

$$y' = \frac{x+1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}};\quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} y' = -\infty,\quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} y' = +\infty,$$

deci în punctul (1, 0) graficul admite un punct de întoarcere.

iv) Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-2			-1		1		$+\infty$
y'	$+$	$+$		$+$	$+$	0	$-$ |	$+$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$		1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

v) Vezi graficul XII.32.

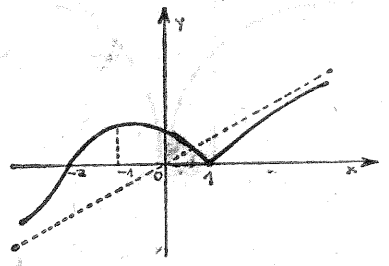


Fig. XII.32

33. a) $f(0) = 1$, $f'(0) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 2x - \alpha - \beta}{(x-1)^2} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 1 \end{cases}.$$

b) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

ii) Asimptote: $x = 1$ (verticală), $y = 1$ (orizontală).

iii) Studiul primei derivate: $f'(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}$. În punctul $x = 1$ graficul funcției admite un punct de întoarcere.

iv) Studiul derivatei a doua:

$$f''(x) = -\frac{6}{(x-1)^4} < 0.$$

v) Tabloul de variație:

x	$-\infty$			1				$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$		$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$	$\nearrow$			1
$f''(x)$		$-$	$-$		$-$	$-$	$-$	

vi) Vezi graficul XII.33.

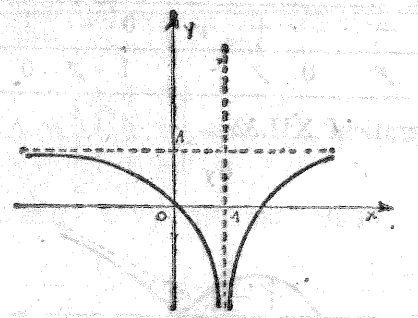


Fig. XII.33

c) $g(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$; $V = \pi\int_0^{\frac{1}{2}} g^2(x)\,dx =$

$$= -\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{(x-1)^3}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{7\pi}{3}.$$

34. a) $U_n = \frac{(x-1)(x^n+1)}{x^n\cdot x^p - 1}$ (deoarece numitorul este o progresie geometrică cu rația x și cu $n+p$ termeni).

Se vor considera cazurile:

1. $x = 0$, $U_n = 1$, $f(x) = 1$.
2. $0 < x < 1$, $x^n \to 0$, $f(x) = 1 - x$.
3. $x = 1$, $U_n = \frac{2}{n+p}$; $f(x) = 0$.
4. $1 < x < \infty$, $x^n \to \infty$, $f(x) = \frac{x-1}{x^p}$.

Deci:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{pentru } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{x-1}{x^p} & \text{pentru } x > 1. \end{cases}$$

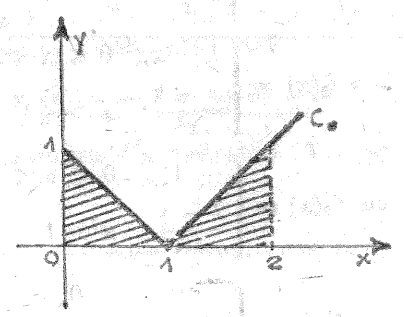


Fig. XII.34 a

b) $f(x)$ este continuă în $x = 1$,

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{pentru } 0 \leqslant x < \\ \dfrac{x^p - px^{p-1}(x-1)}{x^{2p}} & \text{pentru } x > 1. \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f'(x) = -1; \quad \lim_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} f'(x) = 1,$$

deci f nu ese derivabilă în $x = 1$, admițînd un punct unghiular.

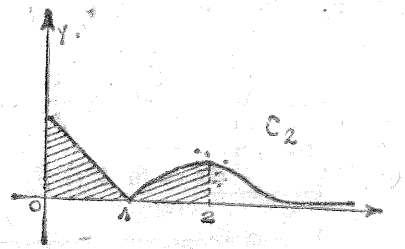


Fig. XII.34 b

c) $p = 0 \Rightarrow f_0(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x - 1, & x > 1 \end{cases}$

$p = 1 \Rightarrow f_1(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{x-1}{x}, & x > 1 \end{cases}$

$p = 2 \Rightarrow f_2(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{x-1}{x^2}, & x > 1 \end{cases}$

cu $f_2'(x) = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{2-x}{x^3}, & x > 1 \end{cases}$

$f_2''(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{2(x-3)}{x^4}, & x > 1. \end{cases}$

Graficele funcțiilor sînt: XII.34 a, XII.34 b, XII.34 c.

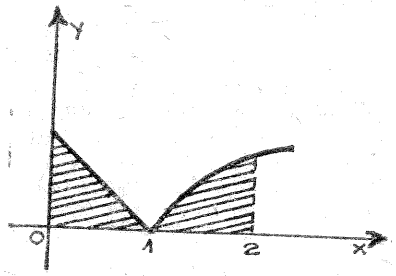


Fig. XII.34 c

d) $x_M = 2$, $S_0 = \dfrac{1 \cdot 1}{2} + \dfrac{1 \cdot 1}{2} = 1$,

$$S_1 = \frac{1}{2} + \int_1^2 \frac{x-1}{x}\,dx = \frac{3}{2} - \ln 2.$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \int_1^2 \frac{x-1}{x^2}\,dx = \ln 2 \text{ și } S_1 + S_2 = \frac{3}{2};$$

$$S_0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow S_1 + S_2 = S_0 + \frac{1}{2}.$$

35. a) $f'(x, p) = \dfrac{\ln x - p - 1}{x^2}$, $f'(x, p) = 0 \Rightarrow$

$x_p = e^{p+1} > 0 \Rightarrow f(x_p, p) = y_p = -e^{-p-1} < 0.$

b) Pentru a determina locul geometric, eliminăm parametrul p, între abscisa și ordonata punctului mobil, determinînd astfel ecuația locului geometric:

$$x_p \cdot y_p = -1 \Rightarrow xy = -1.$$

Graficul este ramura din cadranul IV a unei hiperbole echilatere.

c) $S(p) = -e^{-1} \cdot \dfrac{e^{-p-1} - 1}{e^{-1} - 1}$ (deoarece $S(p)$ este suma unei progresii geometrice de rație e^{-1}), $\lim\limits_{p \to \infty} S(p) = \dfrac{1}{1 - e}$.

d) Ecuația tangentei în (x_0, y_0) este:

$$y - y_0 = f'(x_0, p)\,(x - x_0).$$

Ecuația tangentei în $(1, p)$ este: $x + y - 1 + p(x - 2) = 0$, care reprezintă ecuația unui fascicul de drepte al cărui punct fix P se determină rezolvînd sistemul:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow P(2, -1).$$

e) Trasăm graficul funcției $f(x, p)$.

$$f'(x, p) = -\frac{p + 1 - \ln x}{x^2}; \quad f''(x, p) = \frac{2p + 3 - 2\ln x}{x^3}.$$

x	0		e^p		e^{p+1}			$e^{p+1+\frac{1}{2}}$		∞
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	$+$		$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$			$e^{-(p+1)}$	$\nearrow$				0
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$

Cazul 1 : $p < 0$, $e^p < 1 < m$, iar graficul funcției este prezentat în figura XII.35 a.

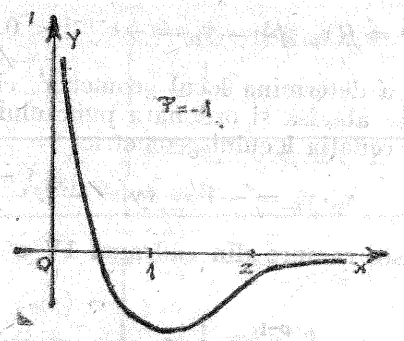


Fig. XII.35 a

O primitivă a funcției $f(x, p)$ este:

$$F(x, p) = p \ln x - \frac{1}{2} \ln^2 x.$$

$$A(m, p) = -F(m, p) + F(1, p) = -\left(p \ln m - \frac{1}{2} \ln^2 m\right),$$

iar pentru ca această arie să fie egală cu $p \cdot \ln m - \frac{1}{2}$, obținem: $\ln^2 m - 4p \ln m + 1 = 0$.

Cum $\Delta \geqslant 0$, obținem: $p \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$,

$$\text{iar } m = e^{2p \pm \sqrt{4p^2-1}} < 1.$$

Cazul 2 : $p = -\frac{1}{2}$ se tratează analog cazului 1.

Cazul 3 : $p = 0$ graficul funcției $f(x, 0)$ este prezentat în figura XII.35 b.

$$A(m, 0) = \frac{1}{2} \ln^2 m.$$

Ecuația $\frac{1}{2} \ln^2 m = -\frac{1}{2}$ nu are rădăcini reale.

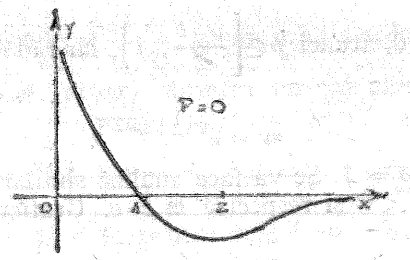


Fig. XII.35 b

Cazul 4. $0 < p < 1$ graficul funcției este prezentat în figura XII. 35 c.

$A(m, p) = F(m, p) - F(1, p)$, dacă $m < e^p$.

$A(m, p) = F(e^p, p) - F(1, p) - F(m, p) + F(e^p, p)$, dacă $m > e^p$.

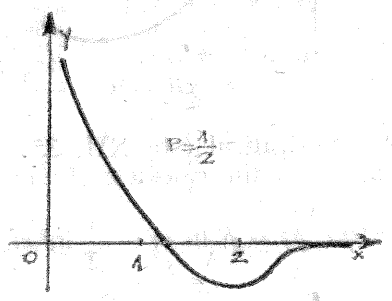


Fig. XII.35 c

Dacă $m < e^p < e$, din: $A(m, p) = p \cdot \ln m - \frac{1}{2}$, deducem ecuația: $p \ln m - \frac{1}{2} \ln^2 m = p \ln m - \frac{1}{2}$, cu rădăcinile: $m_1 = e$, $m_2 = \frac{1}{e}$.

Valorile nu sînt acceptate, deoarece:

$$m > 1 \text{ și } m < e^p < e.$$

Dacă $m > e^p$, ecuația devine:

$$\ln^2 m - 4p \ln m + 2p^2 + 1 = 0.$$

Cum $\Delta \geq 0$, atunci $p \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, iar rădăcinile acceptate sînt:

$$m = e^{2p \pm \sqrt{2p^2-1}}.$$

Cazul 5. $p = 1$. Se va face analiză similară pentru situațiile: $1 < m < e$ și respectiv $m > e$. Graficul funcției este XII. 35 d.

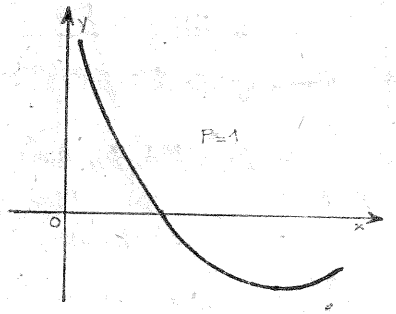


Fig. XII.35 d

Cazul 6. $p > 1$. Graficul este XII. 35 e.
Dacă $1 < m < e^p$, din calculele de mai sus rezultă:

$$A(m, p) = p \ln m - \frac{1}{2} \ln^2 m.$$

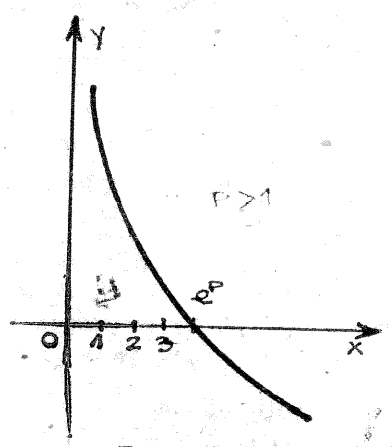


Fig. XII.35 e

Egalînd cu $p \ln m - \frac{1}{2}$, găsim soluția acceptată: $m = e$.

Dacă $m > e^p$, atunci obținem un caz similar cu unul precedent.

36. a) $y' = f'(x) = \dfrac{x}{(1 + \sqrt{1 + x^2})\sqrt{1 + x^2}}$

$f'(x) < 0$, pentru $x \in (-\infty, 0)$
$f'(x) > 0$, pentru $x \in (0, \infty)$
$f'(x) = 0$, pentru $x = 0$.

b) $x \cdot e^{g(x)}\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]' + g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 0.$

c) $[e^{f(x)} - 1]^2 = x^2 + 1$. Se aplică teorema lui Bézout, sau dezvoltarea:

$$(1 - x + x^2)^{2n+1} + (1 + x + x^2)^{2n+1} =$$
$$= (1 - x + x^2 + 1 + x + x^2)[(1 - x + x^2)^{2n} -$$
$$- (1 - x + x^2)^{2n-1} \cdot (1 + x + x^2) + \ldots + (1 + x + x^2)^{2n}] =$$
$$= 2(x^2 + 1)[(1 - x + x^2)^{2n} - \ldots + (1 + x + x^2)^{2n}].$$

d) $\ln(1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}) = \ln(\operatorname{ctg} a + \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 a}) - \ln 9.$

Notînd $\operatorname{ctg} a = x \Rightarrow 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{x + \sqrt{1 + x^2}}{9}.$

Pentru $x > 0 \Rightarrow (9 - x)\left(1 + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}\right) = 0 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow a = \operatorname{arcctg} 9.$

Pentru $x < 0$, ecuația devine:

$$9 - x = \frac{9 + x}{x}\sqrt{1 + x^2} \Rightarrow$$

$f(x) \equiv 36x^3 + x^2 + 18x + 81 = 0$, cu $f\left(-\frac{3}{2}\right) f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0.$

e) Fie $F : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ dată de legea:

$$F(x) = x - g(x) = x - \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

$F'(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}(\sqrt{1 + x^2} + 1)} \geq 0$, deci F este o funcție strict crescătoare pe $(0, \infty) \Rightarrow F(x) = x - g(x) > F(0) = 0 \Rightarrow g(x) < x$ dacă $x > 0$ (conform unei consecințe a teoremei lui Lagrange).

37. a) Cum $g'(x) = \dfrac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} \Rightarrow g$ și g' există pentru orice x real.

b) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(x)\,dx = g(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \ln(1 + \sin^2 x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2.$$

c) Ecuația se mai scrie: $y'' + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot y = 0$, care are soluția generală: $y = C_1 \cos\frac{3}{2}x + C_2 \sin\frac{3}{2}x$ (soluțiile ecuației caracteristice asociate $r^2 + \frac{9}{4} = 0$ sînt $\pm i\frac{3}{2}$).

Impunînd condițiile din enunț, rezultă valorile constantelor:

$$C_1 = -2,\ C_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{Soluția cerută este:}$$

$$y(x) = -2\cos\frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{3}{2}x.$$

38. a) Pentru ca funcția $I(f)$ să fie definită, trebuie ca $a \leqslant 0$. Dacă $a > 0$, atunci pe intervalul $[0, a)$ s-ar putea ca funcția f să nu fie integrabilă sau să nu fie definită, ceea ce ar implica ca $I(f)$ să nu fie definită pe $[0, \infty)$.

$I(f)$ este derivabilă în toate punctele în care funcția $e^t f(t)$ este continuă, și cum funcția $e^t f(t)$ este continuă pe $[0, \infty) \subseteq [a, \infty)$, rezultă că funcția $I(f)$ este derivabilă pe tot domeniul de definiție și $I'(f)(x) = e^x f(x)$.

b) $I(f)$ este derivabilă pe $[0, \infty)$, deci pentru ca ecuația să aibă soluții trebuie ca funcția f să fie derivabilă pe $[0, \infty)$.

În acest caz putem diferenția egalitatea: $I(f)(x) = kf(x)$.

Obținem o ecuație diferențială liniară și omogenă: $e^x f(x) = kf'(x) \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{e^x}{k} \Rightarrow \ln f(x) = \dfrac{1}{k}\int e^x dx$, a cărei soluție generală este:

$$f(x) = e^{\frac{1}{k}\int e^x dx} = Ce^{\frac{e^x}{k}}.$$

39. Fie $m > 1$ și natural. Cum f este o funcție descrescătoare pe $[m-1, m]$, avem

$$\inf_{m-1 \leqslant i \leqslant m} f(t) = f(m),\quad \sup_{m-1 \leqslant i \leqslant m} f(t) = f(m-1)$$

Cum lungimea intervalului $[m-1, m]$ este 1, rezultă:

$$f(m) \leqslant \int_{m-1}^{m} f(t)\,dt \leqslant f(m-1).$$

Pentru n natural și $n > 1$ avem:

$$(1)\quad \sum_{i=2}^{n} f(i) \leqslant \int_1^2 f(t)\,dt + \ldots + \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt = \int_1^n f(t)\,dt.$$

Dacă $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$ există și este finită, atunci

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \int_1^x f(t)\,dt = \int_1^\infty f(t)\,dt = l \text{ (finit)}.$$

Cum $f(t) > 0$, pentru orice $t \in [1, \infty)$, rezultă

$$\int_1^n f(t)\,dt \leqslant \int_1^\infty f(t)\,dt = l, \text{ pentru orice } n > 1.$$

Din această relație și din (1), rezultă că șirul cu termenul general

$$a_n^* = \sum_{i=2}^{m} f(i)$$

este majorat și deci șirul $a_n = f(1) + a_n^*$ este mărginit. Cum f este pozitivă, rezultă că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător, deci convergent.

b) Fie $f : [1, \infty) \to (0, \infty)$, dată de $f(t) = \dfrac{1}{t^a}$, cu $a > 1$.

Deoarece $f'(t) = -\dfrac{a}{t^{a+1}} < 0$, rezultă că funcția este descrescătoare. Deci:

$$\int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x \frac{dt}{t^a} = \frac{x^{1-a} - 1}{1 - a} \text{ și}$$

$$\lim_{x\to\infty} \int_1^x f(t)\,dt = \frac{1}{a-1} \text{ este finită.}$$

Condiția de la punctul a) fiind verificată, rezultă că șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a}$ este convergent pentru $a > 1$.

40. a) i) Domeniul de definiție: $x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$.

ii) Asimptote: $x = 0$, $x = -2$ (verticale), $y = 0$ (orizontală).

iii) Studiul primei derivate:

$$f'(x) = \frac{-2}{x(x+2)} < 0.$$

iv) Studiul derivatei a doua:

$$f''(x) = \frac{4(x+1)}{x^2(x+2)^2}.$$

v) Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	0
$f''(x)$		$-$	$-$			$+$	$+$

vi) Vezi graficul din figura XII.40.

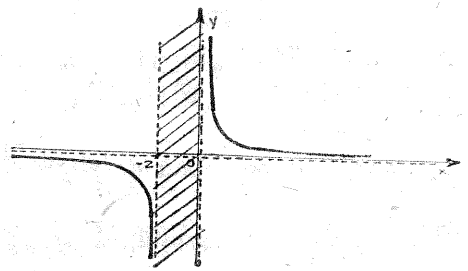


Fig. XII.40

b) $u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) = \ln\left[\left(1+\frac{2}{1}\right)\left(1+\frac{2}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{2}{n}\right)\right] =$

$$= \ln \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots (n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} = \ln \frac{(n+1)(n+2)}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = \infty.$$

c) Integrînd prin părți obținem:

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)dx = 3\ln\frac{4}{3}.$$

41. $\int_a^b x^x\,dx = \int_a^b e^{x\cdot\ln x}\,dx$ (deoarece $A = a^{\log_a A}$).

Pentru $x > 1$, $x - 1 < x \ln x < x(x-1)$ (1).

Într-adevăr, considerînd $f : (1, \infty) \to \mathbf{R}$, dată de $f(x) = x \cdot \ln x - x + 1$, avem:

$f'(x) = \ln x > 0$; f este strict crescătoare și prin urmare $f(x) > f(1) = 0$, deci $x \ln x > x - 1$, pentru orice $x > 1$.

Analog se va demonstra și $x \ln x < x(x-1)$.

Folosind dubla inegalitate (1) avem:

$$\int_a^b x^x\,dx = \int_a^b e^{x\ln x}\,dx \geqslant \int_a^b e^{x-1}\,dx = \frac{e^b - e^a}{e}.$$

$$\int_a^b x^x\,dx = \int_a^b e^{x\ln x}\,dx \leqslant \int_a^b e^{x^2-x}\,dx \leqslant \int_a^b e^{b^2-x}\,dx =$$

$$= e^{b^2}\int_a^b e^{-x}\,dx = -e^{b^2}\left(\frac{1}{e^b} - \frac{1}{e^a}\right) = (e^b - e^a)\,e^{b^2-a-b}.$$

Tot din relația (1) rezultă:

$$\frac{1}{x-1} < \frac{1}{\ln x} < \frac{x}{x-1} \text{ pentru orice } x > 1,$$

deci integrînd în dubla inegalitate obținem:

$$\int_a^b \frac{dx}{\ln x} \geqslant \int_a^b \frac{dx}{x-1} = \ln\frac{b-1}{a-1},$$

și respectiv:

$$\int_a^b \frac{dx}{\ln x} \leqslant \int_a^b \frac{x}{x-1}\,dx = b - a + \ln\frac{b-1}{a-1}.$$

Semnul egal se va realiza pentru $a = b$.

42. a) Ținînd seama de definiția funcției parte întreagă și anume $[x] = \begin{cases} k & \text{pentru } x \in [k,\ k+1) \\ -(k+1) & \text{pentru } x \in [-k-1,\ -k) \end{cases}$, $k \in \mathbf{N}$ rezultă că pentru orice număr natural k, $f(x) = k \sin \pi x$, pentru $x \in [k,\ k+1)$.

Cunoscînd graficul funcției $\sin \pi x$ și ținînd seama de semnul întregului k, graficul poate fi trasat ușor. Se observă că graficul este simetric față de punctul $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ și că minimele și maximele consecutive, pentru $x > 0$, sînt plasate pe dreptele $2x + 2y - 1 = 0$, respectiv $2x - 2y - 1 = 0$ (vezi graficul din figura XII.42).

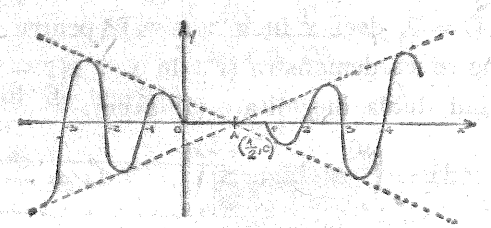


Fig. XII.42

b) Pentru orice l natural, se observă că $m_{2l} = 0$, deoarece $f(x) \geqslant 0$, pentru $x \in [2l,\ 2l+1)$ și $m_{2l+1} = f\left(2l + \frac{3}{2}\right) = -(2l+1)$. Deci:

$$S_n = \sum_{l=1}^{n} 2^{m_{2l}} - n + \sum_{l=1}^{n} 2^{m_{2l-1}} = \sum_{l=1}^{n} 2^{-(2l-1)},$$

care reprezintă suma unei progresii geometrice cu primul termen $\frac{1}{2}$ și rația $\frac{1}{4}$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{2}{3}$.

c) Din definiția funcției, pentru $x \in [k,\ k+1)$:

$f(x-2k) = [x-2k] \sin \pi(x-2k) = -k \sin \pi x = -f(x)$

și obținem:

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx = \int_{-k}^{-k+1} f(x-2k)\,dx = -\int_{-k}^{-k+1} f(x)\,dx.$$

Deci: $\int_{-n}^{n} f(x)dx = \int_{-n}^{-n+1} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n-1}\left[\int_k^{k+1} f(x)\,dx + \int_{-k}^{-k+1} f(x)\,dx\right] = \int_{-n}^{-n+1} f(x)\,dx = \frac{n}{\pi}\cos \pi x \Big|_{-n}^{-n+1} =$

$= \frac{2}{\pi} \cdot n(-1)^{n+1}$. Iar $a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{n(-1)^{n+1}}{\lambda^n}$.

Pentru $\lambda \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Pentru $\lambda \in [-1,\ 1] \setminus \{0\}$, șirul este divergent, fiind crescător în valoare absolută și cu termeni de semn alternant. Analog se va analiza cazul $x \in [-k-1, -k)$.

43. a) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1 \Rightarrow a = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty \Rightarrow 1 + b + c = 0 \\ \lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty \Rightarrow 4 + 2b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 2 \end{cases}$

b)

x	$-\infty$		-1		4		0		1		$\frac{4}{3}$		2		$-\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	$-$
$f(x)$	1	$\searrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	-8		$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow 1$
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$+$			$-$			$-$		$+$	$+$

(vezi graficul XII. 43).

c) $(C) \cap (\Gamma) = kx^4 - (5k+1)x^2 + 4k = 0$.

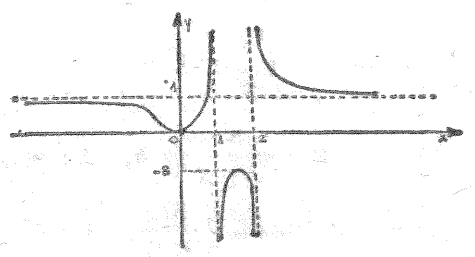


Fig. XII.43

Discuția ecuației $kx^4 - (5k+1)x^2 + 4k = 0$ se face sau cu ajutorul șirului lui Rolle sau prin relațiile lui Viète:

k	Discuția rădăcinilor
$k \in (-\infty, -1)$	4 rădăcini reale, cîte 2 opuse
$k = -1$	4 rădăcini reale $x_1 = x_2$, $x_3 = x_4$
$k \in (-1, 0)$	2 perechi de rădăcini complexe conjugate
$k = 0$	ecuația degenerează în ecuație de gradul doi
$k \in (0, \infty)$	4 rădăcini reale

d) Din condițiile $y_1 = y_2$ și $y_1' = y_2'$, eliminîndu-se parametrul k, se obține ecuația $x(x^4 - 4) = 0$, cu rădăcinile reale $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$.

Punctele de tangență sînt:

$$P_1(-\sqrt{2},\ 3\sqrt{2} - 4),\ P_2(\sqrt{2},\ -4 - 3\sqrt{2}).$$

Pentru $x = \pm\sqrt{2}$ găsim $k = -1$.

Curba (Γ) pentru $k = -1$ devine parabola

$$y = -x^2 - 3x - 2,$$

În punctul $P_1 : y = (2\sqrt{2} - 3)x$.

În punctul $P_2 : y = -(3 + 2\sqrt{2})\,x$.

e) $A = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} (-x^2 - 3x - 2)\,dx = \frac{1}{6}$.

44. a) $j(x) = x - 2 + \frac{3}{x+3} \notin \mathbf{N}$, căci pentru orice x natural, $x + 3 \neq 0$ și fracția $\frac{3}{x+3} \leqslant 1$

b) $f\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \left(1 + \frac{k}{n}\right)^2 + 5\left(1 + \frac{k}{n}\right) + 6 =$

$$= 12 + \frac{7k}{n} + \frac{k^2}{n^2}.$$

$$h(n) = \frac{95n}{6} - 12n - \frac{7}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 =$$

$$= \frac{95n}{6} - 12n - \frac{7}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n^2}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

$$= -4 - \frac{1}{6n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} h(n) = -4.$$

c) Pentru $x < -2$, $g'(x) = 2(x^2 + 5x + 6)(2x + 5)$, deci există în fiecare punct. Pentru $x \geqslant -2$, $g'(x) = 2\ln(x^2 + 5x + 7)\cdot\frac{2x+5}{x^2+5x+7}$, deci există în fiecare punct deoarece $x^2 + 5x + 7 > 0$. În punctul $x = -2$ funcția este derivabilă, $g'(-2) = 0$. De altfel, $g'(x)$ este și continuă.

d) Din egalitatea $f(x) = (x+2)(x+3)$ deducem:

$$i(x) = \ln f(x) = \ln(x+2) + \ln(x+3)$$

$$i'(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}$$

$$i''(x) = \frac{-1}{(x+2)^2} + \frac{-1}{(x+3)^2}$$

$$i'''(x) = \frac{1\cdot 2}{(x+2)^3} + \frac{1\cdot 2}{(x+3)^3}$$

.....

$$i^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(x+2)^n} + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+3)^n}. \quad \text{(a)}$$

Derivînd pe $i^{(n)}(x)$, se obține:

$$i^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x+3)^{n+1}}.$$

egalitate care se obține și din $i^{(n)}(x)$ atribuind lui n valoarea

$n+1$, ceea ce dovedește că relația (a) este adevărată pentru orice n natural.

45. a) $y(m) = \int_0^1 |x^4 - (1+m)x^3 + mx^2| \, dx$

și $y(m)$ are trei expresii:

$$y_1(m) = \frac{3-5m}{60} \text{ dacă } m \leqslant 0$$

$$y_2(m) = \int_0^m [x^4 - (1+m)x^3 + mx^2]dx + \int_m^1 [-x^4 + (1+m)x^3 - mx^2]dx = \frac{1}{60}(-6m^5 + 10m^4 - 5m + 3); \; m \in (0, 1)$$

$$y_3(m) = \frac{5m-3}{60} \text{ dacă } m \geqslant 1.$$

b) și c): $y_2'(m) = \frac{1}{12}(-6m^4 + 8m^3 - 1)$ are două rădăcini reale: $m_1 \in (0, 1)$, $m_2 \in (1, 2)$.

Cum $y_2(m)$ este definit pentru $m \in (0, 1)$, rezultă că $m_0 = m_1$ din tabloul:

m	0		m_1		1
$y_2'(m)$		$-$ $-$	0	$+$ $+$	
$y_2(m)$	$\frac{1}{20}$	$\searrow$	n	$\nearrow$	$\frac{1}{30}$

d) Cum $12\, y_2'(0, 6) = -0,05$, se consideră $12\, y_2'(0,62) = 0,02$.

$$m_c \approx 0,6 + \frac{0,02 \cdot 0,05}{0,02 + 0,05} \approx 0,6143.$$

$$m_t \approx 0,62 - \frac{0,02}{-24 \cdot 0,62^2(0,62-1)} \approx 0,62 - 0,0058 \approx 0,6142,$$

unde m_c reprezintă valoarea aflată prin metoda coardei, iar m_t prin metoda tangentei, deci $m_0 \approx 0,614$.

46. a) Curba prezintă ramuri infinite pentru valori finite ale lui x, care dau valori infinite pentru $f(x)$, sau valori finite pentru y, care dau valori infinite pentru x. Deci pentru $x \to \pm\infty$, $y = \frac{1}{2}$ este o asimptotă orizontală. Ecuația $2x^2 - 2x + a = 0$ admite rădăcini, dacă $1 - 2a \geqslant 0 \Rightarrow a \leqslant \frac{1}{2}$. Deci, valorile lui a, după condițiile ramurilor infinite ale curbei, sînt: $a > \frac{1}{2}$, $a \leqslant \frac{1}{2}$.

b) $y' = \frac{2(x+1)(a+1-3x)}{(2x^2-2x+a)^2}$ dacă $y' = 0 \Rightarrow x_1 = -1$

și $x_2 = \frac{a+1}{3}$.

Dacă $\frac{a+1}{3} > -1$, adică $a < -4$, $x = -1$ corespunde unui minim și $x = \frac{a+1}{3}$ unui maxim, și în caz contrar, dacă $a > -4$.

c) Pentru $a = 0$, $y = \frac{(x+1)^2}{2x(x-1)}$, $y' = \frac{2(x+1)(1-3x)}{4x^2(x-1)^2}$

x	$-\infty$	-1		0		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	$-$
y	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	$\searrow$ $\frac{1}{2}$

Vezi graficul XII.46 a.

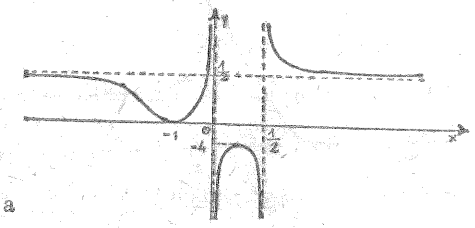


Fig. XII.46 a

Pentru $a=2$, $y=\dfrac{(x+1)^2}{2(x^2-x+1)}$, $y'=\dfrac{3(x+1)(1-x)}{2(x^2-x+1)^2}$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$ $-$	0	$+$	0	$-$	$-$
y	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

Vezi graficul XII. 46 b.

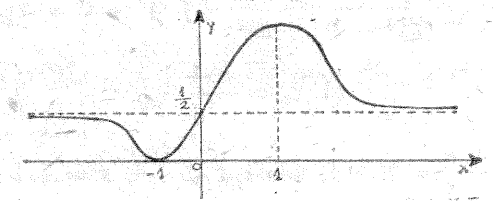


Fig. XII. 46 b

Pentru $a=\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{2(x+1)^2}{(2x-1)^2}$, $y'=-\dfrac{12(x+1)}{(2x-1)^3}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$-$ $-$	
y	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$ $\searrow$	$\frac{1}{2}$

Vezi graficul XII. 46 c.

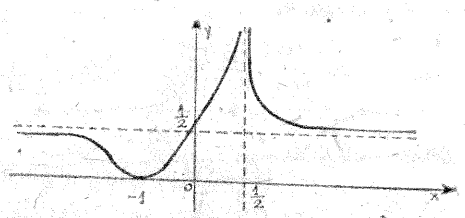


Fig. XII. 46 c

d) Cum numărătorul se divide prin $x+1$, atunci și numitorul se va divide prin $x+1$, deci

$$a+4=0 \Rightarrow a=-4 \text{ și } y=\frac{(x+1)^2}{2(x+1)(x-2)},$$

și curba figurativă se va descompune într-o dreaptă de ecuație $x+1=0$ și o hiperbolă echilateră de ecuație:

$$y=\frac{x+1}{2(x-2)},$$

având ca asimptote dreptele de ecuație $x=2$, $y=\dfrac{1}{2}$.

Vezi graficul XII. 46 d.

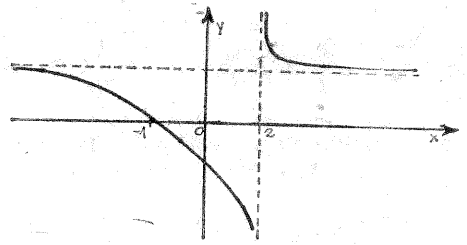


Fig. XII. 46 d

47. i) Vom calcula prima derivată:

$$f'(x)=2\alpha x+\beta-\frac{1}{x+1}=\frac{2\alpha x^2+(2\alpha+\beta)x+\beta-1}{x+1}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 2\alpha x^2+(2\alpha+\beta)x+\beta-1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(2\alpha+\beta)\pm\sqrt{(2\alpha+\beta)^2+8\alpha(1-\beta)}}{4\alpha}.$$

Condițiile verificate de parametrii reali α și β sînt:

$$\Delta=(2\alpha-\beta)^2+8\alpha>0 \Rightarrow \beta>2(\alpha+\sqrt{-2\alpha})$$

și $\beta<2(\alpha-\sqrt{-2\alpha})$, cu $\alpha<0$.

ii) $f(x)=-x^2+x-\ln(x+1)$

Domeniul de definiție: $x+1>0 \Rightarrow x\in(-1,\ \infty)$

Funcția este fără paritate,
Asimptote: $x = -1$, verticală.

$$f'(x) = \frac{-x(2x+1)}{x+1}; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{-2x^2 + 4x + 1}{(x+1)^2}; \quad f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}.$$

Tabloul de variație:

x	-1		$-\frac{1}{2}$		x_1		0		$+\infty$
$f'(x)$	∄	$-$	0	$+$			0	$-$	
$f(x)$	∄	$+\infty$	↘	$-\frac{3}{4} + \ln 2$	↗	$-\frac{1}{20}$	↗	0	↘ $-\infty$
$f''(x)$	∄		$+$	$+$	$+$	0		$-$	$-$

Vezi graficul XII. 47.

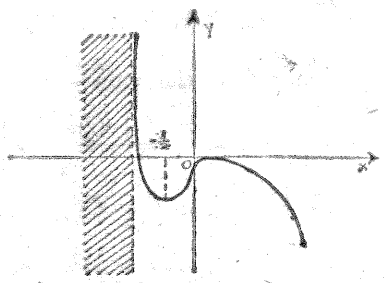


Fig. XII. 47

iii) $A = \left| \int_{-1/2}^{0} [-x^2 + x - \ln(x+1)]\,dx \right| = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{8}.$

Cum, în cazul de față, graficul este sub abscisă, atunci valoarea ariei este negativă, deci pentru a trece peste acest impediment, vom considera modulul ariei.

48. i) $f(x) = e^x - 1 - x$; $f'(x) = e^x - 1$; $f''(x) = e^x > 0$.
Aplicînd o consecință a teoremei lui Lagrange, și anume:

fie $f:(a,\infty) \to \mathbf{R}$, f derivabilă; $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = 0$.

Dacă $f'(x) > 0$, atunci f este funcție crescătoare și $f(x) > f(a) = 0 \Rightarrow f(x) > 0$, iar pentru rezolvarea punctului vom particulariza pe $a = 0$

Putem spune că: $f'(0) = 0$

$$f''(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0, \text{ pentru } x > 0.$$

Cum $f(0) = 0$ și $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ funcție crescătoare și $f(x) > f(0) = 0$ pentru $x > 0$

ii) Considerînd $g(x) = e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)$,
atunci se observă, că $g^{(n+1)}(x) = e^x > 0$, deci $g^{(n)}(x) > 0$ pentru $x > 0$ și repetînd raționamentul (consecința menționată mai sus) de n ori, obținem $g(x) > 0$ pentru $x > 0$.

iii) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + C_n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots + C_n^k \frac{1}{n^k} + \ldots +$

$$+ C_n^n \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n!} + \ldots + \frac{n!}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} < 1 +$$

$$+ \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} = a_n, \left[\text{unde } \frac{1}{n^k} C_n^k = \right.$$

$$\left. = \frac{1}{k!} \frac{(n-k+1)\ldots n}{n^k} = \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\left(1 - \frac{k-2}{n}\right) \ldots < \frac{1}{k!}\right].$$

Cum: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < e$ și trecînd la limită în dubla inegalitate, obținem:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = e.$$

iv) $\frac{1}{(n+1)!}+\ldots+\frac{1}{(2n)!}=a_{2n}-a_n$ și deci:

$$\lim_{n\to\infty}(a_{2n}-a_n)=\lim_{n\to\infty}a_{2n}-\lim_{n\to\infty}a_n=\mathrm{e}-\mathrm{e}=0$$

$$\text{și } \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)!}+\ldots+\frac{1}{(2n)!}\right]=0.$$

v) $f(x)=\mathrm{e}^x-x-1$, $f'(x)=\mathrm{e}^x-1$, $f''(x)=\mathrm{e}^x$,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{\mathrm{e}^x}}{\frac{1}{\mathrm{e}^x(x+1)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{\mathrm{e}^x}}{\frac{-\mathrm{e}^x(x+2)}{[\mathrm{e}^x(x+1)]^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x-(x+1)^2}{(x+1)(x+2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x-2(x+1)}{2x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x-2}{2}=+\infty \quad \text{și} \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	

49. i) $\begin{vmatrix}2&1&1\\1&m&1\\1&1&2\end{vmatrix}=3m-2\Rightarrow m\neq\frac{2}{3}$

$$y_1(x,m)=\frac{(1-m)\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+2m-1}{3m-2}$$

$$y_2(x,m)=\frac{-\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^x-1}{3m-2}$$

$$y_3(x,m)=\frac{(2m-1)\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+1-m}{3m-2}$$

ii) $\Delta=8m^2-12m+5>0$, deci pentru orice m avem rădăcini reale și distincte.

$y_1(x,-1)=0\Rightarrow 2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x-3=0$. Notînd $\mathrm{e}^x=v>0$ și rezolvînd ecuația de gradul doi $2v^2-v-3=0$, obținem

$$x=\ln\frac{3}{2},\quad f(x)=y_1(x,1)=1-\mathrm{e}^x.$$

iii) $A=\int_{-1}^{0}(1-\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

$$V=\pi\int_{-1}^{0}(1-\mathrm{e}^x)^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\mathrm{e}^2}(-\mathrm{e}^2+4\mathrm{e}-1).$$

50. i) Se rezolvă ecuația: $f'(x)=0$, care are ca rădăcini punctele: $x_1=m$, $x_2=2m$. Vom considera cazurile:

a) $C_1\Rightarrow x_1<x_2\Rightarrow m<2m\Rightarrow m>0$.

b) $C_2\Rightarrow x_2<x_1\Rightarrow 2m<m\Rightarrow m<0$.

$f(x_1)=f(m)=5(m-6)(m^2+6m+36)$, iar semnul lui $f(m)$ coincide cu semnul binomului $(m-6)$.

$f(x_2)=f(2m)=4(m-3\sqrt[3]{10})(m^2+3\sqrt[3]{10}m+9\sqrt[3]{100})$ iar semnul lui $f(2m)$ coincide cu semnul lui $m-3\sqrt[3]{10}$.

ii) Se va face discuția:

Pentru $m>0$, $m\in(0,3)$ ecuația are o singură rădăcină reală cuprinsă în intervalul $(2m,\infty)$; pentru $m\in(3\sqrt[3]{10},\infty)$ ecuația admite o singură rădăcină reală.

Pentru $m<0$, ecuația admite o singură rădăcină reală în intervalul (m,∞).

Mai putem demonstra ținînd cont de o consecință a proprietății lui Darboux: $x_0\in(a,b)$ și x_0 este rădăcina funcției f, adică $f(x_0)=0\Leftrightarrow f(a)\cdot f(b)<0$.

51. i) Substituim $e^x-1=\frac{1}{y}$ și pentru $x\to 0$, atunci $y\to 0$ și $e^x=1+\frac{1}{y}\Rightarrow x=\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)$.

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\lim_{y\to0}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)^y}=\frac{1}{\ln\mathrm{e}}=1.$$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$ și funcția $f(x)$ este continuă în punctul $x = 0$.

ii) Funcția $g(x) = e^x$ este derivabilă pe toată mulțimea numerelor reale și $g'(x) = e^x$, deci $g'(0) = e^0 = 1$.

Conform definiției derivatei în punctul $x = 0$ avem

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

iii) $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)e^x + 1}{x^2} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{(x^2 - 2x + 2)e^x - 2}{x^3} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, $\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, unde în calcule s-a ținut cont de substituția: $u = e^x - 1 \Rightarrow x = \ln(1 + u)$ cu $u \to 0$.

$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - 1}{x} = 0.$

x	$-\infty$			0			$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	$\|$	$+$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		1	$\nearrow$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	$+$	$\|$	$+$	$+$	

52. i) $f'(x) = \dfrac{m(x^2 - nx + 1) - (mx - 2)(2x - n)}{(x^2 - nx + 1)^2}$

$f'(0) = 0 \Rightarrow m - 2n = 0$ și $f'(2) = 0 \Rightarrow 3m + 2n - 8 = 0$.

Rezolvînd sistemul obținem: $m = 2$, $n = 1$.

$$f(x) = \frac{2(x-1)}{x^2 - x + 1} \Rightarrow f'(x) = -2 \cdot \frac{x^2 - 2x}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

ii) $g(x) = 2\dfrac{|x-1|}{x^2 - x + 1} = \begin{cases} \dfrac{2(x-1)}{x^2 - x + 1}, & x \geqslant 1, \\ \dfrac{-2(x-1)}{x^2 - x + 1}, & x < 1, \end{cases}$

g este continuă pe tot domeniul de definiție.

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x(x-2)}{(x^2 - x + 1)^2} & \text{pentru } x < 1 \\ \dfrac{-2(x-2)x}{(x^2 - x + 1)^2} & \text{pentru } x \geqslant 1 \end{cases}$$

și se observă că $\lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} g'(x) = -2$; $\lim_{\substack{x\to 1 \\ x\geqslant 1}} g'(x) = 2$, deci punct unghiular în $(1, 0)$.

53. i) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4 - x^2} \text{ pentru } x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \setminus \{\pm 2\} \\ \dfrac{1}{x^2 + 2} \text{ pentru } x \in (-1, 1). \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{(4 - x^2)^2}, & x \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup [1, 2) \cup (2, \infty) \\ \dfrac{-2x}{(2 + x^2)^2}, & x \in (-1, 1) \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to -1 \\ x<-1}} f'(x) = -\frac{2}{9}; \quad \lim_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} f'(x) = \frac{2}{9};$$

în punctul $\left(-1, \dfrac{1}{3}\right)$ graficul admite punct unghiular.

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f'(x) = -\frac{2}{9}; \quad \lim_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} f'(x) = \frac{2}{9},$$

în punctul $\left(1, \dfrac{1}{3}\right)$ graficul admite punct unghiular.

iii) Intersectînd graficul funcției cu dreapta variabilă $y = \lambda$, obținem:

λ	Discuție
$\lambda < 0$	$x_1 < -2,\ x_2 > 2$
$0 \leqslant \lambda < \frac{1}{3}$	nu există rădăcini reale
$\lambda = \frac{1}{3}$	$x_1 = -1,\ x_2 = 1$
$\frac{1}{3} < \lambda < \frac{1}{2}$	4 rădăcini reale
$\lambda = \frac{1}{2}$	3 rădăcini reale
$\frac{1}{2} < \lambda$	2 rădăcini reale

iv) Cum $f(x) > 0$, pentru $x \in (-1, 1)$, obținem:

$$A = \int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}} f(x)\,dx = \int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}} \frac{1}{x^2+2}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{12}\pi.$$

54. i) Pentru $a \in (0, 1)$ avem $1 - a > 0$, $1 + a > 0$, deci $f(x)$ este definită pentru orice x real.

$$f(x) = \begin{cases} (-x+1)^{1-a}(-x-1)^{1+a}, & x \in (-\infty, -1) \\ (-x+1)^{1-a}(x+1)^{1+a}, & x \in [-1, 1]. \\ (x-1)^{1-a}(x+1)^{1+a}, & x \in (1, \infty) \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -(1-a)(-x+1)^a(-x-1)^{1+a} - (-x+1)^{1-a}(-x-1)^a(1+a), \\ \qquad \text{pentru } x \in (-\infty, -1) \\ -(1-a)(-x+1)^{-a}(x+1)^{1+a} + (1+a)(-x+1)^{1-a}(x+1)^a, \\ \qquad \text{pentru } x \in [-1, 1] \\ (1-a)(x-1)^{-a}(x+1)^{1+a} + (1+a)(x-1)^{1-a}(x+1)^a, \\ \qquad \text{pentru } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

În punctul $x = 1$, $f'(1) = \infty$.

$$f(\pm 1) = 0;\ f'(-1) = 0;\ f(0) = 1;\ f(\pm\infty) = \infty$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1,\ x = a$$

x	$-\infty$		-1		0		a		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		0	$+$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\nearrow$	M	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Unde $M = (1-a)^2\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^a$.

ii) Pentru $a = \frac{1}{2}$; $f(x) = |1 - x|^{1/2}\,|x + 1|^{3/2}$.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{(x^2-1)(x+1)^2}, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty). \\ \sqrt{(1-x)(x+1)^3}, & x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty,\ f(0) = 1,\ f(\pm 1) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)^2(2x-1)}{\sqrt{(x^2-1)(x+1)^2}}; & x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ (1-2x)\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}; & x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$; $x = -1$. În punctul $(1, 0)$ graficul admite un punct de întoarcere.

Același tabel ca precedentul, dar pentru $a = \frac{1}{2}$.

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-2x-1}{\sqrt{(x^2-1)(x-1)^2}}, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty). \\ \dfrac{2x^2-2x-1}{\sqrt{(1-x^2)(1-x)^2}}; & x \in (-1, 1). \end{cases}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Graficul funcției este XII.54.

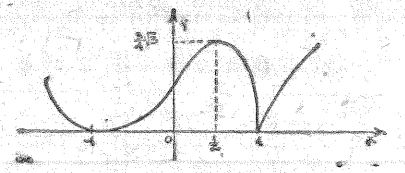


Fig. XII.54

iii) $V = \pi \int_0^1 (1-x)(x+1)^3 dx + \pi \int_1^2 (x-1)(x+1)^3 dx = 11\pi.$

55. i) $\sin x \geq 0 \Rightarrow x \in \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} [2k\pi,\ \pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$

Ecuația primei bisectoare: $y = x$; $x\sqrt{\sin x} = x$ avem $x = 0$ sau $\sin x = 1$, deci $x = 0$, $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$

$$y' = \sqrt{\sin x} + x \cdot \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} \quad \text{și} \quad \lim_{x\to 0} y' = 0,$$

deci tangenta la curbă este axa Ox și nu bisectoarea axelor.

În punctele $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avem $y' = 1$, deci tangenta este prima bisectoare.

ii) Fie $y_1 = x\sqrt{\sin x}$ și $y_2 = x$.

Cum $y_1 \leqslant y_2$, atunci graficul funcției y rămîne sub prima bisectoare pentru $x > 0$.

iii) Fie $y_1' = 0$, deci $2\sin x + x\cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{x}{2}$

$$\text{cu } y' = \frac{2\sin x + x\cos x}{2\sqrt{\sin x}} = \frac{g(x)}{2\sqrt{\sin x}}.$$

Numitorul este pozitiv, iar pe intervalul $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ avem $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 > 0$, $g(\pi) = -\pi$; deci rădăcina primei derivate este un maxim $x_1 \in \left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$.

Analog, dacă $x \in (2\pi,\ 3\pi)$, atunci extremul este

$$x_2 > 2\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Tabloul de variație:

x	0		x_1		π		2π		x_2		3π
y'	0	$+$	0	$-$	$-\infty$	$\|$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-$
y	0	$\nearrow$	max	$\searrow$	0	$\|$	0	$\nearrow$	max	$\searrow$	0

Vezi graficul XII.55.

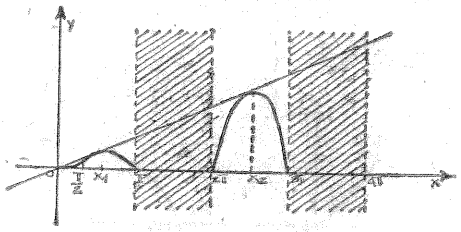


Fig. XII.55

iv) $V = \pi \int_0^{\pi} x^2 \sin x\, dx = \pi(\pi^2 - 4)$, unde integrarea s-a efectuat de două ori prin părți.

56. i) $f(x) = x^n(x^n - 2)$.

Dacă $n = 2k$ = par $\Rightarrow f(x) = x^{2k}(x^{2k} - 2)$.

x	$-\infty$		$-\sqrt[2k]{2}$		$\sqrt[2k]{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

Dacă $n = 2k + 1$ = impar $\Rightarrow f(x) = x^{2k+1}(x^{2k+1} - 2)$

x	$-\infty$		0		$\sqrt[2k+1]{x}$		$+\infty$
$f(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

ii) Trebuie ca $|f(x) - \alpha| = 0$, $\alpha = f(1) \Rightarrow \alpha = -1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{|x^{2n} - 2x^n + 1|}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^n - 1)^2}{(x-1)^2} = n^2.$$

iii) $y = x^6 - 2x^3$ — nu are asimptote

$y' = 6x^2(x^3 - 1)$; $y'' = 6x(5x^3 - 2)$; $y'' = 0 \Rightarrow x = 0$ și $x = \sqrt[3]{\frac{2}{5}}$.

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$
y''		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	

Vezi graficul XII.56.

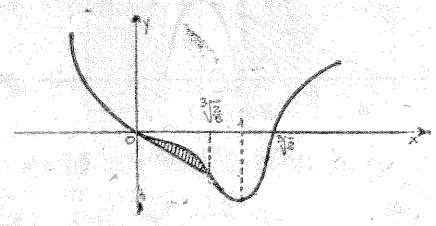


Fig. XII.56

iv) $(OP) : y = \dfrac{f\left(\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\right)}{\sqrt[3]{\frac{2}{5}}} \cdot x \Rightarrow y = -\dfrac{16}{25} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{5}{2}} \cdot x$

$$A = \int_0^{\sqrt[3]{\frac{2}{5}}} \frac{f\left(\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\right)}{\sqrt[3]{\frac{2}{5}}} x\,dx - \int_0^{\sqrt[3]{\frac{2}{5}}} (x^6 - 2x^3)\,dx =$$

$$= -\frac{16}{25} \cdot \sqrt[3]{\frac{5}{2}} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^4}{2}\Bigg|_0^{\sqrt[3]{\frac{2}{5}}}.$$

57. i) $x^2 + 2px + q = 0$ are rădăcini imaginare, numai dacă $p^2 - q < 0$.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2ax - 2ap - q}{(x - a)^2}.$$

Discriminantul numărătorului: $\Delta = a^2 + 2ap + q > 0$, oricare ar fi a, deoarece $p^2 - q < 0$, deci derivata admite două rădăcini reale și distincte și $f'(x)$ admite două schimbări de semn.

ii) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2px + 5}{x - a}$; $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2ax - 2ap - 5}{(x - a)^2}$.

$$f'(-1) = 0 \text{ și } f'(3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a - ap - 2 = 0 \\ 3a + ap - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 1,\ p = -1, \text{ deci } f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1};$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}.$$

x	$-\infty$		-1		0	1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$			$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Graficul admite ca asimptote dreptele de ecuație: $x = 1$ verticală; $y = x - 1$, oblică.
(vezi graficul XII.57).

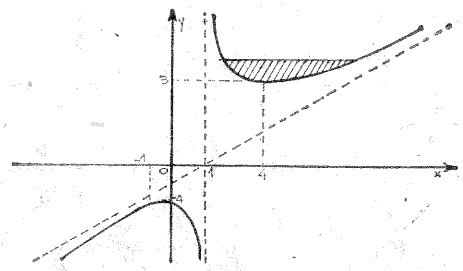


Fig. XII.57

iii) $\frac{x^2-2x+5}{x-1}=5\Rightarrow x_1=2,\ x_2=5.$

$$A=\int_2^5\left(5-\frac{x^2-2x+5}{x-1}\right)dx=\int_2^5\left(-x+6-\frac{4}{x-1}\right)dx=$$

$$=\frac{15}{2}-8\ln 2.$$

58. i) $f'(x)=\frac{x^2(9-ax^2)}{(3-ax^2)^2}.$

$$f''(x)=\frac{2x[2a(a-1)x^4+3ax^2-27]}{(3-ax^2)^3}.$$

$f'(1)=2,\ f''(1)=-6, f(1)=\frac{1}{2}\cdot\ 8\sin^2 3x+5\sin^2 2x+$

$+5\sin^2 x=0$; dar $\sin 3x=\sin x(3-4\sin^2 x)$; $\sin 2x=$

$=2\sin x\cos x\Rightarrow\sin^2 x[8(3-4\sin^2 x)^2+20\cos^2 x+5]=0$

$$\sin^2 x(128\sin^4 x-212\sin^2 x+97)=0.$$

Ecuația bipătrată se rezolvă făcînd substituția $\sin^2 x=$ $=y\in[0,1]$, apoi mulțimea soluțiilor ecuației se află reunind mulțimile obținute din soluțiile fiecărui factor în parte.

ii) $A=\begin{pmatrix}3\sqrt{\lg x} & 0 & 1\\ 2\lg\frac{1}{x} & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

$$\det A=6\cdot\sqrt{\lg x}-2\lg x-1=-2\left(\sqrt{\lg x}-\frac{1}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\sqrt{\lg x}-1\right)=0\Rightarrow b=\frac{1}{2}.$$

iii) $I=\int_{b-10}^{\frac{b}{10}}\frac{x^2}{3+x^2}\,dx=\int_{b-10}^{\frac{b}{10}}\left(1-\frac{6}{6+x^2}\right)dx=$

$$=\left(x-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_{b-10}^{\frac{b}{10}}=$$

iv) Derivata unei matrici se calculează derivînd fiecare element al matricei în parte:

1) Dacă s-a stabilit domeniul de derivabilitate, și anume intersectînd domeniul de derivabilitate al fiecărui element în parte.

2) Dacă elementele matricei sînt funcții derivabile.

v) Reamintesc modul de calcul al derivatei unui determinant: fie $\det A=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(-1)^{f(\sigma)}a_{1\sigma(1)}(x)\dots a_{n\sigma(n)}(x)$ unde $\mathfrak{S}_n$ este grupul permutărilor de ordinul n, $\sigma(i)\in\sigma$, $i\in\{1,2,\dots,n\}$, cu $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n)\end{pmatrix}$, $a_{i\sigma(i)}$ sînt funcții derivabile, $f:\mathfrak{S}_n\to\{1,2\}$ cu

$$f(\sigma)=\begin{cases}1 \text{ dacă } \sigma \text{ este o permutare impară}\\ 2 \text{ dacă } \sigma \text{ este o permutare pară.}\end{cases}$$ Deci:

$$(\det A)'=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(-1)^{f(\sigma)}a_{1\sigma(1)}(x)\dots a'_{i\sigma(i)}(x)\dots a_{n\sigma(n)}(x)\Big)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix}a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x)\\ \dots & \dots & \dots\\ a'_{i1}(x) & \dots & a'_{in}(x)\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x)\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\det A)'=\begin{vmatrix}3\cdot\frac{1}{x\cdot\ln 10\cdot 2\sqrt{\lg x}} & 0 & 0\\ -2\lg x & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}3\sqrt{\lg x} & 0 & 1\\ -2\cdot\frac{1}{x\ln 10} & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3\sqrt{\lg x} & 0 & 1\\ -2\lg x & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{3}{x\ln 10\cdot 2\sqrt{\lg x}}-\frac{2}{x\ln 10}+0=\frac{3-4\sqrt{\lg x}}{2x\sqrt{\lg x}\cdot\ln 10}.$$

59. ii) $L=\lim\limits_{m\to 0}\dfrac{\int_0^m\left(x^2+8x-8+\dfrac{8}{x+1}\right)\mathrm{d}x}{m^3}=$

$$=\lim_{m\to 0}\frac{\dfrac{m^3}{3}+4m^2-8m+8\ln(m+1)}{m^3}=3.$$

Pentru a calcula limita, se aplică de trei ori regula lui l'Hospital pentru cazul de nedeterminare „$\frac{0}{0}$“.

iii) $A=\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{x^3}{3}+4x^2-8x+8\ln|x+1|\right)\Big|_2^3=$

$=\frac{55}{3}+24\ln 2.$

$A_1=\int_{-5}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$. Determinarea ariei A_1 nu este posibilă deoarece funcția nu este definită în punctul $-1\in[-5,\ 5]$.

60. i) Cum $y=x+10$ este asimptotă oblică rezultă că:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-x]=10.\end{cases}$$

Rezolvînd sistemul, determinăm valorile constantelor a și b.

iii) $A=\int_{-6}^{-2}\dfrac{(x+6)(x+2)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-6}^{-2}\left(x+10+28\cdot\dfrac{1}{x}+\right.$

$\left.+24\cdot\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{x^2}{2}+10x+28\ln|x|-24\cdot\dfrac{1}{x}\right)\Big|_{-6}^{-2}.$

61. i) $y=x+p-1\Rightarrow p=2.$

ii) $x=-1\pm\sqrt{-p}$. Dacă $\Delta=-p>0$, atunci funcția admite două puncte de extrem.

iii) dacă $p=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-2$ (se ține cont că numitorul este un divizor al numărătorului).

iv) $A=\left|\int_2^3\dfrac{x^2+2x-1}{x+1}\,\mathrm{d}x-\int_2^3(x+1)\,\mathrm{d}x\right|=$

$=\left|\int_2^3\dfrac{-2}{x+1}\,\mathrm{d}x\right|=\left|-2\ln\dfrac{4}{3}\right|.$

62. $f(x)=|\sqrt{x+1}-2|+|\sqrt{x+1}-3|.$

$$f(x)=\begin{cases}-2\sqrt{x+1}+5 & \text{pentru } x\in[-1,\ 3)\\ 1 & \text{pentru } x\in[3,\ 8]\\ 2\sqrt{x+1}-5 & \text{pentru } x\in(8,\ \infty).\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} & \text{pentru } x\in(-1,\ 3)\\ 0 & \text{pentru } x\in[3,\ 8]\\ \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} & \text{pentru } x\in(8,\ \infty).\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{(x+1)^{3/2}} & \text{pentru } x\in(-1,\ 3)\\ 0 & \text{pentru } x\in[3,\ 8]\\ -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{(x+1)^{3/2}} & \text{pentru } x\in(8,\ \infty).\end{cases}$$

$A=\int_1^3(-2\sqrt{x+1}+5)\mathrm{d}x+\int_3^8 1\,\mathrm{d}x+\int_8^{10}(2\sqrt{x+1}-5)\,\mathrm{d}x,$

unde $\int\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x=\int(x+1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C.$

63. a) $f(x)=\begin{cases}-x\cdot e^{\frac{1}{-x+2}} & \text{pentru } x\in(-\infty,\ 0)\\ x\cdot e^{\frac{1}{-x+2}} & \text{pentru } x\in[0,\ 2)\\ x\cdot e^{\frac{1}{x-2}} & \text{pentru } x\in(2,\ \infty).\end{cases}$

Domeniul de definiție: $x\in\mathbf{R}\setminus\{2\}$.

f) Asimptote: $x = 2$, verticală; $y = -x + 1$, oblică, pentru $x \to -\infty$; $y = x + 1$, oblică, pentru $x \to +\infty$.

ii) $$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{e^{\frac{1}{-x+2}}}{(-x+2)^2} \cdot (x^2 - 6x + 4), & x \in (-\infty, 0) \\ \dfrac{e^{\frac{1}{-x+2}}}{(-x+2)^2} \cdot (x^2 - 6x + 4), & x \in [0, 2). \\ \dfrac{e^{\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^2} \cdot (x^2 - 5x + 4), & x \in (2, \infty). \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \notin (2, \infty) \\ x = 4 \end{cases}$$

În punctele 0 și 2 funcția nu este derivabilă, deci: în $x = 0$, $f'_s(0) = -\sqrt{e}$; $f'_d(0) = \sqrt{e}$; și în punctul de coordonate (0, 0) graficul admite un punct unghiular, iar în $x = 2$ graficul admite un punct de întoarcere.

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-\sqrt{e}$	$\sqrt{e}$	$+$	$+$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$	$\searrow 4\sqrt{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vezi graficul XII.63.

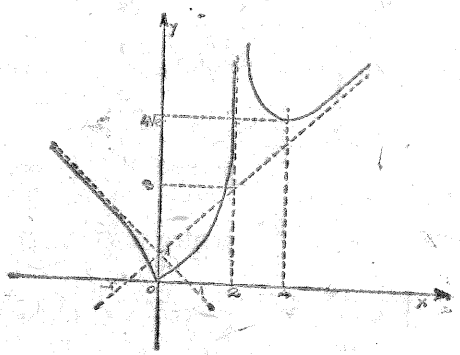


Fig. XII.63

b)

λ	Discuția rădăcinilor
$\lambda \in (-\infty, 0)$	rădăcini complexe conjugate
$\lambda = 0$	$x_1 = x_2 = 0$
$\lambda \in (0, 4\sqrt{e})$	$x_1 \in (-\infty, 0)$, $x_2 \in (0, 2)$
$\lambda = 4\sqrt{e}$	$x_1 \in (-\infty, 0)$, $x_2 \in (0, 2)$, $x_3 = x_4 = 4$
$\lambda \in (4\sqrt{e}, \infty)$	$x_1 \in (-\infty, 0)$, $x_2 \in (0, 2)$, $x_3 \in (2, 4)$ $x_4 \in (4, \infty)$

64. i) $x \in [0, 1]$; $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(2-x)}} > 0$;

$$f''(x) = \frac{x-1}{[x(2-x)]^{3/2}} \leqslant 0.$$

x	0				1
$f'(x)$	$\|$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$			$\frac{3\pi}{2}$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0

$f(0) = 2k\pi$; $f(1) = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Vom trasa mai întîi un detaliu de grafic ($k = 0$), apoi vom extinde detaliul de grafic pe tot codomeniul. Vezi graficele XII.64 a și XII.64 b.

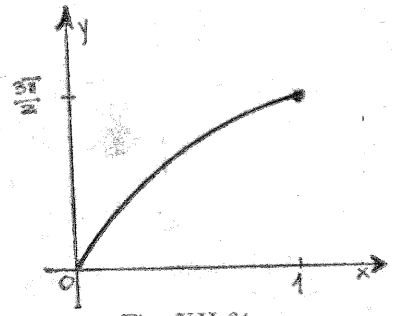


Fig. XII.64 a

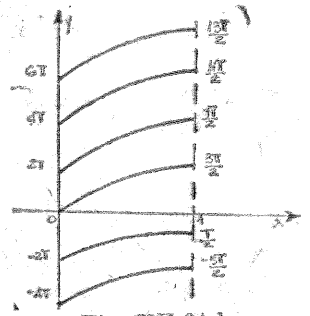


Fig. XII.64 b

ii) Ecuațiile tangentelor la grafic sînt:

în punctul $(0, 0) \Rightarrow y = f'(0)\cdot x \Rightarrow y = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\cdot x,$

în punctul $\left(1, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow y - \frac{3\pi}{2} = x - 1 \Rightarrow x - y + \frac{3\pi}{2} - 1 = 0.$

65. i) $\begin{cases} \frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \geqslant -1 \\ \frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4-4x^3+2x^2+4x+1 \geqslant 0 \\ x^4+4x^3+2x^2-4x+1 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-1+\sqrt{2})^2(x-1-\sqrt{2})^2 \geqslant 0 \\ (x+1+\sqrt{2})^2(x+1-\sqrt{2})^2 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \mathbf{R},$$

unde rădăcinile $1 \pm \sqrt{2}$, $-1 \pm \sqrt{2}$ au fost determinate cu ajutorul șirului lui Rolle.

Asimptote:

$$y = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\arcsin\frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\right] = \arcsin 0 \Rightarrow y_k = k\pi, \quad k \in \mathbf{Z},$$

asimptote orizontale.

$$f'(x) = \frac{4(1+x^2)(x^4-6x^2+1)}{(1+x^2)^2\cdot\sqrt{(x^2-2x-1)^2(x^2+2x-1)^2}} =$$

$$= \frac{4(x^4-6x^2+1)}{(1+x^2)\,|\,x^4-6x^2+1\,|} =$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{1+x^2}, & x\in(-\infty, -1-\sqrt{2})\cup(1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})\cup \\ & \cup(1+\sqrt{2}, \infty) \\ -\frac{4}{1+x^2}, & x\in(-1-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})\cup(-1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}). \end{cases}$$

În punctele $x_1 = -1-\sqrt{2}$; $x_2 = 1-\sqrt{2}$; $x_3 = -1+\sqrt{2}$; $x_4 = -1-\sqrt{2}$; graficul admite puncte unghiulare

(deoarece funcția nu este derivabilă; derivatele laterale sînt finite și diferite).

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-8x}{(1+x^2)^2}, & x\in(-\infty, -1-\sqrt{2})\cup(1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})\cup(1+\sqrt{2}, \infty) \\ \frac{8x}{(1+x^2)^2}, & x\in(-1-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})\cup(-1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}). \end{cases}$$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$1-\sqrt{2}$		0		$-1+\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow \arcsin\frac{1}{4}$		$\searrow \arcsin\frac{2}{(2-\sqrt{2})^2}$		$\nearrow \arcsin(-1)$		$\searrow \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)$		$\nearrow$			0
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$ $\|$	$-$	$-$	$-$ $\|$	$+$	$+$	0 $-$	$-$ $\|$	$+$	$+$	$\|$ $-$ $-$ $-$

Vezi graficul XII.65 i

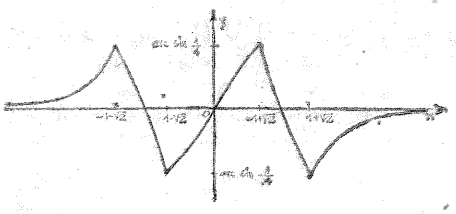


Fig. XII.65 i

Evident, acest detaliu de grafic, poate fi extins pe ordonată, ținînd seama de diversele valori ale lui $k \in \mathbf{Z}$.

ii) $F(x) = \begin{cases} \frac{4}{1+x^2}, & x\in(-\infty, -1-\sqrt{2})\cup(1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})\cup(1+\sqrt{2}, \infty) = I. \\ -\frac{4}{1+x^2}, & x\in(-1-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})\cup[-1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}] = J. \end{cases}$

$$F'(x) = \begin{cases} \frac{-8x}{(1+x^2)^2}, & x\in I. \\ \frac{8x}{(1+x^2)^2}, & x\in J. \end{cases} \qquad F''(x) = \begin{cases} \frac{-8(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}, & x\in I. \\ \frac{8(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}, & x\in J. \end{cases}$$

$y = 0$, asimptotă orizontală; $x = 0$, punct de extrem; $x = \pm 1 \pm \sqrt{2}$, puncte unghiulare; $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ puncte de inflexiune.

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	$1-\sqrt{2}$	0	$-1+\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$
$F'(x)$	$+$ $+$	$\|$	$-$ $-$	$\|$	$+$ 0 $-$	$\|$	$+$ $+$	$\|$	$-$ $-$
$F(x)$	$0 \nearrow$	$2-\sqrt{2} \searrow$	$-(2+\sqrt{2}) \nearrow$	$4 \searrow$		$-(2+\sqrt{2}) \nearrow$		$2-\sqrt{2} \searrow$	0
$F''(x)$	$+$ $+$	$\|$	$-$ 0 $+$	$\|$	$-$ $-$ $-$	$\|$	$+$ 0 $-$	$\|$	$+$ $+$

Vezi graficul XII.65 ii.

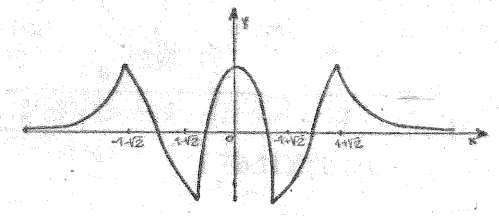


Fig. XII.65 ii

66. i) $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Asimptote verticale: $x = 1$, $x = -1$. Asimptote orizontale:

$$y = -\frac{1}{2}\left(\pm\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \pm\frac{\pi}{4} \pm k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}.$$

$$f'(x) = \frac{x^2+3}{2(x^4-1)} > 0;\ f''(x) = -\frac{x(x^4+6x+1)}{(x^4-1)^2}.$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$			$+$	$+$	
$f(x)$	$\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$		$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\pi}{4}$
$f''(x)$	$+$	$+$			$-$	$-$	

Vezi graficul XII.66.

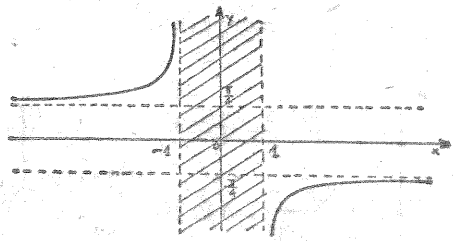


Fig. XII.66

Acest detaliu de grafic va fi extins pe ordonată după valorile lui $k \in \mathbf{Z}$, obținînd graficul complet al funcției

iii) $$A = \int_2^3 \frac{x^2+3}{2(x^4-1)}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^3 \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_2^3 = f(x)\Big|_2^3 =$$

$$= f(3) - f(2) = -\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2) =$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3-2}{1+6} = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{7},$$

deci valoarea ariei o vom considera în modul. În calcule s-a ținut cont de următoarea formulă trigonometrică:

$$\operatorname{arctg} x \pm \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x \pm y}{1 \mp xy}.$$

67. i) $P(-1) = 0,\ P'(-1) = 0,\ P''(-1) \neq 0.$
$Q(-1) = 0,\ Q'(-1) = 0,\ Q''(-1) \neq 0.$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} m = 2 \\ n = 1 \end{cases}$$

ii) $$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(x+1)^2(x-1)}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{x-1}{x^2+1} = f(x),$$

pentru $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $\lim\limits_{x \to -1} R(x) = -1$.

iii) $y = 0$, asimptotă orizontală.

$$f'(x) = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2};\ f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

$$f''(x) = \frac{(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3};\ f''(x) = 0 \Rightarrow x = -1;\ x = 4 \pm \sqrt{3}.$$

x	$-\infty$	$4-\sqrt{3}$	$1-\sqrt{2}$		-1	$1+\sqrt{2}$	$4+\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$ $-$ $-$		0	$+$	$+$	0	$-$ $-$ $-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{4}$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$ $\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{4}$	$\searrow$	0
$f''(x)$	$-$	0	$+$		0	$-$	0	$+$

Vezi graficul XII.67.

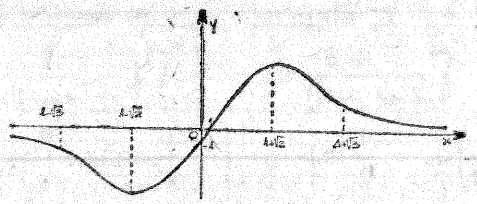


Fig. XII.67

Se observă că funcția $R(x)$, dacă se prelungește prin continuitate se obține:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x^2+1} & \text{pentru } x\in\mathbf{R}\setminus\{-1\}.\\ \lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)^2(x-1)}{(x+1)^2(x^2+1)} & \text{pentru } x=-1.\end{cases}$$

deci $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x^2+1} & \text{pentru } x\in\mathbf{R}\setminus\{-1\}.\\ -1 & \text{pentru } x=-1.\end{cases}$$

Graficul funcției, în mod evident, este identic cu cel trasat anterior.

iv) Fie $P(x_0, y_0)$ punctul considerat (sau punctele considerate); tangenta în P are ecuația:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0);\quad y-y_0=\frac{-x_0^2+2x_0+1}{(x_0^2+1)^2}(x-x_0).$$

Fie m direcția dată, atunci:

$$\frac{-x_0^2+2x_0+1}{(x_0^2+1)^2}=m\Rightarrow mx_0^4+(2m+1)x_0^2-2x_0+m-1=0.$$

iar ecuația de gradul 4 va genera patru, două sau nici o soluție reală, soluții care reprezintă abscisele punctelor în care se duc tangente la grafic.

68. Folosind formulele lui Viète, obținem:

$$\begin{cases}A=x_1+x_2+x_3=a(b^4+b^2+1).\\ B=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=a^2b^2(b^4+b^2+1)\Rightarrow C=\left(\dfrac{B}{A}\right)^3\\ C=x_1x_2x_3=a^3b^6.\end{cases}$$

ii) Fie: $x_1=q\cdot\frac{1}{r}$; $x_2=q$; $x_3=q\cdot r$ și înlocuind în ecuația a treia obținem: $q^3=a^3b^6\Rightarrow q=ab^2$.

$$x_1+x_2+x_3=ab^2\left(\frac{1}{q}+1+q\right)=a(b^4+b^2+1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow r=b^4+1\pm|b^4-1|\Rightarrow\begin{cases}r=2b^4\\ r=2.\end{cases}$$

Deci: $\begin{cases}r=2\\ x_1=\dfrac{ab^2}{2}\\ x_2=ab^2\\ x_3=2ab^2\end{cases}$ sau $\begin{cases}r=2b^4\\ x_1=\dfrac{a}{2b^2}\\ x_2=ab^2\\ x_3=2ab^6.\end{cases}$

iii) Fie $y=2b^4$; $S_n=a\cdot\dfrac{1-(2b^4)^n}{1-2b^4}$.

$$\frac{S_n}{b^n}=\frac{a}{1-2b^4}\cdot\left[\frac{1}{b^n}-\left(\frac{2b^4}{b}\right)^n\right]=\frac{a}{1-2b^4}\left[\frac{1}{b^n}-(2b^3)^n\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a}{2b^4-1}\left[(2b^3)^n-\frac{1}{b^n}\right]=\operatorname{sgn}a\cdot\infty,$$

deci șirul nu are limită.

$$\frac{S_n}{b^{2n+1}+1}=\frac{a}{1-2b^4}\cdot\frac{1-(2b^4)^n}{b^{2n+1}+1}\to\operatorname{sgn}a\cdot\infty,$$

deci șirul nu are limită.

iv) $f(x)=\dfrac{(x-a)^3}{x^2+1}$.

a) $f'(x)=\dfrac{(x-a)[x^3+ax^2-(2a^2-3)x-3a]}{(x^2+1)^2}$.

Fie $h(x)=x^3+ax^2-(2a^2-3)x-3a$ și aplicînd șirul lui Rolle obținem: $h'(x)=3x^2+2ax-(2a^2-3)$, $h'(x)=0\Rightarrow$ $\Rightarrow x_{1,2}=-a\pm\sqrt{7a^2-9}$. Dacă $h(x_1)\cdot h(x_2)>0$, atunci ecuația $h(x)=0$ va admite numai o rădăcină reală și anume în $(-\infty, x_1)$ dacă $h(x_1)>0$, $h(x_2)>0$ sau în intervalul (x_2, ∞) dacă $h(x_1)<0$, $h(x_2)<0$.

c) $A=\int_2^3 \frac{(x-2)^3}{x^2+1}\,dx=\int_2^3\left(x-6+\frac{11x-2}{x^2+1}\right)dx=$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-6x+\frac{11}{2}\ln(x^2+1)-2\operatorname{arctg} x\right)\Big|_2^3.$$

69. i) Se formează șirul lui Rolle:

$f'(x)=3(x^2-2x)=0\Rightarrow x=0,\ x=2.\ f(0)=a;\ f(2)=-4+a.$

$a\|f(a)$	$-\infty$	$a-4$	a	$+\infty$	*Discuție*
$a\in(-\infty,\ 0)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$x_1\in(a,\ \infty)$ $x_2,\ x_3\in\mathbf{C}$
$a=0$	$-$	$-$	0	$+$	$x_1=x_2=a$ $x_3\in\mathbf{R}$
$a\in(0,\ 4)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$x_1\in(a-4,\ a)$ $x_2,\ x_3\in\mathbf{C}$
$a=4$	$-$	0	$+$	$+$	$x_1=x_2=a-4$ $x_3\in\mathbf{R}$
$a\in(4,\ \infty)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$x_1\in(-\infty,\ a-4)$ $x_2,\ x_3\in\mathbf{C}$

ii) $g(x)=\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}.\ x\in\mathbf{R}.$

$$y=x-\frac{1}{3}\ \text{(asimptotă oblică)}.$$

$$g'(x)=\frac{x(x-2)}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)^4}}=\frac{x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}}.$$

Pentru $x=-1$ sau $x=+2$, funcția nu este derivabilă; în punctul (2, 0) graficul admițînd un punct de întoarcere.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	$+$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vezi graficul XII.69.

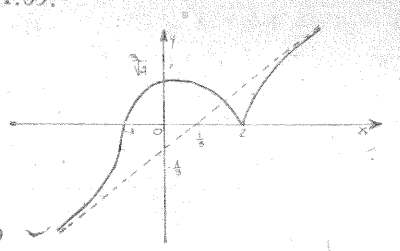


Fig. XII.69

iii) $A=\int_3^4\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}\,dx=\int_3^4(x-2)\cdot\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}}\,dx.$

Efectuăm substituția: $\frac{x+1}{x-2}=t^3\Rightarrow x=\frac{-2t^3+1}{t^3-1}$ și $dx=$

$=\frac{-9t^2}{(t^3-1)^2}\,dt$ cu $t=\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$ pentru $x=4$ și $t=\sqrt[3]{4}$ pentru

$x=3$. Deci $A=27\int_{\sqrt[3]{\frac{5}{2}}}^{\sqrt[3]{4}}\frac{t^3}{(t^3-1)^3}\,dt.$

$$I=\int\frac{t^3}{(t^3-1)^3}\,dt=-\frac{1}{6}\int t\left(\frac{1}{(t^3-1)^2}\right)'dt=$$

$$=-\frac{1}{6}\left[\frac{t}{(t^3-1)^2}-\int\frac{1}{(t^3-1)^2}\,dt\right]=-\frac{1}{6}\left[\frac{t}{(t^3-1)^2}-\right.$$

$$\left.-\int\left(\frac{A}{t-1}+\frac{B}{(t-1)^3}+\frac{Ct+D}{t^2+t+1}+\frac{Et+F}{(t^2+t+1)^2}\right)dt\right]=$$

$$=-\frac{1}{6}\cdot\frac{t}{(t^3-1)^2}+\frac{1}{6}\int\left[-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{t-1}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{(t-1)^2}+\right.$$

$$+\frac{1}{9}\cdot\frac{(t^2+t+1)'}{t^2+t+1}+\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+$$

$$\left.+\frac{1}{6}\cdot\frac{(t^2+t+1)'}{(t^2+t+1)^2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(t^2+t+1)^2}\right]dt,\ \text{iar}$$

$$\int\frac{1}{(at^2+bt+c)^2}\,dt=\frac{-2at-b}{\Delta(at^2+bt+c)}-\frac{2a}{\Delta}\int\frac{1}{at^2+bt+c}\,dt,$$

unde $\Delta = b^2 - 4ac$, $A = -\frac{2}{9}$, $B = \frac{1}{9}$, $C = \frac{2}{9}$;

$$D = \frac{1}{3}, \quad E = \frac{1}{3}, \quad F = \frac{1}{3}.$$

70. $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x-2}{8}, & x \in (-\infty, -3] \cup [3, \infty) \\ -\dfrac{x-2}{2(x^2-5)}, & x \in (-3, -1) \cup (1, 3) \\ \dfrac{x-2}{8}, & x \in [-1, 1] \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{8}, & x \in (-\infty, -3] \cup [3, \infty) \\ \dfrac{x^2-4x+5}{2(x^2-5)^2}, & x \in (-3, -1) \cup (1, 3) \\ \dfrac{1}{8}, & x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

Funcția este continuă în punctele ± 3, ± 1, și nu este derivabilă, avînd puncte unghiulare

În punctele $\pm\sqrt{5}$ funcția este discontinuă, nu este derivabilă.

x	$-\infty$	-3	$-\sqrt{5}$	-1	1	$\sqrt{5}$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$ | $+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$ | $-$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow \frac{5}{8} \nearrow$	$+\infty$	$-\infty \nearrow -\frac{3}{8} \nearrow -\frac{1}{8} \nearrow$	$+\infty$	$-\infty \nearrow -\frac{1}{8}$	$\searrow$	$-\infty$

Vezi graficul XII.70.

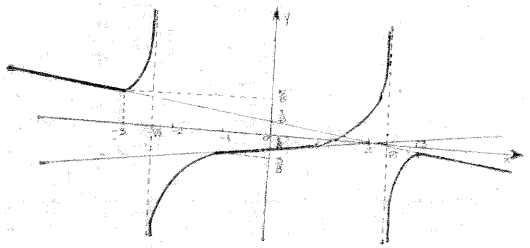


Fig. XII.70

ii)

p	Numărul rădăcinilor reale
$p \in \left(-\infty, \frac{-3}{8}\right)$	3 rădăcini reale distincte
$p = \frac{-3}{8}$	3 rădăcini reale, cu $x_2 = -1$
$p \in \left(\frac{-3}{8}, -\frac{1}{8}\right)$	3 rădăcini reale distincte
$p = -\frac{1}{8}$	3 rădăcini reale, cu $x_1 = x_2 = 3$
$p \in \left(-\frac{1}{8}, \frac{5}{8}\right)$	o rădăcină reală
$p = \frac{5}{8}$	3 rădăcini reale, $x_1 = x_2 = -3$, $x_3 \in (1, \infty)$.
$p \in \left(\frac{5}{8}, \infty\right)$	3 rădăcini reale distincte

iii) $V = \pi \int_0^4 \left(-\frac{x-2}{8}\right)^2 dx = \frac{7\pi}{192}$.

71. i) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m & -1 & -1 & 1 \\ 1 & m & 1 & -1 \\ 1 & 1 & m & -1 \end{pmatrix}$.

Determinant $M = -(m-1)(m^2+2m+5)$.

a) $m \neq +1$, sistem compatibil determinat.

b) $m = 1 \Rightarrow r_S = 2 \Rightarrow$ sistem compatibil 2 — nedeterminat.

ii) Pentru $m = 3$ soluțiile sistemului sînt:

$$x = 1, \quad y = -1, \quad z = 0, \quad u = 2.$$

iii) $f(x) = \ln\left|\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-2)}\right|$, unde $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1, 2\}$.

Asimptote:
verticale: $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $x=2$; orizontale: $y=0$.

$$f'(x)=\frac{-2(x^2-x+1)}{(x-1)(x+1)\cdot x(x-2)};\ f'(x)>0,$$

pentru $x\in(-1,0)\cup(1,2)$; $f'(x)<0$, pentru x aparținînd intervalului complementar.

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow -\infty$	$\|-\infty$	$\nearrow\infty$	$\|\infty$	$\searrow-\infty$	$\|-\infty$	$\nearrow\infty$	$\|\infty$	$\searrow 0$	

Vezi graficul XII.71.

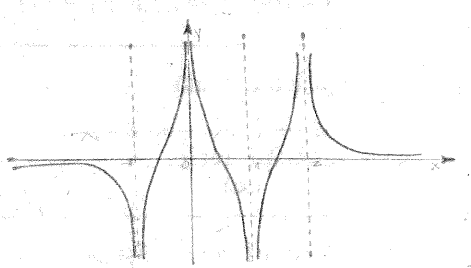


Fig. XII.71

iv) $I=\int_1^2\frac{x+1}{x}\,dx=\ln(2e)$.

72. $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}>0$, cu $x\in(-1,1)$.

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}>0,\ \text{cu}\ x\in(-1,1).$$

$$f''(x)=g''(x)=\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

x	-1		0		1
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$		$\nearrow$		$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

x	-1		0		1
$g'(x)$		$+$	$+$	$+$	
$g(x)$	$-\frac{\pi}{2}$		$\nearrow$		$\frac{\pi}{2}$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	

Vezi graficele XII.72 a și XII.72 b.

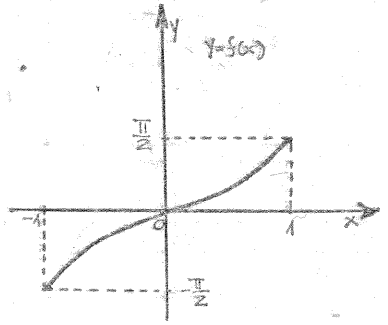


Fig. XII.72 a

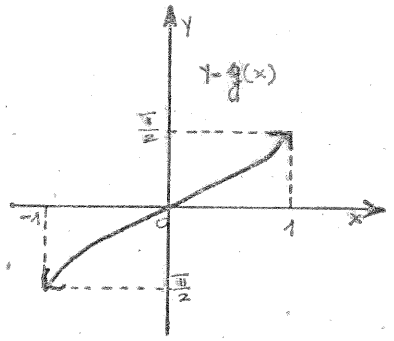


Fig. XII.72 b

ii) Cum $f'(x)=g'(x)\Rightarrow f(x)-g(x)=C$ (conform unei consecințe a Teoremei lui Lagrange) $\Rightarrow \operatorname{tg}(f(x)-g(x))=\operatorname{tg}C$, și cum $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)=x$ și $\operatorname{tg}(\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, atunci $\operatorname{tg}C=0\Rightarrow C\in\{k\pi\mid k\in\mathbf{Z}\}$.

iii) Integrînd prin părți obținem $A=\int\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=$

$$=x\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=x\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{(1-x^2)'}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=x\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}+C.$$

73. $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$; $x = 0$ este asimptotă verticală; $y = x$ asimptotă oblică;

$$f'(x) = \frac{x^3 + 3x - 4}{x^3} = \frac{(x-1)(x^2+x+4)}{x^3}; \quad f''(x) = \frac{-6(x-2)}{x^4}.$$

x	$-\infty$				0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$+\infty$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		$+$		$+$	$+$		$+$		0	$-$	$-$

Vezi graficul XII.73.

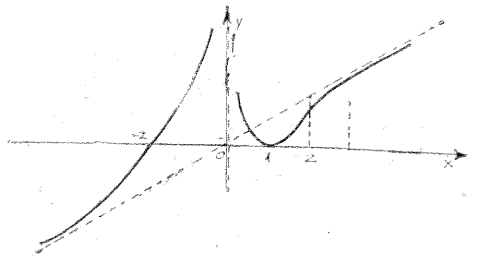


Fig. XII.73

ii)

λ	Discuția rădăcinilor
$\lambda \in (-\infty, 0)$	$x_1 \in (-\infty, 0)$
$\lambda = 0$	$x_1 = -2, \ x_2 = x_3 = 1$
$\lambda \in (0, \infty)$	$x_1 \in (-2, 0), \ x_2 \in (0, 1), \ x_3 \in (1, \infty)$

iii) $V = \pi \int_1^2 f^2(x)\,dx$; $A(S) = 2\pi \int_1^2 f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$.

74. i) $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ unde $f(x)$ a fost determinată după ce s-a efectuat diferența de pătrate apoi suma respectiv diferența de sinusuri s-a transformat în produs.

iv) $V = \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]^2 dx =$

$$= \frac{\pi}{4}\left[x - \frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

$\left(\text{unde în calcule s-a ținut cont de formula } \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\right)$.

75. $m(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - x}{5x^2 - 4x + 1}$; $f(x) = \frac{x^2(x+1)}{x^2+1}$.

i) a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x}\right]^x = \lim\limits_{x\to\infty} \left\{\left[1 + \frac{x-1}{x^2+1}\right]^{\frac{(x^2+1)}{x-1}}\right\}^{\frac{x(x-1)}{x+1}} = e$.

b) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(x + 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx =$

$$= \frac{1}{2}(3 - \ln 2) - \frac{\pi}{4}.$$

ii) fie $\begin{cases} x_1 = q \cdot \frac{1}{r} \\ x_2 = q \\ x_3 = qr \end{cases}$ unde $r \neq 0$ fiind rația progresiei.

Aplicînd relațiile lui Viète, vom obține valoarea parametrului real m.

iv) $V = \pi \int_2^3 \left[\frac{x^2(x+1)}{x^2+1}\right]^2 dx = \pi \int_2^3 \left[x^2 + 2x - 1 - \right.$

$$\left. - 2 \cdot \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} + 2 \cdot \frac{x}{(x^2+1)^2}\right] dx =$$

$$= \pi\left(\frac{x^3}{3} + x^2 - x - 2\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x\right)\Big|_2^3 + 2\pi Y,$$

unde $Y = \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \int_{\operatorname{arctg} 2}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{\operatorname{tg} u}{\left(\frac{1}{\cos^2 u}\right)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 u}\,du =$

$$= \int_{\operatorname{arctg} 2}^{\operatorname{arctg} 3} \sin u \cos u\,du = \frac{\sin^2 u}{2}\Big|_{\operatorname{arctg} 2}^{\operatorname{arctg} 3} = +\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5},$$

$V = \pi \cdot \left(\frac{313}{30} - \ln 4 + \operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right)$, iar în calcule s-a ținut seama de relațiile trigonometrice:

a) $\operatorname{arctg} x \pm \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x \pm y}{1 \mp xy}$.

b) $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\mp\sqrt{1+x^2}}$.

76. i) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$; $f(x) = (x-1)^2(x^3 - 3x^2 - 2x - 1)$; $f'(x) = 5x^2(x-1)(x-3)$; $f''(x) = 10x(2x^2 - 6x + 3)$.

x	$-\infty$		0		$\frac{3-\sqrt{3}}{2}$		1		$\frac{3+\sqrt{3}}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$		$\nearrow$	0	$\searrow$		$\searrow$	-28	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	$+$

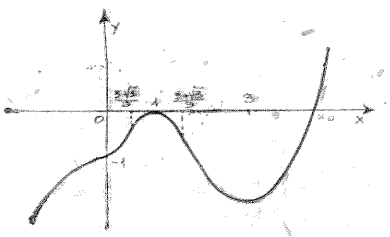


Fig. XII.76

ii) Vezi graficul XII.76.
$f(3) = -28$,
$f(4) = 63$,
$f(3{,}5) = -1{,}71875$,
$f(3{,}8) = 23{,}14368$,
$f(3{,}6) = -2{,}89328$
$f(3{,}7) = 6{,}1965$.

Pentru a determina rădăcina x_0, vom aplica succesiv metoda tangentei și a coardei pe intervalul (3, 6; 3, 7), interval ce a fost determinat folosind metoda înjumătățirii intervalului.

iii) $f'(x) = 5(x^4 - 4x^3\cos a + 3x^2) = 0$;
$x^2(x^2 - 4x\cos a + 3) = 0$; $x^2 - 4x\cos a + 3 \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta = 4(4\cos^2 a - 3) < 0$.

$$\cos a \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow a \in \left(\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{7\pi}{6} + k\pi\right),$$

unde $k \in \mathbf{Z}$.

iv) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - b$. Formăm șirul lui Rolle.
$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 1,\ x = 3$
$f(0) = -b,\ f(1) = 1 - b,\ f(3) = -27 - b$.

x / $f'(x)/f(x)$ / b	$-\infty$	0	1	3	∞	Discuția rădăcinilor reale
	$-\infty$	$-b$	$1-b$	$-27-b$	∞	
$b \in (-\infty, -27)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$x_1 \in (-\infty, 0)$
$b = -27$	$-$	$+$	$+$	0	$+$	$x_1 \in (-\infty, 0)$ $x_2 = x_3 = 3$
$b \in (-27, 0)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$x_1 \in (-\infty, 0)$ $x_2 \in (1, 3)$ $x_3 \in (3, \infty)$
$b = 0$	$-$	0	$+$	$-$	$+$	$x_1 = x_2 = x_3 = 0$ $x_4 \in (1, 3)$ $x_5 \in (3, \infty)$
$b \in (0, 1)$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$x_1 \in (0, 1)$ $x_2 \in (1, 3)$ $x_3 \in (3, \infty)$
$b = 1$	$-$	$-$	0	$-$	$+$	$x_1 = x_2 = 1$ $x_3 \in (3, \infty)$
$b \in (1, \infty)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$x_1 \in (3, \infty)$

Ecuația admite o singură rădăcină reală, dacă

$$b \in (-\infty, -27) \text{ sau } b \in (1, \infty).$$

77. i) $P(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + m$; $P'(x) = 4x(x-1)(x-2)$;
$P'(x) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 1,\ x = 2$.

$P(0) = m$; $P(1) = 1 + m$; $P(2) = m$.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	Discuția rădăcinilor
$f'(x)/f(x)$ / m	$+\infty$	m	$1+m$	m	$+\infty$	
$m \in (-\infty, -1)$	+	−	−	−	+	$x_1 \in (-\infty, 0)$ $x_2 \in (2, \infty)$
$m = -1$	+	−	0	−	+	$x_1 \in (-\infty, 0)$ $x_2 \in (2, \infty)$ $x_3 = x_4 = 1$
$m \in (-1, 0)$	+	−	+	−	+	$x_1 \in (-\infty, 0)$ $x_2 \in (0, 1)$ $x_3 \in (1, 2)$ $x_4 \in (2, \infty)$
$m = 0$	+	0	+	0	+	$x_1 = x_2 = 0$ $x_3 = x_4 = 0$
$m \in (0, \infty)$	+	+	+	+	+	x_1, x_2, x_3, x_4 complexe conjugate

ii) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$; $f'(x) = 4x(x-1)(x-2)$; $f''(x) = 4(3x^2 - 6x + 2)$.

x	$-\infty$		0		$1-\frac{\sqrt{3}}{3}$		1		$1+\frac{\sqrt{3}}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+		+	0	−		−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗		↗	0	↘		↘	-1	↗	$+\infty$
$f''(x)$		+	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+	

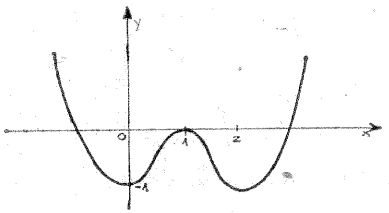


Fig. XII.77

Vezi graficul XII.77.

iii) Rădăcina căutată este $x_0 \in (2, \infty)$. Vom micșora intervalul ținînd seama de o consecință a proprietății lui Darboux, și anume x_0 este rădăcina căutată $\Leftrightarrow f(a) \cdot f(b) < 0$ cu $x_0 \in (a, b)$, apoi vom aplica metoda înjumătățirii intervalului:

$f(2) = -1$, $f(3) = 8$; $\Rightarrow f(2) \cdot f(3) < 0 \Rightarrow x_0 \in (2, 3)$

$f(2{,}5) = 1{,}5625$; $f(2{,}4) = 1{,}2118$; $f(2{,}3) = -0{,}5239$.

Pentru a determina rădăcina ecuației vom aplica metoda combinată (a tangentei și a coardei) pe intervalul (2,3; 2,4).

iv) $A = \left| \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \right| = \left| -\frac{7}{15} \right| = \frac{7}{15}$.

78. $f(x) = \frac{x^2 - 5}{x + 1} \cdot \mathrm{e}^x$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$. $x = -1$, asimptotă verticală; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, asimptotă orizontală; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $f'(x) = \frac{x(x+3)(x-1)}{(x+1)^2} \cdot \mathrm{e}^x$;

$$f''(x) = \frac{x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3}{(x+1)^3} \mathrm{e}^x$$

x	$-\infty$		-3		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+		+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↘	$-2\mathrm{e}^{-3}$	↗	∞	$-\infty$	↗	-5	↘	$-2\mathrm{e}$	↗ ∞

Vezi graficul XII.78.

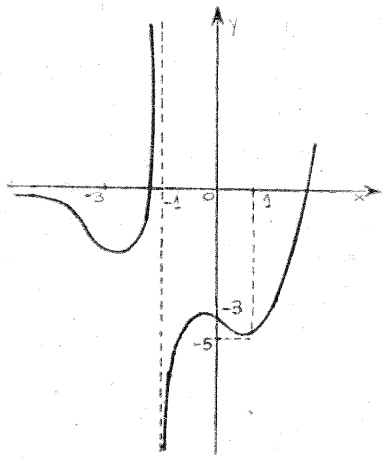


Fig. XII.78

ii) $\int_0^1 (x-1)\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x - \int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = (x-2)\mathrm{e}^x \Big|_0^1 = 2 - \mathrm{e}$.

iii) $f'(x)=\dfrac{x(x^2+2x+2-a)}{(x+1)^2}e^x$.

$$f''(x)=\frac{x^4+4x^3+(7-a)x^2+4x+2-a}{(x+1)^3}e^x.$$

$f'(x)=0\Rightarrow x=0,\ x=-1\pm\sqrt{a-1}$ cu $a\in[1,\infty)$.

$f''(0)=(2-a)e^x$, $f''(-1\pm\sqrt{a-1})=$

$$=\frac{2[7a-6\pm(9-a)\sqrt{a-1}]}{(\pm\sqrt{a-1})^3}e^{-1\pm\sqrt{a-1}}.$$

Dacă $f''(-1\pm\sqrt{a-1})=0\Rightarrow a^3-68a^2+183a-112=0$ și aplicînd șirul lui Rolle obținem:

$$3a^2-136a+183=0\Rightarrow a_{1,2}=\frac{68\pm5\sqrt{163}}{3}.$$

Deci numărul de puncte de extrem pentru $a\in[1,\infty)$ este: 3 puncte dacă $2-a\neq0$ și $a^3-68a^2+183a-112\neq0$, 2 puncte dacă $2-a=0$ și $a^3-68a^2+183a-112\neq0$ (și cel puțin un punct de inflexiune) și 1 punct dacă $2-a\neq0$ și $a^3-68a^2+183a-112=0$ (și cel puțin două puncte de inflexiune).

79. i) Fie $h(x)=\ln(x^2+3x+2)-\dfrac{3x}{2}-\ln 2$.

$$h'(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x+2}-\frac{3}{2}=\frac{-x(3x+5)}{2(x^2+3x+2)}<0,$$

deoarece $x>0$ și cum funcția h este monoton descrescătoare $\Rightarrow$ $\Rightarrow h(x)<0$.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n^2+3n+2)}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n}{n^2+3n+3}=2$, unde în calcule s-a aplicat teorema lui l'Hospital.

iii) $f(x)=\ln(x+1)(x+2)$; $x\in(-\infty,-2)\cup(-1,\infty)$ $x=-2$ și $x=-1$, asimptote verticale.

$$f'(x)=\frac{2x+3}{(x+1)(x+2)}.$$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{3}{2}$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$		0		$+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$		$\ln\frac{1}{2}$		$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Vezi graficul XII.79.

iv) $M=\begin{pmatrix} x-1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & \dfrac{12}{x-1} \\ 0 & x-1 & 6 \end{pmatrix}$.

Dar $\det M=0\Rightarrow x^2-x=0\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ b=1\end{cases}$;

$$I=\int_0^1\frac{dx}{x^2+3x+2}=\ln\frac{4}{3}.$$

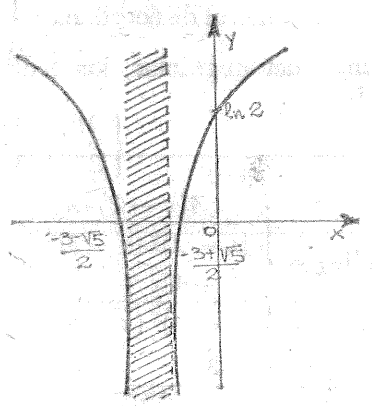


Fig. XII.79

v) $(\det M)'=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&\frac{12}{x-1}\\0&x-1&6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x-1&0&3\\0&0&\frac{-12}{(x-1)^2}\\0&x-1&6\end{vmatrix}+$

$$+\begin{vmatrix}x-1&0&3\\2&1&\frac{12}{x-1}\\0&1&0\end{vmatrix}=-6+12-6=0$$

unde domeniul de derivabilitate este $\mathbf{R}\setminus\{1\}$.

80. $f(x)=\begin{cases}\ln\dfrac{x-1}{x-3} & \text{pentru } x\geqslant0 \text{ și } \dfrac{x-1}{x-3}>0\\ \ln\dfrac{x+1}{x+3} & \text{pentru } x<0 \text{ și } \dfrac{x+1}{x+3}>0\end{cases}$

$x\in\mathbf{R}\setminus\{-3,-1,1,3\}$; $x=\pm1$, $x=\pm3$, asimptote verticale; $y=0$, asimptotă orizontală.

$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-2}{(x-1)(x-3)} & \text{pentru } x\in[0,1)\cup(3,\infty)\\ \dfrac{2}{(x+1)(x+3)} & \text{pentru } x\in(-\infty,-3)\cup(-1,0)\end{cases}$

În punctul de coordonate $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ graficul funcției admite un punct unghiular, iar ecuațiile tangentelor în acel punct sînt:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ 2x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{4(x-2)}{(x-1)^2(x-3)^2} & \text{pentru } x \in [0, 1) \cup (3, \infty) \\ \dfrac{-4(x+2)}{(x-1)^2(x-3)^2} & \text{pentru } x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 0). \end{cases}$$

x	$-\infty$		-3		-1		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$			$+$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-$				$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	∞		$-\infty$	$\nearrow$	$\ln\frac{1}{3}$	$\searrow$	$-\infty$		∞	$\searrow$	0
$f''(x)$		$+$			$-$		$-$					$+$	

Se observă că funcția este pară, adică $f(x) = f(-x)$, deci graficul va fi simetric față de ordonată.

Vezi graficul XII.80.

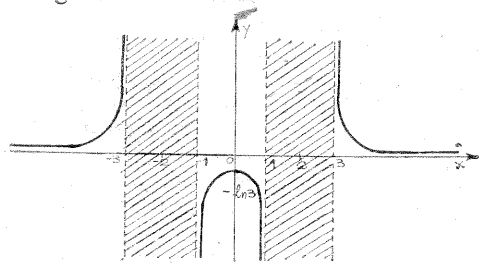


Fig. XII.80

81. i) $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = -\dfrac{ax^2 + 2(a-2)x - a}{(x^2+1)^2}$;

$f'(x) = 0 \Rightarrow ax^2 + 2(a-2)x - a = 0$ și $x_1 = 1 \Rightarrow a = 2$.

ii) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$; $f'(x) = \dfrac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

(Vezi graficul XII.81).

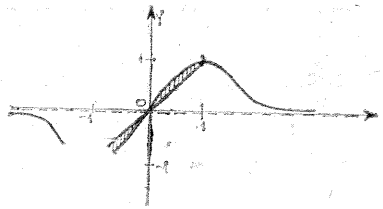


Fig. XII.81

iii) $A = 2\int_0^1 \left(\dfrac{2x}{x^2+1} - x\right) dx = 2\left(\ln(x^2+1) - \dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 =$

$= 2\left(\ln 2 - \dfrac{1}{2}\right) = \ln\dfrac{4}{e}$.

82. i) $\begin{cases} n = 2 \\ f(-1) = 1 - m + n = 2 \\ f(1) = \sqrt{p+8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ m = 1 \\ p = -4 \end{cases}$

ii) $C = \pm\dfrac{1}{2}$.

iii) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2, & x \in [-1, 0) \\ \sqrt{-4x^2 + 4x + 4}, & x \in [0, 1] \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \in [-1, 0) \\ \dfrac{-4x + 2}{\sqrt{-4x^2 + 4x + 4}}, & x \in [0, 1] \end{cases}$

x	-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$\frac{7}{4}$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$\sqrt{5}$	$\searrow$	2

Vezi graficul XII.82.

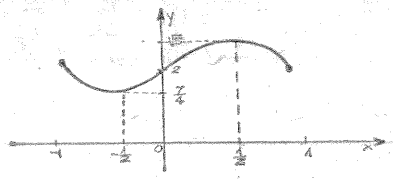


Fig. XII.82

iv) $A = \left| \int_{-1}^{0} (x^2 + x + 2)\,dx + \int_{0}^{1} \sqrt{-4x^2+4x+4}\,dx \right| =$

$= \left| \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{2} \int_{0}^{1} \sqrt{5-(2x-1)^2} \cdot (2x-1)' \cdot dx \right| .$

În calcule vom ține cont de:

$$\int \sqrt{5-t^2}\,dt = \int \sqrt{6-(\sqrt{5}\sin u)^2} \cdot (\sqrt{5}\cos u)\,du =$$

$$= 5\int \cos^2 u\,du = 5\int \frac{1+\cos 2u}{2}\,du = \frac{5}{2}\left(u + \frac{1}{4}\sin 2u\right) + C,$$

unde $t = \sqrt{5}\sin u \Rightarrow u = \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{5}t\right)$.

83. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x - 2 & \text{pentru } x \in (-\infty, -2] \\ -x + 2 & \text{pentru } x \in (-2, 1) \\ \dfrac{2x^2 + x - 2}{2x - 1} & \text{pentru } x \in [1, \infty) \end{cases}$

$f'(x) \begin{cases} 4x + 1 & \text{pentru } x \in (-\infty, -2] \\ -1 & \text{pentru } x \in (-2, 1) \\ \dfrac{4x^2 - 4x + 3}{(2x-1)^2} & \text{pentru } x \in [-1, \infty) \end{cases}$

Funcția este continuă în punctele $x = -2$, $x = 1$. Funcția nu este derivabilă în $x = -2$, $x = 1$.

ii) $f''(x) = \begin{cases} 4 & \text{pentru } x \in (-\infty, -2] \\ 0 & \text{pentru } x \in (-2, 1) \\ \dfrac{-8}{(2x-1)^3} & \text{pentru } x \in [1, \infty) \end{cases}$

$y = x + 1$ asimptotă oblică pentru $x \to +\infty$

x	$-\infty$		-2			1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\ -\ -$	-7	$\vert$	$-1\ -\ -\ -1$	$\vert$	$3\ +\ +\ +$		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\to$		1	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$		$\vert$	0	$\vert$	$+$		

În punctele $A(-2, 4)$ și $B(1, 1)$ graficul funcției admite puncte unghiulare, în care tangentele la grafic sînt:

$A \begin{cases} 7x + y + 10 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$;

$B \begin{cases} 3x - y - 2 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$.

Vezi graficul XII.83.

iii) Cum funcția este continuă și derivabilă pe $[1, 2]$, atunci i se poate aplica teorema lui Lagrange: $\exists$ cel puțin un punct $c \in (1, 2)$, astfel încît:

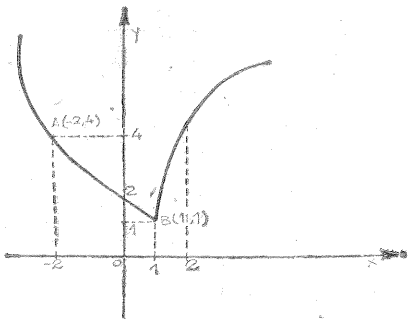


Fig. XII.83

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = f'(c) \Rightarrow \frac{\frac{8}{3}-1}{2-1} = \frac{4c^2-4c+3}{(2c-1)^2} \Rightarrow 2c^2-2c-1=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow c = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$, iar soluția este $c = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \in (1, 2)$.

iv) $V = \pi \int_{-4}^{4} f^2(x)\,dx = \pi \int_{-4}^{-2} (2x^2 + x - 2)^2\,dx +$

$+ \pi \int_{-2}^{1} (-x + 2)^2\,dx + \pi \int_{1}^{4} \left(\frac{2x^2 + x - 2}{2x - 1} \right)^2 dx =$

$= \pi(4x^4 + x^2 + 4 + 4x^3 - 8x^2 - 4x) \Big|_{-4}^{-2} +$

$+ \pi(x^2 - 2x + 2) \Big|_{-2}^{1} + \pi \int_{1}^{4} \left(x + 1 - \frac{1}{2x-1} \right)^2 dx =$

$= |-660\pi| + |-9\pi| + \left| \frac{314}{7} - 3\ln 7 \right| \pi = (713{,}85 - 3\ln 7)\pi.$

84. Vezi figura XII.84.

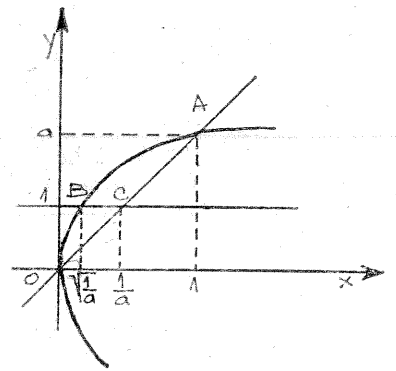


Fig. XII.84

$$A\begin{cases} y = ax \\ y = ax^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1,\ 1);$$

$$B\begin{cases} y = ax^2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow B\left(\sqrt{\frac{1}{a}},\ 1\right);$$

$$C\begin{cases} y = ax \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{1}{a},\ 1\right);\quad A_{ABC} = \int_{\sqrt{\frac{1}{a}}}^{1} ax^2\,dx -$$

$$-\int_{\sqrt{\frac{1}{a}}}^{\frac{1}{a}} 1\cdot dx - \int_{\frac{1}{a}}^{1} ax\,dx = \left| -\frac{a}{6} - \frac{1}{2a} + \frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{a}}\right|.$$

Fie $f(a) = -\frac{a}{6} - \frac{1}{2a} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{a}}$; $f'(a) = \frac{-a^2+3-2\sqrt{a}}{6a^2}$;

$f'(a) = 0 \Rightarrow a^4 - 6a^2 - 4a + 9 = 0 \Rightarrow (a-1)(a^3 - 5a - 9) = 0$,

dar cum $a > 1$, atunci $a^3 - 5a - 9 = 0$, iar rădăcina reală a ecuației se află folosind metode de calcul numeric și anume:

fie $g(a) = a^3 - 5a - 9$. Formăm șirul lui Rolle:

$$g'(a) = 3a^2 - 5 = 0 \Rightarrow a = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

$$g\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = -\frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} - 9 < 0,\quad g\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = \frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} - 9 < 0.$$

Deci rădăcina $a_0 \in \left(\sqrt{\frac{5}{3}},\ \infty\right)$ sau micșorînd intervalul obținem: $a_0 \in (2,\ 3)$, interval pe care aplicăm succesiv metoda coardei și metoda tangentei.

85. i) $x \in \mathbf{R}\setminus\{-1,\ 0\}$; $f'(x) = \frac{x^3+x^2(1+2a)-x-a}{x(1+x)^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}$;

$f'(x) = 0 \Rightarrow$ pentru $x = 1 \Rightarrow a = -1$.

ii) $f(x) = \frac{x(x-1)}{x+1}\cdot e^{\frac{1}{x}}$; $f'(x) = \frac{(x+1)^2}{x(1+x)}\cdot e^{\frac{1}{x}}$; $x = -1$, $x = 0$, asimptote verticale; $y = x - 1$, asimptotă oblică.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$\|$	$-$ $-$	$\|$	$+$ $+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$	$\|$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$	$\|$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$	

Vezi graficul XII.85.

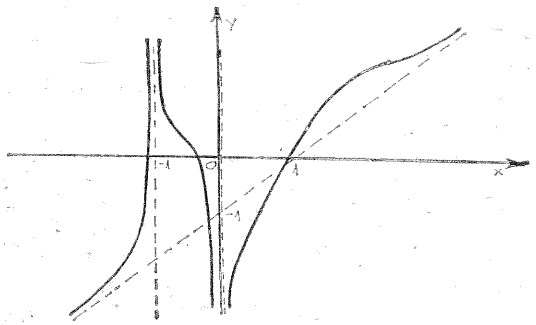


Fig. XII.85

iii) $A = \int_1^2 [f(x) - x + 1]\,dx = \int_1^2 \left(\frac{x^2 - x}{x+1}\,e^{\frac{1}{x}} - x + 1\right)dx =$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_1^2 + \int_1^2 \left(x - 2 + \frac{2}{x+1}\right)e^{\frac{1}{x}}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2} + \int_1^2 x\cdot e^{\frac{1}{x}}\,dx - 2\int_1^2 e^{\frac{1}{x}}\,dx + 2\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x+1}\,dx.$$

Primitivele funcțiilor se vor determina prin metoda integrării prin părți.

86. Domeniul de definiție:

$1+2\sin x>0 \Rightarrow x\notin\left(\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right)\Rightarrow x\in\left[0,\frac{7\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{11\pi}{6},2\pi\right]$;

$x=\frac{7\pi}{6}$; $x=\frac{11\pi}{6}$, asimptote verticale.

$$f'(x)=\frac{2\cos x}{1+2\sin x}; \quad f''(x)=-\frac{2(\sin x+2)}{(1+2\sin x)^2}<0.$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	-2	$-$				$+$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\ln 3$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$			$-\infty$	$\nearrow$
$f''(x)$		$-$	0	$-$		$-$					$-$

Vezi graficul XII.86 a.

Funcția $f(x)$ este periodică, de perioadă principală $T=2\pi$.

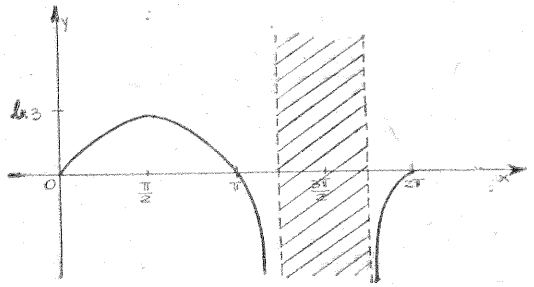


Fig. XII.86 a

ii) $f'(a)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 2\sqrt{3}\sin a-4\cos a+\sqrt{3}=0.$

Rezolvarea ecuației se poate efectua prin una din următoarele metode:

— metoda unghiului auxiliar;

— înlocuirea funcțiilor $\sin a$, $\cos a$ cu $t=\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, prin expresiile lor corespunzătoare $\left(\sin a=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos a=\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$

— rezolvarea unui sistem algebric condiționat și anume:

$$\begin{cases}\sin a=u\in[-1,\ 1]\\ \cos a=v\in[-1,\ 1]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u^2+v^2=1\\ 2\sqrt{3}u-4v+\sqrt{3}=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 28u^2+12u-13=0\Rightarrow u=\sin a=\frac{-3\pm 10}{14}\Rightarrow\sin a=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{\pi}{6},\ a=\frac{5\pi}{6}\ \text{sau}\ \sin a=-\frac{13}{14}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\in\left\{(-1)^k\arcsin\left(-\frac{13}{14}\right)+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Deci, punctul considerat este: $A\left(\frac{\pi}{6};\ \ln 2\right)$.

iii) $F(x)=\frac{2\cos x}{1+2\sin x}$; $F'(x)=\frac{-2(\sin x+2)}{(1+2\sin x)^2}<0$;

$$F''(x)=\frac{2\cos x(2\sin x+7)}{(1+2\sin x)^3}.$$

F este o funcție periodică, de perioadă principală 2π.

$1+2\sin x\neq 0\Rightarrow x\notin\left\{\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right\}$, deci $x\in[0,2\pi]\setminus\left\{\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right\}$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$			$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$F'(x)$	$-$		$-$			$-$		$-$		$-$		
$F(x)$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$ 2
$F''(x)$	$+$	0	$-$	$-$		$+$	$+$	0	$-$	$-$	$+$	$+$

Vezi graficul XII.86 b.

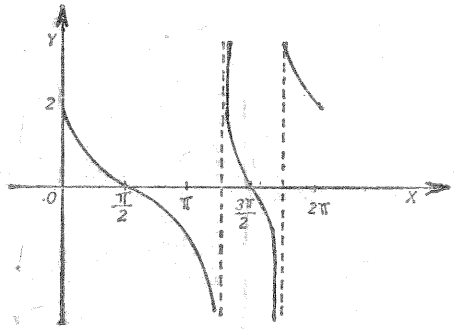


Fig. XII.86 b

Extensia detaliului de grafic pe toată axa reală este în figura XII.86 c.

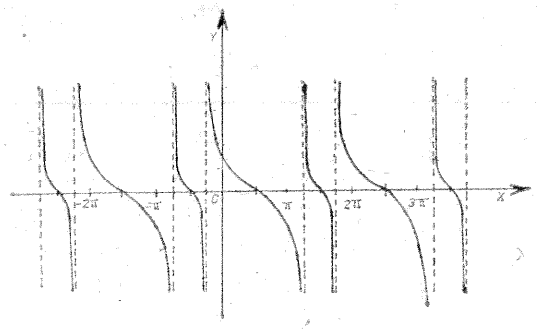


Fig. XII.86 c

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x}{1+2\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+2\sin x)'}{1+2\sin x}\,dx =$$

$$= \ln|1+2\sin x|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 3.$$

87. a) i) Conform definiției funcției parte întreagă $[\,]: \mathbf{R} \to \mathbf{Z}$ avem:

$$[x] = \begin{cases} 0 & \text{pentru} \quad x \in [0,\ 1) \\ 1 & \text{pentru} \quad x \in [1,\ 2) \\ 2 & \text{pentru} \quad x \in [2,\ 3) \\ 3 & \text{pentru} \quad x = 3 \end{cases}$$

$$\text{deci } f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2x+1} & \text{pentru } x \in [0,\ 1) \\ \dfrac{x-1}{2x} & \text{pentru } x \in [1,\ 2) \\ \dfrac{x-2}{2x-1} & \text{pentru } x \in [2,\ 3) \\ 0 & \text{pentru } x = 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2x+1)^2} & \text{pentru } x \in [0,\ 1) \\ \dfrac{1}{2x^2} & \text{pentru } x \in [1,\ 2) \\ \dfrac{3}{(2x-1)^2} & \text{pentru } x \in [2,\ 3) \\ 0 & \text{pentru } x = 3 \end{cases}$$

f este o funcție derivabilă pe intervalul $[0,\ 3]-\{1,\ 2,\ 3\}$ iar în punctele $(1,\ f(1))$, $(2,\ f(2))$ cu toate că limitele laterale sînt finite și diferite, graficul funcției nu admite puncte unghiulare deoarece funcția este discontinuă.

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{4}{(2x+1)^3} & \text{pentru } x \in [0,\ 1) \\ -\dfrac{1}{x^3} & \text{pentru } x \in [1,\ 2) \\ -\dfrac{12}{(2x-1)^3} & \text{pentru } x \in [2,\ 3) \\ 0 & \text{pentru } x = 3 \end{cases}$$

Trasarea tabloului de variație:

x	0		1		2		3
$f'(x)$		$+\ \frac{1}{9}$	$\frac{1}{2}$	$+\ \frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	$+\ \frac{3}{25}$	
$f(x)$	0	$\nearrow\ \frac{1}{3}$	0	$\nearrow\ \frac{1}{4}$	0	$\nearrow\ \frac{1}{5}$	
$f''(x)$		$-$		$-$		$-$	

Cum funcția este continuă pe intervalul $[0,\ 3]-\{1,\ 2,\ 3\}$ este integrabilă și obținem: $\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x}{2x+1}\,dx +$ $+ \int_1^2 \frac{x-1}{2x}\,dx + \int_2^3 \frac{x-2}{2x-1}\,dx = \frac{1}{2}\,x\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\ln|2x+1|\Big|_0^1 +$ $+ \frac{1}{2}\,x\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\ln|x|\Big|_1^2 + \frac{1}{2}\,x\Big|_2^3 - \frac{3}{4}\ln|2x-1|\Big|_2^3 = \frac{3}{2} -$ $- \frac{1}{4}\ln\frac{500}{9}$.

ii) $f_2(x) = [x^2] \cdot x^2$ pentru $x \in [0, 3]$

Explicităm funcția parte întreagă:

$$[x^2] = \begin{cases} 0 \text{ pentru } x^2 \in [0, 1) \\ 1 \text{ pentru } x^2 \in [1, 2) \\ 2 \text{ pentru } x^2 \in [2, 3) \\ 3 \text{ pentru } x^2 \in [3, 4) \\ 4 \text{ pentru } x^2 \in [4, 5) \\ 5 \text{ pentru } x^2 \in [5, 6) \\ 6 \text{ pentru } x^2 \in [6, 7) \\ 7 \text{ pentru } x^2 \in [7, 8) \\ 8 \text{ pentru } x^2 \in [8, 9) \\ 9 \text{ pentru } x^2 = 9 \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ pentru } x \in [0, 1) \\ 1 \text{ pentru } x \in [1, \sqrt{2}) \\ 2 \text{ pentru } x \in [\sqrt{2}, \sqrt{3}) \\ 3 \text{ pentru } x \in [\sqrt{3}, \sqrt{4}) \\ 4 \text{ pentru } x \in [\sqrt{4}, \sqrt{5}) \\ 5 \text{ pentru } x \in [\sqrt{5}, \sqrt{6}) \\ 6 \text{ pentru } x \in [\sqrt{6}, \sqrt{7}) \\ 7 \text{ pentru } x \in [\sqrt{7}, \sqrt{8}) \\ 8 \text{ pentru } x \in [\sqrt{8}, \sqrt{9}) \\ 9 \text{ pentru } x = \sqrt{9} = 3 \end{cases}$$

iii) $f_3(x) = [2^5 x] \cdot \ln(x + 1)$ pentru $x \in [0, 1]$.

Explicităm funcția parte întreagă:

$$[2^5 x] = \begin{cases} 0 \text{ pentru } 2^5 x \in [0, 1) \\ 1 \text{ pentru } 2^5 x \in [1, 2) \\ 2 \text{ pentru } 2^5 x \in [2, 3) \\ \vdots \\ k \text{ pentru } 2^5 x \in [k, k+1) \\ \vdots \\ 31 \text{ pentru } 2^5 x \in [31, 32) \\ 32 \text{ pentru } 2^5 = 32 \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ pentru } x \in \left[0, \frac{1}{32}\right) \\ 1 \text{ pentru } x \in \left[\frac{1}{32}, \frac{2}{32}\right) \\ 2 \text{ pentru } x \in \left[\frac{2}{32}, \frac{3}{32}\right) \\ \vdots \\ k \text{ pentru } x \in \left[\frac{k}{32}, \frac{k+1}{32}\right) \\ \vdots \\ 31 \text{ pentru } x \in \left[\frac{31}{32}, 1\right) \\ 32 \text{ pentru } x = 1 \end{cases}$$

iv) $f_4(x) = \dfrac{x - [x]}{[x] \cdot x^2 + 1}$ pentru $x \in [0, 5]$

Explicităm funcția parte întreagă:

$$[x] = \begin{cases} 0 \text{ pentru } x \in [0, 1) \\ 1 \text{ pentru } x \in [1, 2) \\ 2 \text{ pentru } x \in [2, 3) \\ 3 \text{ pentru } x \in [3, 4) \\ 4 \text{ pentru } x \in [4, 5) \\ 5 \text{ pentru } x = 5 \end{cases}$$

iar funcția f_4 va deveni:

$$f_4(x) = \begin{cases} x & \text{pentru } x \in [0, 1) \\ \dfrac{x-1}{x^2+1} & \text{pentru } x \in [1, 2) \\ \dfrac{x-2}{2x^2+1} & \text{pentru } x \in [2, 3) \\ \dfrac{x-3}{3x^2+1} & \text{pentru } x \in [3, 4) \\ \dfrac{x-4}{4x^2+1} & \text{pentru } x \in [4, 5) \\ \dfrac{x-5}{5x^2+1} & \text{pentru } x = 5 \end{cases}$$

v) $f_5(x) = \sqrt[p]{x} - [\sqrt[p]{x}]$ pentru $x \in [0, \infty)$.

Explicităm funcția parte întreagă:

$$[\sqrt[p]{x}] = \begin{cases} 0 \text{ pentru } \sqrt[p]{x} \in [0, 1) \\ 1 \text{ pentru } \sqrt[p]{x} \in [1, 2) \\ 2 \text{ pentru } \sqrt[p]{x} \in [2, 3) \\ 3 \text{ pentru } \sqrt[p]{x} \in [3, 4) \\ \vdots \\ n \text{ pentru } \sqrt[p]{x} \in [n, n+1) \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ pentru } x \in [0, 1) \\ 1 \text{ pentru } x \in [1, 2^p) \\ 2 \text{ pentru } x \in [2^p, 3^p) \\ 3 \text{ pentru } x \in [3^p, 4^p) \\ \vdots \\ n \text{ pentru } x \in [n^p, (n+1)^p) \end{cases}$$

iar funcția f_5 va deveni:

$$f_5(x) = \begin{cases} \sqrt[p]{x} & \text{pentru } x \in [0, 1) \\ \sqrt[p]{x} - 1 & \text{pentru } x \in [1, 2^p) \\ \sqrt[p]{x} - 2 & \text{pentru } x \in [2^p, 3^p) \\ \vdots \\ \sqrt[p]{x} - n & \text{pentru } x \in [n^p, (n+1)^p) \end{cases}$$

$$f_5'(x) = \frac{1}{p \sqrt[p]{x^{p-1}}} \text{ pentru } x \in [0, n+1]$$

și $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_5'(x) = \infty$, deci graficul funcției va fi tangent în originea axei Oy.

$$f_5''(x) = \frac{1-p}{p^2} \cdot \frac{1}{\sqrt[p]{x^{2p-1}}} \leqslant 0.$$

Trasarea graficului funcției este prezentat în fig XII.87 v)

88. a) (Vezi fig. XII.88a). Aplicînd o teoremă a lui Paul Guldin și anume: volumul corpului de rotație este egal cu

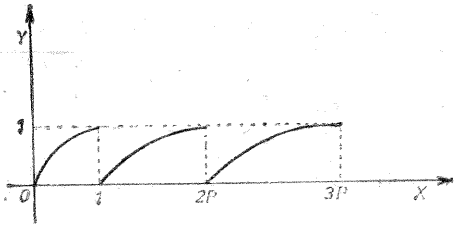


Fig. XII.87 v)

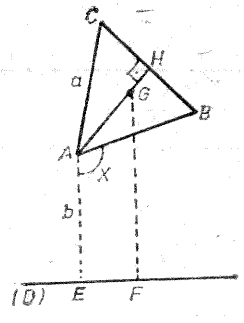


Fig XII..88 a

produsul dintre suprafața de rotație și lungimea cercului descris de centrul de greutate al suprafeței vom obține:

$$V = 2\pi GF \cdot \sigma[ABC] = 2\pi\left[b + \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot a\cdot\cos(150^\circ - x)\right]\cdot$$

$$\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}a^2\left[b + \frac{\sqrt{3}}{3}a\cos(150^\circ - x)\right].$$

$$\text{Cum } V = \pi\sqrt{3}\,ma^2 \Rightarrow \cos(150^\circ - x) =$$

$$= \sqrt{3}\,\frac{2m-b}{a} \in [-1, 1] \Rightarrow -1 \leqslant \sqrt{3}\,\frac{2m-b}{a} \leqslant 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(b - \frac{\sqrt{3}}{3}a\right) \leqslant m \leqslant \frac{1}{2}\left(b + \frac{\sqrt{3}}{3}a\right).$$

b) $m = \frac{1}{2}\left(b + \frac{\sqrt{3}}{3}a\right)$.

c) $f(x) = \frac{2 + \cos(150^\circ - x)}{\sin(150^\circ - x)} = \frac{2 - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$

i) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{k\pi - \frac{\pi}{6} \,\middle|\, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

ii) Perioada funcției este $2k\pi$, deci se poate trasa ușor un detaliu de grafic pentru $x \in [0, 2\pi] - \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.

iii) Asimptote verticale: $x = \frac{5\pi}{6}$, $x = \frac{11\pi}{6}$.

iv) $f'(x) = \frac{1 - 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{3} < x + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{2}.$$

v) $f''(x) = \frac{2\left[\cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1\right]}{\sin^3\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > 0 \Rightarrow x \in \left(0, \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right),$$

iar numărătorul nu se analizează avînd rădăcini complexe conjugate.

x	0		$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$		π		$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$		2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$		
$f(x)$	$4-\sqrt{3}$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$ ∞	$-\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$ $4-\sqrt{3}$
$f''(x)$		$+$	$+$			$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$

d) $A=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx-$

$$-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]'}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx=2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x+\frac{\pi}{6}}{2}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}-$$

$$-\ln\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=2\left[\ln\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{24}\right)-\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)\right]-$$

$$-\left[\ln\left(\sin\frac{5\pi}{12}\right)-\ln\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]$$ unde în calcule se va ține cont de:

$$\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$$ și

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{24}=\operatorname{tg}\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}.$$

BIBLIOGRAFIE

1. Aramă, L. și Morozan, T. — *Probleme de calcul diferențial și integral*, Editura tehnică, București, 1978.
2. Banea, H. — *Probleme de matematică date la examenele de definitivare în învățământ și la concursurile pentru ocuparea catedrelor*. Editura didactică și pedagogică, București, 1976.
3. Berman, G. — *Problèmes d'analyse mathématique*, Editions Mir, Moscou, 1977.
4. Bușneag, D. și Maftei, I. V. — *Teme pentru cercurile și concursurile de matematică ale elevilor*. Editura Scrisul românesc, Craiova, 1983.
5. Cosniță, C. și Turtoiu, F. — *Culegere de probleme de analiză matematică*. Editura tehnică, București, 1962.
6. Démidovitch, B. et Maron, I. — *Eléments de calcul numérique*. Editions Mir, Moscou, 1974.
7. Démidovitch, B. ș.a. — *Recueil d'exercices et de problèmes d'analyse mathématique*. Editions Mir, Moscou, 1971.
8. Donciu, N. și Flondor, D. — *Culegere de probleme de algebră și analiză matematică*. Vol. I. Editura didactică și pedagogică, București, 1964.
9. Fabry, E. — *Problèmes d'analyse mathématique*. Paris, Hermann et fils.
10. Goursat, E. — *Cours d'analyse mathématique*, vol. I. Gauthier-Villars, Paris.

11. Ionescu, D.V. — *Ecuații diferențiale și integrale.* Editura didactică și pedagogică, București, 1973.

12. Ionescu-Țiu, C. și Pîrșan, L. — *Calcul diferențial și integral pentru admitere în facultate.* Editura Albatros, 1975.

13. Nicolescu, M., Marcus, S. și colab. — *Manual de analiză matematică.* Editura didactică și pedagogică, București, 1971.

14. Panaitopol, I. și Ottescu, C. — *Probleme date la olimpiadele de matematică.* Editura didactică și pedagogică, București, 1977.

15. Perju, C. și Perju, R. — *Culegere de probleme de matematică pentru concursurile de admitere în învățământul superior.* Editura didactică și pedagogică, București, 1970.

16. Rivaud, J. — *Exercices d'analyse,* tome I. Libraire Vuibert, Paris, 1966.

17. Roman, T., Simionescu, Gh. și colab. — *Probleme date la concursurile de matematică.* Editura didactică și pedagogică, București, 1970.

18. Roșculeț, M. și Popescu, O. — *Probleme de analiză matematică pentru concursurile de admitere în învățământul superior.* Editura didactică și pedagogică, București, 1971.

19. * * — Gazeta matematică (1965–1980)

CUPRINS

Cuvînt înainte de prof. dr. doc. Constantin Drâmbă ... 5

CAPITOLUL I.

Șiruri. Limite de șiruri
Probleme propuse spre rezolvare ... 7
Rezolvări și răspunsuri ... 19

CAPITOLUL II.

Limite de funcții
Probleme propuse spre rezolvare ... 61
Rezolvări și răspunsuri ... 68

CAPITOLUL III.

CONTINUITATE. DERIVABILITATE. DERIVATA DE ORDINUL-n. APLICAȚII ALE DERIVATELOR: tangenta, subtangenta, normala, subnormala duse la o curbă dată; unghiul sub care se intersectează două curbe; unghiul sub care se vede o curbă dintr-un punct dat. DERIVATA UNUI DETERMINANT. PROPRIETATEA LUI DARBOUX. PRIMITIVE.
Probleme propuse spre rezolvare ... 109
Rezolvări și răspunsuri ... 136

CAPITOLUL IV.

Teoreme de medie: Rolle, Lagrange, Cauchy, l'Hospital, Taylor, Darboux. Aplicații ...
Probleme propuse spre rezolvare ... 163
Rezolvări și răspunsuri ... 172

CAPITOLUL V.

Grafice de funcții
Probleme propuse spre rezolvare ... 207
Rezolvări și răspunsuri ... 215

CAPITOLUL VI.

Probleme de maxim și de minim
Probleme propuse spre rezolvare ... 306
Rezolvări și răspunsuri ... 310

CAPITOLUL VII.

Integrale. Funcții integrabile în sens Riemann
Probleme propuse spre rezolvare ... 342
Rezolvări și răspunsuri ... 366

CAPITOLUL VIII.

Sume Riemann

Probleme propuse spre rezolvare ... 438
Rezolvări și răspunsuri ... 440

CAPITOLUL IX.

APLICAȚII ALE INTEGRALELOR: arii, volume, centre de greutate, formulele lui Paul Guldin, moment static, moment de inerție, lungimi de curbe, suprafețe de rotație, lucru mecanic, presiune, viteză, accelerație, căldură specifică. IDENTITĂȚI DEDUSE PRIN DERIVARE SAU PRIN INTEGRARE.

Probleme propuse spre rezolvare ... 450
Rezolvări și răspunsuri ... 463

CAPITOLUL X.

METODE DE CALCUL APROXIMATIV. Determinarea valorilor aproximative ale rădăcinilor ecuațiilor, folosind metode de calcul numeric. Metode de calcul aproximativ al integralelor definite

Metode de calcul aproximativ ... 509
Probleme propuse spre rezolvare ... 516
Rezolvări și răspunsuri ... 519

CAPITOLUL XI.

Ecuații diferențiale

Probleme propuse spre rezolvare ... 539
Rezolvări și răspunsuri ... 545

CAPITOLUL XII.

Teste de sinteză

Probleme propuse spre rezolvare ... 573
Rezolvări și răspunsuri ... 603
Bibliografie ... 733

Lector : GHEORGHE FOLESCU
Tehnoredactor : CORNEL CRISTESCU

Bun de tipar 31.III.1937. Apărut 1938.
Comanda nr. 2 705
Coli de tipar 46

Tiparul executat sub comanda nr. 60 501 la Combinatul poligrafic „Casa Scînteii", Piața Scînteii nr. 1, București, REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA